



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

## Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

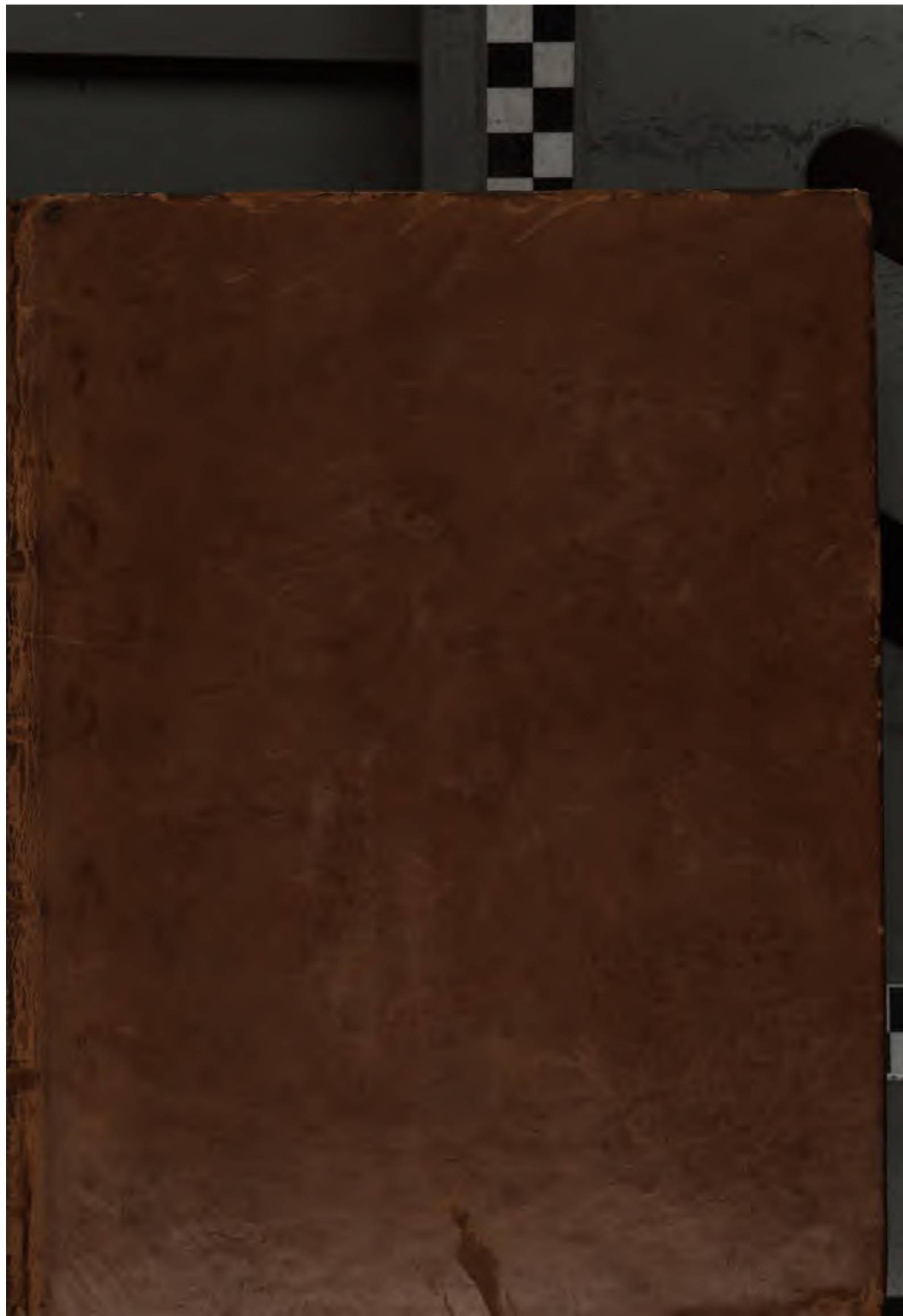
Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

## À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

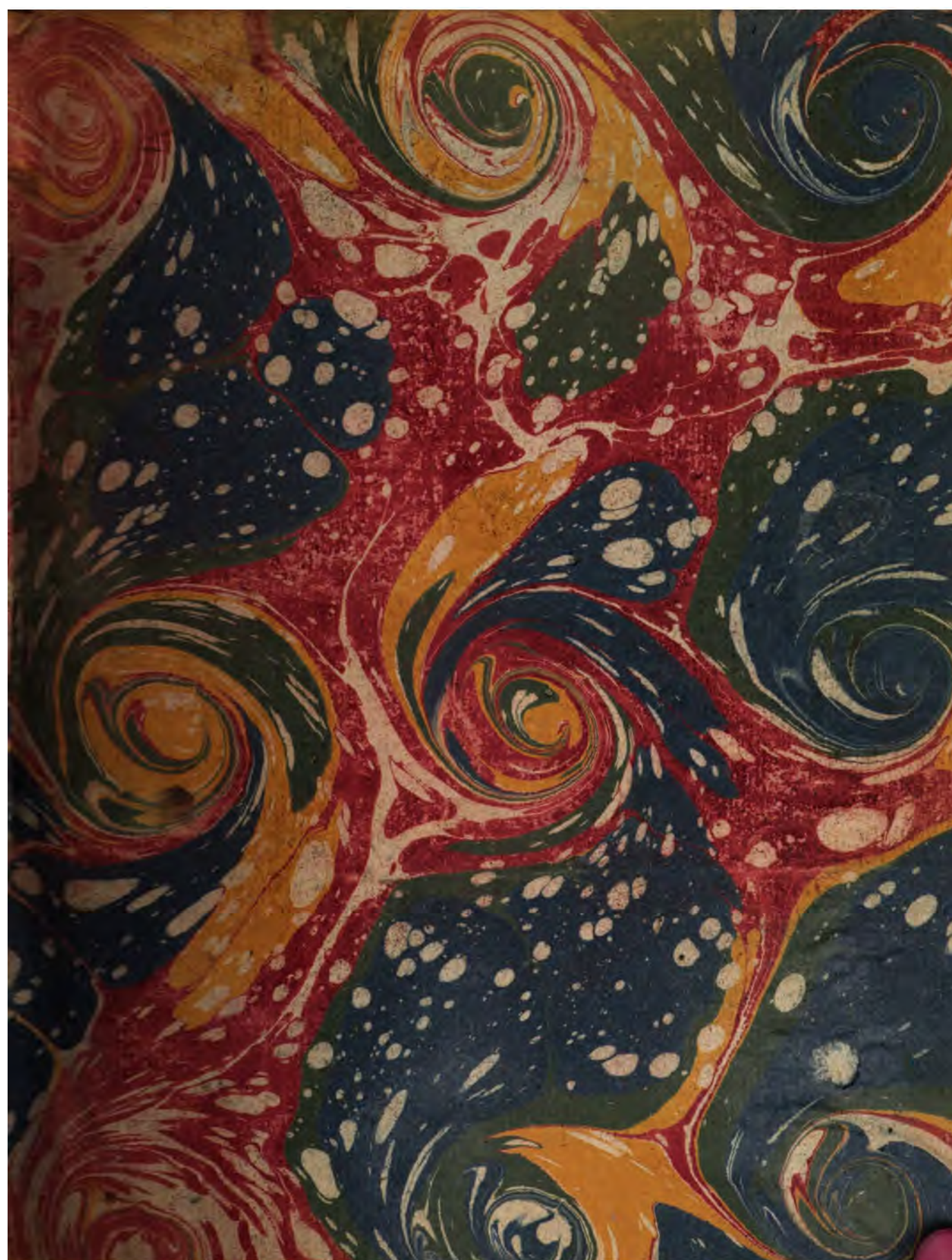












56

Scalq d 89  
178







HISTOIRE  
DE  
L'ACADÉMIE  
ROYALE  
DES SCIENCES.

---

ANNÉE M. DCCLXXVIII.

---

Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique,  
pour la même Année,  
*Tirés des Registres de cette Académie.*



A PARIS,  
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

---

M. DCCLXXXI.



---

# T A B L E

## POUR L'HISTOIRE.

---

### PHYSIQUE GÉNÉRALE.

<i>Sur le Froid de 1767.....</i>	<i>Page 1</i>
----------------------------------	---------------

---

### A N A T O M I E.

<i>Sur le mécanisme de la Respiration.....</i>	<i>3</i>
<i>Sur une ouverture fistuleuse du nombril.....</i>	<i>4</i>
<i>Sur l'organe de l'Œue dans les différens genres d'animaux.</i>	<i>5</i>

---

### HISTOIRE NATURELLE DES ANIMAUX.

<i>Observations sur le Crapaud.....</i>	<i>7</i>
---	----------

---

### B O T A N I Q U E.

<i>Sur les Gommiers du Sénégal.....</i>	<i>9</i>
<i>Observation de Botanique.....</i>	<i>10</i>

---

### M I N É R A L O G I E.

<i>Extrait d'un Voyage fait dans les Vosges.....</i>	<i>12</i>
<i>Sur la Mine rouge de Guivre.....</i>	<i>13</i>
<i>Sur l'eau du lac Asphaltite.....</i>	<i>14</i>

## T A B L E.

---

### C H I M I E.

<i>Sur la nature des Acides.....</i>	15
<i>Sur la décomposition des Sels vitrioliques.....</i>	17
<i>Sur différentes combinaisons du Fer.....</i>	20
<i>Sur l'Art des Essais d'Or.....</i>	21
<i>Rapport fait à l'Académie sur l'Or qu'on peut retirer des terres ou des cendres végétales.....</i>	25

---

### A S T R O N O M I E.

<i>Suite des Méthodes analytiques pour résoudre les Problèmes d'Astronomie.....</i>	28
<i>Sur l'obliquité de l'Écliptique.....</i>	30
<i>Sur les Taches du Soleil.....</i>	32
<i>Observations de l'Éclipse du 24 Juin.....</i>	33
<i>Observations Astronomiques, faites à Saron en 1778..</i>	34

---

### M É C A N I Q U E.

<i>Sur le mouvement d'un Pendule de longueur variable... </i>	35
<i>Sur une nouvelle Bouffole.....</i>	36

---

### H Y D R O D Y N A M I Q U E.

<i>Nouvelles Expériences sur la résistance des fluides.....</i>	38
<i>Sur la résistance des fluides.....</i>	40

---

### A N A L Y S E.

<i>Théorèmes analytiques.....</i>	42
-----------------------------------	----

# T A B L E.

<i>Méthode de Calcul intégral.....</i>	42
<i>Sur les Probabilités.....</i>	43
<hr/>	
<i>Ouvrages présentés à l'Académie.....</i>	47
<i>Prix.....</i>	Ibid.
<i>Arts.....</i>	48
<i>Ouvrages des Académiciens.....</i>	49
<i>Éloge de M. Malouin.....</i>	57
<i>Éloge de M. de Linné.....</i>	66





# T A B L E

## POUR LES MÉMOIRES.

<i>OBSERVATIONS sur quelques combinaisons salines du Fer.</i> Par M. DE LASSONÉ.....	Page 1
<i>Observation au sujet de deux Animaux dont le mâle accouche la femelle.</i> Par M. DEMOURS.....	12
<i>Deuxième Mémoire sur le Gommier blanc, appelé Uerek au Sénégal; sur la manière dont on fait la récolte de sa gomme &amp; de celle des Acacias, &amp;c.</i> Par M. ADANSON...	20
<i>Eclipse de Soleil, du 24 Juin 1778 après-midi, observée à Paris de l'Observatoire de la Marine.</i> Par M. MESSIER.	36
<i>Observation de l'Eclipse de Soleil, du 24 Juin 1778, faite à l'Observatoire royal de Paris.</i> Par M. JEURAT..	39
<i>Mémoire sur la décomposition de plusieurs Sels neutres à bases d'alkalis fixes &amp; volatils, par l'acide marin.</i> Par M. CORNETTE.....	44
<i>Observation de l'Eclipse de Soleil, du 24 Juin 1778, faite à Sainte-Geneviève.</i> Par M. PINGRE.....	61
<i>Observation sur l'Eclipse de Soleil, du 24 Juin 1778.</i> Par M. LE MONNIER.....	62
<i>Construction de la Bouffole, dont on a commencé à se servir en Août 1777.</i> Par le même.....	66
<i>Analyse de l'eau du lac Asphaltite.</i> Par M. <sup>rs</sup> MACQUER, LAVOISIER & SAGE.....	69
<i>Nouvelles Méthodes analytiques pour résoudre différentes Questions astronomiques. Treizième Mémoire.</i> Par M. DIONIS DU SÉJOUR.....	73



## T A B L E.

<i>Observations astronomiques , faites au château de Saron pendant l'automne de 1778. Par M. MESSIER.....</i>	193
<i>Mémoire sur le mouvement d'un Pendule dont la longueur est variable. Par M. l'Abbé BOSSUT.....</i>	199
<i>Observations sur la Mine rouge de Cuivre. Par M. SAGE.</i>	210
<i>Remarques sur le mouvement des Côtes dans la respiration. Par M. BORDENAVE.....</i>	213
<i>Observation sur une ouverture fistuleuse au bas-ventre, par laquelle le malade rendoit presque toutes ses urines. Par M. SABATIER.</i>	224
<i>Mémoire sur les Probabilités. Par M. DE LA PLACE.</i>	227
<i>Second Mémoire sur l'action comparée de l'Acide nitreux &amp; de l'Acide marin sur les Sels vitrioliques à base terreuse. Par M. CORNETTE.....</i>	333
<i>Mémoire sur les mouvemens des Côtes &amp; sur l'action des Muscles intercostaux. Par M. SABATIER.....</i>	347
<i>Nouvelles Expériences sur la résistance des fluides. Par M. l'Abbé BOSSUT.....</i>	353
<i>Quatrième Mémoire sur l'Anatomie des Oiseaux. De la structure de l'organe de l'Ouïe des Oiseaux comparé avec celui de l'Homme, &amp;c. Par M. VICQ-D'AZYR....</i>	381
<i>Second Mémoire sur les Taches du Soleil, &amp;c. Par M. DE LA LANDE.....</i>	393
<i>Extrait des Observations météorologiques, faites à la campagne, près de Paris, pendant les Froids de Janvier 1767, &amp;c. Par M. ADANSON.....</i>	425
<i>Expériences sur une espèce de Stéatite blanche, qui se convertit seule au feu en un beau biscuit de Porcelaine. Par M.<sup>rs</sup> GUETTARD &amp; LAVOISIER.....</i>	433

## T A B L E

<i>Description des deux Mines de Charbon de Terre, situées au pied des montagnes de Voyes, &amp;c.</i> Par M. <sup>rs</sup> GUETTARD & LAVOISIER.....	435
<i>Recherches sur l'intégration des Équations différentielles.</i> Par M. COUSIN.....	442
<i>Mémoire sur l'Obliquité de l'Écliptique, déterminée par les Observations faites à l'Observatoire royal de Paris, &amp;c.</i> Par M. CASSINI le Fils.....	484
<i>Mémoire sur un moyen nouveau de faire avec exactitude, le départ d'un grand nombre d'Essais d'Or à différens titres.</i> Par M. TILLET.....	505
<i>Considérations générales sur la nature des Acides, &amp; sur les principes dont ils sont composés.</i> Par M. LAVOISIER.	535
<i>Rapport fait à l'Académie des Sciences, par la Classe de Chimie, le 21 Août 1779.....</i>	548
<i>Observations Botanico-Météorologiques, faites à Denainvilliers pendant l'année 1777.</i> Par M. DU HAMEL..	560
<i>Essai d'une Théorie de la résistance qu'éprouve la proue d'un Vaisseau dans son mouvement.</i> Par M. EULER....	597
<i>Mémoire de Minéralogie.</i> Par M. MONTET, de la Société royale de Montpellier.....	615

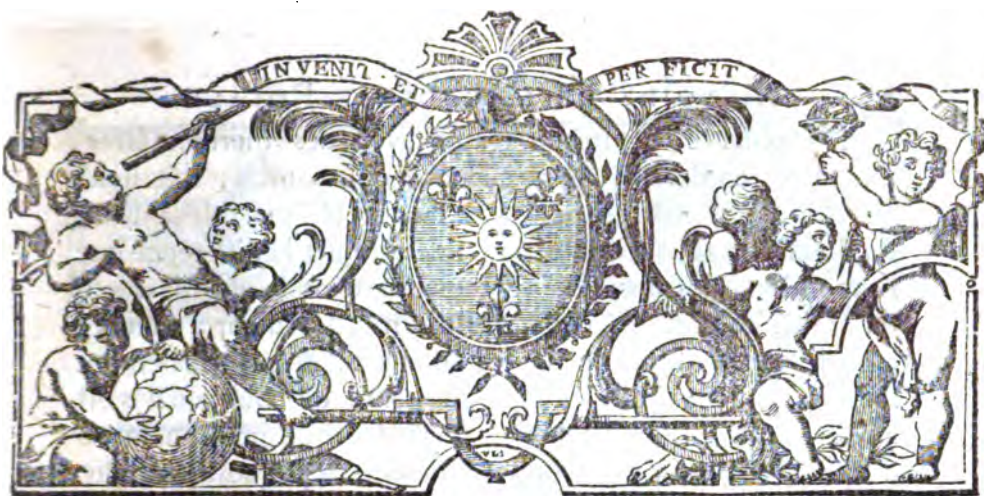
---

*FAUTE à corriger dans ce Volume.*

*HISTOIRE, page 65, ligne 25, a perdu; lisez aura perdu.*



HISTOIRE



HISTOIRE  
DE  
L'ACADÉMIE ROYALE  
DES SCIENCES.

*Année M. DCCLXXVIII.*

---

PHYSIQUE GÉNÉRALE.

---

*SUR LE FROID DE 1767.*



Le Mémoire auroit dû être inséré parmi ceux de V. les Mém. l'Académie pour l'année 1767 : l'Auteur le fait p. 425. paroître aujourd'hui, parce qu'il a cru qu'il pourroit être utile pour compléter la suite des observations d'hivers rigoureux, observations qui, depuis 1776, ont attiré l'attention des Physiciens.

*Hist. 1778.*

A

## 2 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

Il a observé en même temps avec des thermomètres, soit placés contre des murs au nord ou au midi, soit isolés en plein air, mais exposés de tous côtés ou mis à l'abri du Soleil: par ce moyen, il a pu déterminer la différence que l'exposition, les abris doivent mettre dans le degré absolu du froid, & dans les variations diurnes. L'Auteur a observé aussi les effets du froid sur les animaux, & principalement sur les plantes; c'est à celles du genre des blés qu'il s'est arrêté le plus: il en avoit en expérience d'un grand nombre d'espèces & de variétés semés à différentes époques. Il résulte de ces expériences, que les blés semés au mois d'Octobre ont moins souffert de ce froid arrivé vers la mi-Janvier, que ceux qui avoient été semés plus tôt ou plus tard: or comme cette époque est la plus commune pour les grands froids, on voit que c'est dans celle du mois d'Octobre qu'il faut de préférence semer les blés d'hiver. Ce Mémoire n'est qu'une très-petite partie d'un Ouvrage très-étendu sur les variations de l'atmosphère, dont M. Adanson s'occupe depuis long-temps, avec une suite & une attention infatigables.





## ANATOMIE.

*SUR LE MÉCANISME DE LA RESPIRATION.*

**M.** SABATIER décrit dans ce Mémoire, les différens mouvemens que les côtes exécutent pendant la respiration, & l'action des muscles qui les font mouvoir. V. les Mém. p. 347.

Toutes les côtes ne s'élèvent pas dans l'inspiration, comme la plupart des Anatomistes l'avoient supposé : les supérieures montent tandis que les inférieures descendent ; celles du milieu éprouvent, dans le même temps, une sorte de mouvement de rotation de dedans en dehors. Ce mouvement est commun à toutes les côtes, mais c'est dans celles du milieu qu'il est le plus sensible : il augmente en largeur l'étendue de la poitrine, tandis que l'écartement des côtes en augmente la capacité en longueur. Pendant l'expiration, les mouvemens des côtes se font dans le sens opposé. Les facettes cartilagineuses qu'on observe sur les apophyses transverses des vertèbres, ont indiqué à M. Sabatier le sens de ces divers mouvemens : & il entre dans des détails intéressans sur ces facettes cartilagineuses qui, aperçues par Vésale, n'avoient été décrites avec exactitude par aucun Anatomiste.

M. Sabatier a confirmé son opinion par des observations faites sur des hommes blessés à la poitrine, & sur des animaux ; elles l'ont conduit à conclure que les muscles intercostaux comptés parmi les muscles inspireurs, parmi ceux qui servent à dilater la poitrine s'allongent dans ce mouvement, & se raccourcissent quand la poitrine se resserre, & qu'ils doivent par conséquent être placés au nombre des muscles expirateurs.

#### 4 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

Dans l'état naturel, pour une foible inspiration le diaphragme agit presque seul ; si l'inspiration est forte, ce sont les muscles scalènes, les dentelés supérieurs qui élèvent les premières côtes. Les quarrés des lombes, les dentelés postérieurs, & généralement les muscles expirateurs l'emportent en force sur les inspireurs, ce qui est conforme à ce qui s'observe dans le reste de l'économie animale, où les muscles fléchisseurs l'emportent sur les extenseurs. D'ailleurs, comme l'a remarqué Vésale, la voix, la toux, l'expulsion du fœtus, d'autres fonctions animales dépendent de l'expiration, & exigent beaucoup de force dans l'état naturel, au lieu que l'inspiration en exige peu.

V. les Mém. Le Mémoire de M. Bordenave a le même objet que celui  
p. 213. de M. Sabatier, & quoiqu'ils se fondent sur des observations de genres différens, tous deux ont été conduits en général aux mêmes conclusions.

M. Bordenave termine son Mémoire par des réflexions sur le dérangement que l'usage des corps produit sur la poitrine des femmes, & dans le mécanisme de la respiration. Mais ces réflexions, quoique très-sages, ne corrigeront personne, pas même l'observation très-fondée, que cet usage nuit plus réellement à la beauté qu'il n'y contribue. Pour les femmes comme pour les ambitieux, ce n'est pas de vivre qu'il s'agit, c'est de régner ; ce n'est pas d'avoir les qualités nécessaires pour mériter le pouvoir, c'est de paroître les posséder ; & les femmes ne renonceront à tant d'usages aussi contraires à la santé qu'à la vraie beauté, que lorsqu'elles renonceront à la gloire de plaire, & daigneront se contenter du bonheur d'être aimées.

---

#### S U R U N E

#### OUVERTURE FISTULEUSE DU NOMBRIL.

Page 224. M. SABATIER rend compte dans ce Mémoire, de l'état d'un homme dont le canal de l'urètre étoit obstrué par une



pierre , & dont les urines s'étoient ouvert une route par une ouverture fistuleuse , près du nombril. Les observations de cette espèce sont très-rares dans les adultes ; M. Sabatier a remarqué que dans celle-ci , l'ouverture n'avoit pas eu pour cause la dilatation de l'ouraque , canal qui existe dans le fœtus , & qui s'oblitére après la naissance. Plusieurs Anatomistes célèbres ont observé cette dilatation dans des sujets très-jeunes , dont le canal de l'urètre avoit été bouché ou par des obstacles accidentels , ou par une structure vicieuse ; mais ici , la Nature avoit suivi une route différente : le fond de la vessie s'étoit enflammé ; il avoit contracté une adhérence avec les tégumens , & à la suite de l'abcès , il s'étoit formé une ouverture à la vessie , & une sorte de canal qui conduisoit l'urine à la fistule des tégumens. Mais la Nature n'avoit pas tout fait ; la route qu'elle avoit formée ne procuroit à l'urine qu'une issue , qui ne suffisoit que pour une excrétion peu abondante , & cette excrétion étoit douloureuse ; l'Art auroit pu la seconder , s'il avoit été possible de reconnoître , avant la mort du sujet , l'état des parties & la direction de ce nouveau canal.

## SUR L'ORGANE DE L'OUÏE

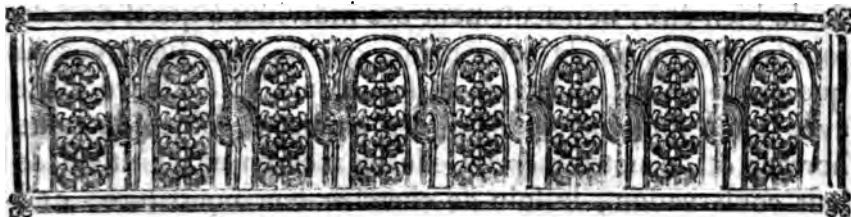
### DANS LES DIFFÉRENS GENRES D'ANIMAUX.

CE n'est qu'en comparant dans différens Animaux, les V. les Mém. organes des sens , ou en général les organes destinés à des P. 381. fonctions semblables , que l'on peut apprendre à distinguer dans un organe les parties vraiment nécessaires , de celles qui ne servent qu'à le perfectionner ou à l'étendre ; c'est aussi le seul moyen de bien reconnoître à quelle fonction particulière chacune de ses parties est destinée.

En comparant l'organe de l'ouïe dans les quadrupèdes , les oiseaux , les reptiles & les poissons , M. Vicq-d'Azir a observé que ses parties essentielles étoient au moins un osselet , des conduits demi-circulaires , & une pulpe nerveuse :

ces parties, en effet, se retrouvent dans l'organe de l'ouïe de tous les animaux, & ce sont les seules qui s'y trouvent constamment. La conque extérieure qu'on observe dans l'homme & dans les quadrupèdes, manque dans toutes les autres espèces; à la vérité, le trou auditif est entouré, dans la plupart des oiseaux, de plumes rangées circulairement, & avec une disposition régulière, qui ne permet pas de les croire inutiles au sens de l'ouïe. Le conduit auditif, commun aux quadrupèdes & aux oiseaux, manque dans plusieurs reptiles & dans les poissons. Le limaçon qu'on n'a observé que dans l'homme & les quadrupèdes, manque dans les oiseaux, mais un conduit droit y supplée; au lieu de trois osselets ils n'en ont qu'un, comme dans la plupart des autres genres, excepté dans certains poissons; mais par une singularité remarquable, si l'organe des quadrupèdes est plus compliqué que celui des oiseaux dans sa structure, & par le nombre des pièces qui le composent, les parties essentielles de l'ouïe semblent avoir dans les oiseaux une perfection plus grande; en sorte, qu'à moins de supposer au limaçon & à la spirale qui leur manquent, quelque usage qui nous est inconnu, on ne peut dire à qui des oiseaux ou de nous la Nature a accordé un organe de l'ouïe plus parfait. A s'en tenir même aux connoissances actuelles, il paroît qu'il y a lieu de croire que les oiseaux ont l'avantage: en effet, il n'y a point de différences essentielles entre l'ouïe de l'homme & celui des quadrupèdes, & aucun des quadrupèdes n'a, comme les oiseaux, la faculté de chanter, d'apprendre des airs; ainsi l'homme paroît devoir les avantages de son ouïe plutôt à son intelligence qu'à son organisation.





# HISTOIRE NATURELLE

## DES ANIMAUX.

### OBSERVATIONS SUR LE CRAPAUD.

L'HISTOIRE de l'Académie a déjà fait mention de V. les Mém.  
l'Observation de M. Demours, sur le Crapaud, accoucheur P. 13.  
de sa femelle; mais l'Auteur, devenu Associé de l'Académie,  
a cru devoir consigner dans nos Mémoires les détails de son  
observation: nous ne parlerons que de ceux dont l'Histoire  
de 1741 n'a pas fait mention.

Plusieurs semaines avant la ponte, le crapaud mâle tient sa femelle embrassée; cependant, lorsqu'il s'en sépare pour l'accoucher, les œufs ne sont pas fécondés; & il y a tout lieu de croire que c'est seulement après les avoir tirés qu'il les féconde d'un seul jet; depuis ce moment, lui seul en reste chargé, & il les porte avec lui. Comme les petits qui doivent éclore existent d'abord sous la forme de têtards, forme sous laquelle il ne peuvent vivre que dans l'eau, le crapaud cherche une mare où il puisse déposer les œufs; s'il n'en trouve point dont l'abord lui soit facile, il se précipite d'un bord escarpé au hasard de périr au bout de quelques jours s'il lui est impossible de remonter, & quoiqu'il ait appris par l'expérience qu'il ne peut passer dans l'eau un long espace de temps sans y souffrir.

Ainsi l'on voit qu'il existe dans tout être sensible une force qui lui fait un besoin réel & très-presant de l'existence

BOULET

## 8 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

& du bien-être, non-seulement des individus à qui il doit des jouissances, mais de ceux même qui ne sont liés avec lui que par le besoin qu'ils ont de ses secours. Cette force existe avec toute son énergie dans des animaux, objet de notre horreur & de notre mépris; elle balance en eux l'intérêt de leur conservation, le soin de chercher leur nourriture: c'est à elle que la plupart des espèces d'animaux doivent leur perpétuité, & dans l'homme, elle est la source de ses affections morales, & le principe naturel de ses vertus.

L'origine de ce sentiment, ses rapports avec l'intérêt personnel direct dont il triomphe si souvent, son influence sur nos actions & nos principes, tous ces objets importants, sur lesquels l'Observation des animaux peut nous donner tant de lumières, n'ont peut-être pas encore été démêlés avec assez de soin par les Métaphysiciens, qui, séduits par les préjugés de la Philosophie, ont souvent été chercher bien loin, ce qu'ils ne pouvoient trouver qu'au-dedans d'eux-mêmes.



**BOTANIQUE**



## BOTANIQUE.

### *SUR LES GOMMIERS DU SÉNÉGAL.*

CE Mémoire est la suite de celui que M. Adanson a V. les Mém. publié dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1775, P. 20. sur les Gommiers du Sénégal.

Il considère ici deux espèces de gommiers ou d'acacias ; le premier, nommé *Uerek* par les habitans du pays, est un arbre de moyenne grandeur, qui ne s'élève guère qu'à vingt pieds ; il fournit, sans qu'il soit nécessaire d'y faire des incisions, une gomme blanche qui n'a qu'une saveur douce, mêlée d'un peu d'acidité lorsqu'elle est fraîche & qu'on la goûte avec attention.

La gomme rouge ou blanche est, avec le lait de leurs troupeaux, la principale nourriture des Maures, ou plutôt des Arabes, qui mènent une vie errante dans le vaste pays qui s'étend entre le Niger & les montagnes où se termine le royaume de Maroc. Comme les gommiers se trouvent partagés entre trois grandes forêts, ces peuples sont aussi divisés en trois hordes, dont chacune a son Chef.

Ils font avec l'Europe un commerce considérable de toutes les espèces de gommes. M. Adanson évalue ce commerce à trois millions de livres pesant : il est plus lucratif & plus sûr que la traite des Nègres, si pourtant l'on peut se permettre de comparer deux espèces de commerce dont l'un, fondé sur les besoins mutuels de deux peuples, a pour but de procurer à l'Europe une denrée utile, tandis que l'autre, fondé sur la

*Hist. 1778.*

B

perfidie ou la violence, est un véritable crime aux yeux de quiconque n'a pas renoncé aux plus simples notions de la morale.

La seconde espèce d'acacia dont parle M. Adanson est beaucoup plus petite, les Maures lui donnent le nom de *Ded*; quoique du même genre que l'uérék, le *ded* ne produit pas de gomme. Cet arbre ne peut être d'aucune utilité, mais les Maures en ont fait un arbre sacré; ils prétendent que ceux qui se réfugient dans ce buisson, y sont invulnérables aux flèches de leurs ennemis; mais ils ne sont pas à l'abri des piqûres des épines dont cet arbre est hérissé, & cet asyle incommode, qui ne s'étend pas au-delà du buisson sacré, n'offre aux superstitieux & aux lâches, qu'une bien foible ressource.

M. Adanson annonce dans son Mémoire des recherches sur le bdellium, espèce de résine mal-à-propos confondue avec l'encens, & dont il a eu occasion de découvrir l'origine à peu-près inconnue jusqu'ici. Tous ces Mémoires sont le résultat du voyage que M. Adanson a fait au Sénégal en 1750, & l'on regrette en les lisant, d'en avoir été privé si long-temps.

### OBSERVATION DE BOTANIQUE.

M. le Marquis de Courtivron a communiqué à l'Académie l'Observation suivante, sur les effets de la *Bella-dona*.

« Le 27 Septembre 1777, au soir, plusieurs enfans de  
 » coupeurs de bois, barraqués en un lieu nommé *Combe-  
 » lizardiére*, sur le territoire de Compasseur-Créqui-Montfort,  
 » bailliage de Dijon, se trouvèrent attaqués de vertiges; ils  
 » avoient les yeux hagards, & ne pouvoient distinguer les objets;  
 » le délire étoit continu; ils étoient effrayés de spectres qu'ils  
 » croyoient voir, & ils jetoient par intervalle, des cris perçans;  
 » leur corps étoit dans une agitation continuelle, & ils ne  
 » pouvoient se tenir debouts; leur poulx étoit convulsif,



petit & intermittent; leur bouche étoit sèche, la respiration « laborieuse; le ventre étoit tendu & douloureux. Je fis « avertir le plus promptement qu'il fût possible, M. Perrenet, « Chirurgien de l'Hôpital d'Issurtille, distant de deux lieues « du village de Compasseur - Créqui - Montfort; il ne put arriver « que le lendemain matin : ayant appris que ces enfans avoient « mangé dans le bois des fruits qu'ils ne connoissoient pas, « & dont les parens représentèrent quelques-uns, il les « reconnut pour des baies de *bella-dond*; mais avant qu'on « eût pu administrer des secours aux quatre malades, & avant « l'arrivée du Chirurgien, il y en avoit un mort : on donna « aux trois autres de l'émétique, qui leur fit rejeter les fruits « qu'ils avoient mangés; des lavemens & une médecine douce « leur fit évacuer par le bas beaucoup de matières noirâtres : « on leur donna une boisson abondante de lait d'amande. Vers « trois heures après midi, que le mieux s'annonça, les malades « s'endormirent; à leur réveil leur peau fut couverte d'une « moiteur considérable; ils étoient comme stupides & étonnés : « le sur-lendemain ils parurent guéris, & reprirent peu-à-peu « leurs habitudes ordinaires. »

Ayant questionné ces enfans depuis leur guérison, ils « m'ont assuré qu'ils n'avoient mangé chacun que peu de ces « baies de *bella-dona*, & ils m'ont dit que celui qui étoit « mort, n'en avoit pas mangé plus qu'eux, sans doute plus « délicat que les autres, car l'âge des quatre enfans n'étoit pas « fort différent, il succomba plus tôt sous l'effet du poison qui, « sans les secours administrés, les auroit emportés comme lui. »





## MINÉRALOGIE.

## EXTRAIT D'UN VOYAGE

## FAIT DANS LES VOSGES.

V. les Mém. **M.**<sup>RS</sup> GUETTARD & LAVOISIER ont parcouru en  
P. 433. Naturalistes & en Physiciens, plusieurs de nos Provinces,  
où ils ont recueilli une longue suite d'Observations intéres-  
santes pour l'Histoire Naturelle & pour les Arts. Ces deux  
Mémoires en font partie.

Dans le premier, ils décrivent un banc de terre argileuse  
blanche, qui peut seule, sans addition, sans même avoir été  
lavée, donner, en la cuisant au feu, de beau biscuit de  
porcelaine; ce qui prouve que cette terre n'est pas une argile  
pure, mais de l'argile mêlée avec une terre fusible: au-dessous  
est un banc d'une terre de même nature à peu-près, d'une  
teinte verte; la terre de ce banc est propre à faire de la  
poterie solide, mais grossière. Ces bancs se trouvent auprès  
de Plombières, dans un pays où le bois est commun,  
en sorte qu'on pourroit y établir, avec avantage, une Manu-  
facture de porcelaine: cette vaisselle, quoique fragile, peut  
par son inaltérabilité au feu & dans les différens menstrues,  
devenir un jour d'une très-grande utilité, soit pour les Arts,  
soit pour l'usage de la vie; mais il faudroit pour cela qu'elle  
cessât d'être un objet de luxe, & que les Manufactures de  
ce genre, encouragées par la liberté, se multipliasent dans  
les provinces éloignées de la capitale. Les Manufactures de  
luxe ne sont en effet un objet important & digne des

encouragemens du Gouvernement & des regards des Philosophes , que lorsqu'elles servent en exerçant des ouvriers habiles , en excitant l'émulation parmi les hommes qui étudient les Arts , à étendre , à diversifier , à perfectionner les Manufactures d'un usage commun.

Le second Mémoire renferme la description de deux mines de charbon de terre , situées sur les confins de l'Alsace & de la Franche-Comté: l'analyse de ces deux charbons de terre ne donne point d'alkali volatil , comme on en retire communément de ces substances. M. Rouelle l'aîné avoit observé le même phénomène dans le charbon de terre de Balleroy en Normandie. Ces différences entre les principes des charbons de terre , en indiquent une essentielle dans leur origine , dans la nature des corps qui ont servi à leur formation , ou dans l'espèce de changemens que ces corps ont subis. Mais quelle est cette différence?

V. les Mémoires  
P. 435.

A l'une de ces mines , à celle de Ronchamps , on avoit établi en 1757 , lorsque les savans Voyageurs l'examinèrent , une Manufacture de noir de fumée : le toit de cette même mine est un schiste alumineux , qu'on commençoit aussi alors à exploiter pour en retirer de l'alun. Depuis que l'Histoire Naturelle & la Chimie ont fait des progrès , on commence à savoir que l'alun n'est pas une substance rare en France , & qu'il est également possible ou d'en retirer de beaucoup de terres , ou d'en former artificiellement.

### SUR LA MINE ROUGE DE CUIVRE.

ON connoît trois espèces de mines rouges de cuivre ; elles paroissent ne différer que par leur forme , & le plus ou le moins de régularité dans leur cristallisation.

P. 210.

M. Sage a observé une teinture approchante de celle de cette mine sur du cuivre recouvert par une rouille verte que l'on appelle *patine*. Enfin , dans les cavités de plusieurs morceaux de statues de bronze trouvées après un long séjour

#### 14 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

dans l'eau ou dans la terre, on a trouvé de la mine rouge de cuivre bien cristallisée.

De ces faits M. Sage conclut que la mine rouge de cuivre n'est qu'une chaux de cuivre, n'est que le métal même privé de son phlogistique : aussi cette mine réduite donne soixante-dix livres de métal par quintal, & se dissout en entier dans l'alkali volatil, à qui elle fait prendre une couleur bleue ; & ces résultats chimiques confirment ce que l'observation avoit indiquée.

---

#### SUR L'EAU DU LAC ASPHALTIDE

V. les Mém.  
p. 69.

L'EAU du lac Asphaltide n'étoit connue que par son amertume, qu'on attribuoit mal-à-propos au bitume, & par sa pesanteur. On voit nager sur sa surface le bitume de Judée, qui se précipite au fond de l'eau.

C'est ici la première fois qu'on a pu analyser cette eau, grâce au zèle de M. le Chevalier Tokés, qui en a fait parvenir deux bouteilles à M. Guettard : elle est saturée au point qu'il y avoit au fond de ces bouteilles, du sel cristallisé ; examinée avec l'aréomètre, sa pesanteur est à celle de l'eau distillée comme 5 à 4, pesanteur prodigieuse dont aucune eau salée ne donne d'exemple.

Un quintal de cette eau contient près de 45 livres de sel, dont  $6\frac{1}{2}$  de sel marin ordinaire,  $16\frac{1}{2}$  de sel marin à base calcaire, & 22 de sel marin à base de terre magnésienne. C'est uniquement à ces sels que cette eau & celle de la mer doivent leur amertume. Le bitume qui nage sur l'eau du lac Asphaltide, & qui sort de ses bords ou du fond, ne lui communique aucune qualité.





## CHIMIE.

### *SUR LA NATURE DES ACIDES.*

LES Chimistes entendent par élémens, non les corps V. les Méta.  
simples par leur nature, puisque nous ne pourrons jamais P. 535.  
assurer d'aucun corps, qu'il soit dans cet état de simplicité  
absolue; mais seulement les corps que nous ne pouvons  
décomposer, & qui par conséquent sont pour nous de véri-  
tables élémens. Comme plusieurs de ces substances, indé-  
composables pour nous, nous montrent des indices d'une  
première formation faite par la Nature, ou d'une décompo-  
sition exécutée par des moyens que nous ne pouvons ni  
connoître ni imiter, on les exclut avec raison du nombre  
des élémens; mais on les regarde comme des principes au-  
delà desquels on ne cherche point à pousser l'analyse des  
corps qui en sont composés.

Cependant l'analyse de ces substances elle-même est un  
des objets les plus piquans de la Chimie; elle offre des  
problèmes difficiles à résoudre, & dont l'observation de la  
Nature a prouvé que la solution étoit possible; aussi à chaque  
époque où la Chimie s'enrichit de nouveaux moyens d'ana-  
lyse, plusieurs substances regardées comme des principes, sont  
exclues de cette classe & rentrent dans l'ordre des composés.

Les acides, du moins plusieurs d'entr'eux, sont regardés,  
non comme des élémens; parce que l'on sait il y a long-temps  
qu'ils se forment ou se détruisent, mais comme des principes  
très-simples au-delà desquels l'analyse ne remonte point.

La théorie des airs nous a donné, depuis quelques années, l'espérance de faire un pas de plus : en effet, puisqu'on a trouvé les moyens de rassembler, de distinguer, de soumettre aux expériences les fluides aëriiformes qui s'échappent des corps, il en résulte que celles de ces substances qui se dégagent dans la décomposition d'un acide, peuvent être connues & soumises à l'examen des Chimistes.

L'acide nitreux a été celui sur lequel on ait fait les premiers essais ; en dissolvant dans cet acide certains métaux, il se dégage de l'air, & cet air qu'on a nommé *air nitreux*, mêlé avec l'air vital, c'est-à-dire, précisément avec celui qui se combine avec les métaux pendant leur calcination, reproduit l'acide nitreux. Il paroît donc que l'acide nitreux est composé de ces deux airs, & que le métal le décompose en se combinant avec l'air vital qui en étoit une des parties.

Comme l'acidité est une propriété commune à toutes les espèces d'acides, qui produit dans tous des phénomènes analogues, il est naturel du moment où on ne les regarde plus ni comme des corps simples, ni comme un même acide essentiel différemment modifié, de supposer à tous un principe commun, principe auquel ils doivent leur qualité d'acide, & qu'on peut appeler le principe *acidifiant* ou *origine*.

C'est dans l'une des substances qui forment l'acide nitreux ou qui du moins entrent dans sa composition, que M. Lavoisier cherche ce nouveau principe, & il pense que c'est l'air vital ou plutôt un des principes qui forment l'air vital. Ce principe, combiné avec les matières charbonneuses, produit l'air gazeux ou l'acide aërien ; avec le soufre, il produit l'acide vitriolique ; avec le phosphore, l'acide phosphorique ; avec le sucre, l'acide du sucre.

Les Mémoires donnés par M. Lavoisier dans les Volumes précédens, contiennent une partie des preuves de ces différentes opinions, excepté de celle qui regarde l'acide du sucre : l'examen des circonstances qui accompagnent la formation de cet acide, & sa décomposition sont l'objet particulier de ce Mémoire.

Si

Si on verse de l'acide nitreux sur du sucre, & qu'on distille à feu nu, il passe de l'air nitreux, de l'air inflammable, de l'air gazeux, enfin une portion d'acide nitreux qui n'a pas souffert de décomposition. Et l'acide du sucre reste dans la cornue : ainsi l'air vital qui s'est séparé de l'air nitreux, s'est combiné avec le sucre, & a formé l'acide saccharin ; mais l'air gazeux & l'air inflammable qui ont passé, sont dûs à la décomposition de l'acide du sucre : aussi cet acide poussé à la distillation, se réduit-il en air gazeux & en air inflammable, en laissant un résidu charbonneux. Comme l'air gazeux est, suivant l'opinion de M. Lavoisier, une combinaison du principe acidifiant avec la matière charbonneuse, il résulte de cette dernière analyse, que le sucre n'est qu'un composé de la matière charbonneuse toute formée, & d'un air inflammable.

M. Lavoisier termine ce Mémoire par l'annonce d'une suite d'analyses végétales faites par la même méthode que celle du sucre, & d'après les mêmes principes.

Il ne donne pas, au reste, cette théorie comme rigoureusement prouvée, mais comme un système dont les parties lui paroissent assez bien liées entr'elles, & qui est appuyé sur un assez grand nombre d'expériences, confirmé par un assez grand nombre d'observations pour mériter l'attention & l'examen des Chimistes.

#### SUR LA DÉCOMPOSITION

#### DES SELS VITRIOLIQUES.

M. BAUMÉ a prouvé il y a déjà un grand nombre d'années, que l'acide nitreux décompose le tartre vitriolé & le sel de Glauber, tandis que l'acide vitriolique décompose aussi le nitre prismatique & le nitre quadrangulaire, espèce de paradoxe qui semble détruire ou du moins qui oblige de modifier la doctrine des affinités.

V. les Mém.  
pag. 44 &  
333.

M. Baumé essaya de décomposer les mêmes sels par l'acide  
Hist. 1778, C

8 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE  
marin, mais ce fut sans succès ou du moins avec un succès  
équivoque.

M. Margraff, de son côté, étoit parvenu à décomposer  
par l'acide marin les deux nitres à base d'alkali fixe, &  
même le tartre vitriolé & le sel de Glauber, ce qui faisoit  
du paradoxe observé par M. Baumé, une sorte de règle  
générale.

M. Cornette s'est proposé d'étendre les expériences des  
deux Chimistes qui l'ont précédé, d'éclaircir ce qui paroissoit  
encore incertain, & de concilier ce qui sembloit contradic-  
toire dans leurs résultats, & il a embrassé dans son travail les  
sels à base terreuse ou à base métallique.

Son premier Mémoire n'a pour objet que la décomposition  
par l'acide marin des sels vitrioliques & nitreux à base d'al-  
kali fixe végétal ou minéral, & à base d'alkali volatil.

Il a toujours employé de l'acide marin fumant & très-pur;  
il met dans l'état de siccité les sels qu'il veut décomposer.  
Avec cette précaution, chacun de ces sels a été décomposé,  
mais avec des circonstances différentes: la décomposition est  
plus facile pour les sels ammoniacaux; ceux à base d'alkali  
minéral viennent ensuite, & enfin les sels à base d'alkali  
végétal résistent le plus à la décomposition.

Lorsqu'on verse l'acide marin fumant sur les sels nitreux,  
l'acide nitreux qui se sépare, se mêle avec l'acide marin &  
forme de l'eau régale: cette observation peut être utile dans  
le cas où un Chimiste qui voudroit faire de l'eau régale,  
n'auroit dans son Laboratoire que des sels nitreux & de  
l'acide marin. Le sel ammoniac, produit par la décompo-  
sition du nitre ammoniacal, prend une couleur assez foncée,  
que des dissolutions & des cristallisations répétées ne peuvent  
lui ôter, mais que M. Cornette lui a fait perdre en le subli-  
mant sur de la terre d'alun, qu'il faut avoir la précaution  
de laver avec soin.

Après avoir déterminé l'effet des acides nitreux & marins  
sur les sels vitrioliques à base alkaline, M. Cornette examine  
dans un second Mémoire, l'effet des mêmes acides sur les



sels vitrioliques à base terreuse : ici les phénomènes sont différens.

Aucun des sels vitrioliques à base terreuse n'est décomposé par les autres acides minéraux ; mais les sels nitreux ou marins à base terreuse décomposent les sels vitrioliques à base d'alkali : le sel marin à base terreuse calcaire décompose le vitriol à base de magnésie. Tels sont les principaux phénomènes observés par M. Cornette : ces phénomènes ne détruisent pas la théorie générale des affinités, mais ils détruisent les loix particulières d'affinité qu'on s'étoit trop pressé d'adopter ; ils en indiquent d'autres qu'il faut y substituer. Si des Chimistes d'une grande réputation ont donné trop de généralité aux loix qu'ils ont observées, il ne faut pas en conclure que les faits chimiques ne sont point assujettis à des loix fixes & générales : on s'expose également à se tromper en généralisant trop ou en ne généralisant pas assez. Ce dernier inconvénient est sans doute moindre en lui-même, puisque l'ignorance & le doute valent mieux que des erreurs ; mais la paresse qui fait rester dans l'ignorance & dans le doute, est peut-être aussi nuisible au progrès des Sciences que la hardiesse qui s'égare, mais qui ne s'égare que quelquefois.

Gardons-nous cependant de croire que ces erreurs viennent d'avoir trop combiné les idées, trop raisonné sur les faits : elles viennent le plus souvent d'avoir mal observé, de n'avoir vu les faits ni en assez grand nombre, ni avec assez de détails. C'est la précipitation & l'ignorance, & non l'imagination ou le génie qui nous font commettre des erreurs, car le génie consiste non à généraliser des faits particuliers, mais à saisir dans la suite des faits observés l'ensemble qu'elle présente.

Le travail de M. Cornette sur les sels à base terreuse, le conduisent à rechercher l'origine de la sélénite qui se trouve dans les eaux & celle des carrières de gypse. Comme le mélange du sel marin à base terreuse & du sel de Glauber produit de la sélénite, que ces sels sont dissolubles dans l'eau, & que la sélénite l'est très-peu, il paroît probable à M. Cornette que c'est au mélange d'eaux chargées de ces deux sels qu'est

dûe la présence de la sélénite dans l'eau , & même la formation des carrières de gypse. Il observe en effet que des Eaux qui contiennent du sel de Glauber & du sel marin à base terreuse , peuvent rester limpides quelque temps & sans que la sélénite s'y forme : elle se précipite ensuite par l'évaporation & en plus grande quantité qu'une masse égale d'eau n'eût pu tenir en dissolution de sélénite toute formée. Il est donc possible que des Eaux minérales qui donnent de la sélénite par l'analyse, ne renferment réellement, du moins lorsqu'elles n'ont pas été gardées long - temps , que du sel marin à base terreuse & du sel de Glauber : remarque qui est importante pour l'usage de ces Eaux dans la Médecine.

## S U R

*DIFFÉRENTES COMBINAISONS DU FER.*

V. les Mém. **R**IEN n'est plus facile dans les Sciences fondées sur l'expérience, que de multiplier les faits particuliers; mais ces faits ne sont dignes d'attention que lorsqu'ils servent à conduire à des vérités générales, ou que présentant , au contraire, des singularités nouvelles & imprévues, ils deviennent un objet de recherches. Les faits observés par M. de Laffone , & dont il rend compte dans ce Mémoire, sont de cette dernière classe.

Si on mêle de la limaille de fer & de la crème de tartre, qu'on imbibe ce mélange d'eau & qu'on lui fasse subir une longue digestion, il se fait une combinaison dont le résultat est dissoluble dans l'eau froide; si on mêle la décoction de noix de galle à cette dissolution, il se forme de l'encre; mais l'alkali phlogistique n'en précipite point de bleu de Prusse: cependant il suffit de faire bouillir la liqueur pour lui donner cette propriété.

Quelle est la cause de ce phénomène? On n'ajoute rien à la liqueur; elle est claire avant comme après l'ébullition; elle contient, avant comme après, du fer & de la crème

de tartre ; quel changement a-t-elle donc subi ? Si le fer étoit dissous avant l'ébullition , pourquoi n'est-il pas précipité par l'alkali ? S'il n'étoit pas dissous , comment la liqueur où il est suspendu , reste-t-elle transparente ? Nous ne suivrons pas M. de Laffone dans la savante explication qu'il donne de ce phénomène.

M. de Laffone conclut de cette observation , que les boules de fer produites par la digestion , ne sont point du tout identiques avec celles qui se forment à l'aide de l'ébullition , & il conseille de préférer la première préparation dans l'usage de la Médecine.

Il remarque ensuite , que puisque la noix de galle précipite en noir le fer dissous par la crème de tartre , on peut se procurer une teinture noire sans employer le vitriol , procédé qui peut être d'un grand avantage , puisque les teintures noires formées avec le vitriol martial , attaquent jusqu'à un certain point les substances auxquelles on les applique.

Le second fait qu'a observé M. de Laffone n'est pas moins remarquable. On sait que le fer se dissout dans l'alkali , mais si l'on emploie l'alkali fixe , la dissolution n'a lieu que lorsque ce sel est dans l'état de causticité ; si au contraire on emploie l'alkali volatil , il n'agit que lorsque combiné avec l'air gazeux , il a perdu sa causticité ; & ce qui est encore une singularité , la dissolution du fer par l'alkali volatil ne se fait qu'avec un dégagement d'air considérable , & par conséquent c'est avec l'alkali caustique , avec l'alkali qui n'auroit point agi sur le fer , quoique présenté dans son plus grand état de pureté & d'activité , que cependant le fer se trouve réellement combiné après la dissolution.

### *SUR L'ART DES ESSAIS D'OR.*

L'ART des Essais est un de ceux où les hommes ont porté le plus loin l'exactitude , & où la pratique peut le moins méconnoître ce qu'elle doit à la théorie. Mais c'est sur-tout

V. les Mém.  
P. 505.

dans ces derniers temps que cet Art a fait le plus de progrès, & on en a l'obligation au zèle de M. Tillet, pour un travail qu'il a regardé comme un devoir, & auquel il a sacrifié un temps qu'il eût pu employer à des travaux plus brillans, aussi utiles peut-être, mais sur lesquels le devoir n'eût pas déterminé son choix. L'art des essais se réduit à deux opérations ; l'une est la séparation des métaux imparfaits, unis à l'or & à l'argent ; l'autre la séparation de l'or de l'argent.

La première se fait par la coupellation : M. Tillet a perfectionné cette méthode dans plusieurs Mémoires insérés parmi ceux de l'Académie, au point de ne plus rien laisser à désirer. En effet, dans toute opération de ce genre, il y a deux objets à considérer ; l'un est l'exactitude physique qui ne s'arrête qu'à des quantités imperceptibles pour nos sens ou pour nos instrumens, & qui n'a de bornes que celle de leur perfectibilité ; l'autre est l'exactitude de l'art-pratique, qui a pour limite le point où une exactitude plus grande devient plus coûteuse qu'elle n'est utile. Or M. Tillet a donné les moyens de s'assurer, malgré la petite portion d'argent, toujours ou presque toujours contenue dans le plomb, malgré la partie de fin entraînée dans les coupelles, de la quantité de fin que contenoit une matière soumise à l'essai, avec une exactitude dont l'erreur échapperoit aux instrumens connus, & qui pourroit être poussée plus loin, si ces instrumens se perfectionnoient encore ; & il a prouvé en même temps comment, par des moyens aussi sûrs que simples, on peut parvenir à une exactitude aussi grande que l'intérêt public ou celui des particuliers peuvent l'exiger, aussi grande qu'on peut l'attendre de ceux à qui ces opérations sont confiées.

La seconde opération est celle du départ, & elle consiste à séparer l'or de l'argent, en mettant dans plusieurs eaux-fortes, bien purgées d'eau régale, & prises successivement à différens degrés de concentration, le métal qu'on veut essayer, & auquel on a soin d'ajouter de l'argent, jusqu'à ce que la quantité de ce métal y soit à peu-près double de celle de l'or. Cette opération avoit déjà été l'objet des recherches de M. Tillet, &

Ce ne sont point-là tous les avantages de la nouvelle méthode, elle en a encore un bien précieux; c'est qu'en ayant un certain nombre d'étuis numérotés, on peut y enfermer tel nombre de cornets d'essai qu'on voudra, & faire l'opération à la fois dans un même matras. Cet avantage est très-important pour les essais d'orfèvrerie : on ne peut les faire en grand nombre par la méthode ordinaire que dans des matras séparés, devant chacun desquels il faut placer le numéro de l'essai & le creuset destiné au recuit, & avoir à chaque mouvement, à chaque opération l'attention de faire suivre ces trois objets; assujettissement très-pénible, & qui ne met pas encore à l'abri des distractions dont il est impossible de se défendre, & difficile de s'apercevoir dans des opérations qu'une longue habitude rend pour ainsi dire machinales.

Cette méthode peut être regardée comme le complément de l'art des Essais, & ce dernier travail de M. Tillet semble ne plus rien laisser à désirer pour l'exactitude pratique de cet Art : l'on voit en même temps comment en multipliant les cornets d'épreuves, on peut porter cette même méthode à l'exactitude physique la plus complète.

**RAPPORT FAIT À L'ACADÉMIE**  
**SUR L'OR QU'ON PEUT RETIRER DES TERRES**  
**OU DES CENDRES VÉGÉTALES.**

PLUSIEURS Chimistes du dernier siècle avoient observé V. les Mém.  
que la plupart des terres qui se trouvent à la surface du globe, & même les végétaux, contiennent une petite quantité d'or. P. 548.

M. Sage a lu à l'Académie, le 23 Mai 1778, un Mémoire qui renfermoit de nouvelles expériences sur cet objet, desquelles il résulloit que la terre végétale de jardin calcinée, lui avoit donné 2 onces 44 grains d'or par quintal, & le terreau calciné 1 gros 56 grains. Nous nous bornons à citer ici les deux points extrêmes des produits que différentes terres

*Hist. 1778.*

D

calcinées ou les cendres de divers végétaux lui avoient donnés. Cette conclusion devoit étonner; il ne s'agissoit plus d'atomes d'or répandus par-tout sur la terre, phénomène qui ne prouve que la divisibilité prodigieuse & l'indestructibilité de ce métal: il s'agissoit d'une quantité assez considérable pour que l'on pût exploiter comme mines d'or une grande partie des terres de la surface du globe: d'ailleurs, une quantité d'or aussi grande ne pouvoit plus être regardée comme accidentelle, il falloit que ce métal fût une partie très-sensible de toutes les terres, ou le produit de la végétation, conséquence aussi importante dans la Physique, que la première pouvoit l'être dans l'ordre des sociétés. En effet, de quelle utilité ne feroit pas pour les Arts, si jamais il pouvoit devenir très-commun, un métal inaltérable, ductile, de la plus parfaite homogénéité, capable de se combiner avec les métaux plus durs, de leur communiquer une partie de ses avantages, & de faire avec eux un composé solide & élastique. L'or, en cessant d'être le plus précieux des métaux, deviendrait le plus utile.

M. le Comte de Lauraguais répéta les expériences de M. Sage, & trouva des résultats fort différens; fortifié par le suffrage de deux savans Chimistes, dont les expériences s'accordèrent avec les siennes, il en fit part à l'Académie par une lettre du 8 Août 1778, & la pria de nommer des Commissaires pour constater un fait d'autant plus important, que l'espérance de trouver de l'or pouvoit frapper fortement les têtes, & causer la ruine de ceux qui s'y livreroient inconsidérément.

L'Académie chargea la classe de Chimie de vérifier les faits contradictoires avancés par M. le Comte de Lauraguais & par M. Sage; & c'est le Rapport qui lui a été fait par cette Classe, le 21 Août 1779, que vu l'importance de l'objet, elle a cru devoir publier dans ce Volume.

Il résulte des expériences que les Commissaires ont faites en grand nombre & avec beaucoup de soin, 1.<sup>o</sup> que, si de la quantité de fin que donne le minium employé à retirer des

cendres ou des terres l'or ou l'argent qu'elles peuvent contenir, on retranche la quantité de fin que le minium seul contenoit avant l'opération, & qu'on détermine par des expériences correspondantes; la différence de ces quantités, c'est-à-dire la quantité d'or & d'argent contenu dans les cendres ou les terres est très-petite, tandis que la quantité totale de fin que donne le minium uni aux cendres est assez considérable, sans cependant approcher de celle que les expériences de M. Sage lui ont donnée.

2.<sup>o</sup> Que ce bouton de fin est de l'argent presque pur; en sorte que la partie de la petite minicule d'or retirée de ces expériences, qu'il est possible de regarder comme extraite des cendres ou des terres, est inappréciable, & se réduit à quelques fractions de grain par quintal.

On peut se tromper sur la quantité de fin contenue dans les terres, si l'on n'a pas la précaution de donner au minium, qu'on revivifie seul, le même degré de feu qu'au minium traité avec les terres. Cette remarque, qu'ont fait les Commissaires, est de la plus grande importance dans les opérations docimastiques.

On voit aussi, d'après tout ce que nous venons de dire, combien il est nécessaire de n'employer dans les opérations que du minium dont on est sûr, ou bien de faire à chaque fois des expériences correspondantes pour déterminer la partie de fin qui se trouve dans le minium. C'est au défaut de cette précaution, que les Commissaires de l'Académie ont cru devoir attribuer la différence entre les résultats de M. Sage & ceux de leurs expériences, dont on ne peut révoquer en doute ni la certitude ni la précision. Au reste, cette précaution n'est qu'une application de cette règle très-générale de la Chimie qui prescrit, pour bien juger des produits d'un mélange qu'on soumet à l'action du feu, & des phénomènes que présentent les expériences, de s'assurer auparavant de l'effet que le même degré de feu auroit produit séparément sur les substances dont le mélange est composé.







## ASTRONOMIE.

### *SUITE DES MÉTHODES ANALYTIQUES*

*Pour résoudre les Problèmes d'Astronomie.*

V. les Mém. **M.** DU SÉJOUR avoit appliqué jusqu'ici ses Méthodes  
P. 73. analytiques aux Problèmes qui ont pour objet la détermination des mouvemens célestes. Il les emploie dans ce treizième Mémoire, à résoudre des Problèmes d'un autre genre, ceux qui regardent la figure de la Terre, considérée astronomiquement.

On s'est assuré que la Terre n'est pas une sphère parfaite; on fait même qu'elle est un sphéroïde aplati vers les pôles; enfin il paroît qu'on peut la regarder comme un solide formé par la révolution d'une ellipse. C'est sous ce point de vue que M. du Séjour la considère, après avoir montré que les formules générales qu'il emploie, peuvent s'étendre à toute autre hypothèse, c'est-à-dire, à la figure, quelle qu'elle puisse être, que des observations plus multipliées doivent faire connoître un jour, pourvu que cette figure soit peu différente d'une sphère.

Il donne d'abord l'équation de la perpendiculaire à une méridienne donnée, en regardant cette perpendiculaire comme celle de toutes les lignes tracées sur la sphère, & passant par deux points donnés, qui est la plus courte: la direction de cette ligne à un point donné, tient dans ce cas lieu de deux points, & détermine les arbitraires de l'équation intégrale. Il prouve ensuite que cette ligne la plus courte, assujettie à cette condition, est la perpendiculaire à la Méridienne. Enfin il donne une méthode directe & indépendante de cette propriété pour trouver l'équation de la même courbe.

M. du Séjour compare ensuite le sphéroïde à la sphère inscrite & qui a le petit axe du sphéroïde pour rayon ; il exprime la latitude, la longitude d'un lieu, la distance en toises à un Méridien donné, distance prise sur la perpendiculaire, la distance en toises de point où cette perpendiculaire coupe le Méridien à un point donné sur ce Méridien, en fonctions des quantités correspondantes prises sur la sphère inscrite, quantités qu'il appelle *latitude, longitude, &c. corrigées*.

Ces considérations le conduisent à résoudre d'une manière très-simple ce Problème général. Deux de ces quatre choses étant données, la longitude, la latitude, la distance en toises d'un lieu donné sur la perpendiculaire au Méridien, & la distance en toises du point où cette perpendiculaire coupe le Méridien à un point sur ce Méridien dont la latitude est connue ; trouver les deux autres. D'après la solution de ce Problème général, on pourra toujours comparer les mesures géodésiques aux Observations astronomiques ; corriger ou vérifier les unes par les autres ; & dans le cas où elles ne s'accorderoient pas avec l'hypothèse qu'on auroit choisie pour le rapport des axes de la Terre, déterminer celui qu'il faudroit y substituer.

Comme la solution de ces Problèmes n'est pas toujours rigoureuse, M. du Séjour, par un moyen dont nous avons déjà rendu compte en parlant de ses autres Mémoires, détermine l'erreur de la méthode, qui se trouve plus petite que l'erreur des instrumens ou des mesures, & le moyen d'approcher davantage des vraies valeurs, si plus de perfection dans les instrumens ou dans la manière de mesurer permettent un jour d'exiger une plus grande précision. Il donne aussi des Tables au moyen desquelles, par une méthode qu'il indique, la solution de chaque Problème particulier devient très-simple, & n'exige que des calculs peu compliqués.

Ainsi ce Mémoire est une théorie analytique très-complète de la figure de la Terre, considérée astronomiquement ; & c'est une nouvelle preuve de la sûreté & en même temps de la facilité des Méthodes analytiques pour la solution des Questions astronomiques.

*SUR L'OBLIQUITÉ DE L'ÉCLIPTIQUE.*

V. les Mém.  
p. 484.

LES progrès de l'Astronomie dépendent du temps, de la perfection des méthodes mathématiques & de celle des instrumens. Lorsque la construction des instrumens fait des progrès rapides, il arrive souvent que des observations faites avec une grande exactitude pendant un petit nombre d'années l'emportent sur plusieurs siècles d'observations inexactes; d'ailleurs les résultats qu'on ne doit qu'au temps, ne peuvent être utiles que pour les phénomènes dont la marche est uniforme; si elle ne l'est pas, ces résultats ne donnent la loi des phénomènes qu'à peu-près, sans tenir compte de leurs inégalités; ainsi la longue durée des observations ne remédie qu'en partie au défaut d'exactitude.

M. Cassini, en appliquant ces principes à la détermination de l'obliquité de l'écliptique & de ses variations, a préféré d'employer des observations faites depuis 1739 jusqu'en 1778, avec des instrumens exacts & qu'il a vérifiés, plutôt qu'une suite d'observations plus étendues, mais dont l'exactitude étoit moindre. Celles dont il se sert sont, 1.<sup>o</sup> des observations immédiates de la hauteur méridienne du Soleil; 2.<sup>o</sup> des observations de la distance du Soleil au solstice d'été à l'étoile  $\beta$  d'Hercule, qu'on peut regarder comme n'ayant point de mouvement propre; 3.<sup>o</sup> des observations de la distance du Soleil à *Arcturus*, Étoile qui a un mouvement propre, mais assez bien connu pour qu'on puisse corriger les observations d'après cet élément.

M. Cassini, après avoir dressé une Table des observations de la première classe, où il a soin de marquer toutes les circonstances de chacune, y joint le nombre des Observateurs qui l'ont faite, & la différence entre leurs résultats; il choisit ensuite parmi ces observations celles où le nombre des secondes qui marque la plus grande distance entre les résultats, est plus petit que celui des Observateurs, il en forme une Table à part; & c'est d'après cette Table qu'il donne son résultat.

M. Cassini n'a pu faire le même choix entre les observations de l'étoile  $\beta$  & celles d'*Arcturus*, parce que ces observations étoient en trop petit nombre.

Il termine son Mémoire par une Table qui contient les résultats comparés de ces trois espèces d'observations. L'obliquité vraie de l'écliptique en 1778, est fixée ici à  $23^{\text{d}} 27' 55''{,}2$ , d'après un résultat moyen entre ceux de huit Observateurs, la différence entre les deux résultats extrêmes étant de  $4''{,}2$ .

Le changement de l'obliquité de l'écliptique le plus probable qu'on puisse déduire de la Table de M. Cassini, est une diminution d'environ 60 secondes par siècle.

Toutes les observations indiquent que cette diminution a lieu, & paroissent prouver qu'elle n'est pas uniforme. Les observations d'*Arcturus* la donnent de 31 secondes en trente-quatre ans, depuis 1743 jusqu'en 1778, c'est-à-dire 88 minutes par siècle; les observations correspondantes du solstice d'été la donnent de 83; les observations de l'étoile  $\beta$  d'Hercule & celle du solstice d'été la donnent de 14 minutes pour vingt-trois ans, depuis 1755 jusqu'en 1778, c'est-à-dire 60 secondes par siècle; & cette dernière détermination paroît devoir mériter la préférence, soit à cause de l'accord des résultats de ces observations entr'eux, & avec le résultat que donnent les observations de  $\beta$  d'Hercule, depuis 1689 jusqu'en 1778, & qui n'en diffère que d'une seconde, soit parce qu'on est en droit de supposer en général aux observations les plus récentes une exactitude plus grande; d'ailleurs cette détermination s'approche davantage de la théorie qui donne pour l'époque actuelle une diminution de 56 secondes en cent ans, d'après la savante méthode que M. de la Grange a donnée pour calculer les mouvemens des orbites des Planètes, dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1774.

Ce Mémoire de M. Cassini est tiré d'un grand Ouvrage qu'il a entrepris, & qui doit renfermer l'histoire, le calcul & la discussion des Observations astronomiques faites depuis la fondation de l'Observatoire: Cet Ouvrage ne peut être terminé que dans plusieurs années, & M. Cassini se propose

32 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE  
d'en extraire les résultats les plus intéressans, & de les présenter au Public dans nos Mémoires.

---

### *SUR LES TACHES DU SOLEIL.*

V. les Mém. P. 393. **C**E Mémoire est la suite de celui que M. de la Lande a donné en 1776, sur la nature des Taches du Soleil & l'usage des observations de ces taches pour déterminer la position de l'axe de cet Astre & la durée de sa rotation. La première partie renferme des détails historiques sur les premiers Astronomes qui ont observé les taches du Soleil. Il paroît, d'après un passage de Fabricius, cité par M. de la Lande, que cet Auteur vit les taches du Soleil en 1611 : c'est aussi dans cette année que Galilée & Scheiner les aperçurent ; mais Scheiner se trompa sur la cause de ces apparences ; Fabricius n'en eut qu'une idée vague ; Galilée seul démêla ce qu'elles étoient, & indiqua comment on pourroit les employer à déterminer la durée de la rotation du Soleil & la position de son axe.

Jordanus Brunus, & ensuite Képler, avoient soupçonné que le Soleil avoit un mouvement de rotation ; mais on ne parloit alors qu'avec précaution de tous les phénomènes qui tenoient au système du monde, & sur-tout aux vérités découvertes par Copernic & proscrites dans les Écoles. Scheiner n'osa se nommer en parlant des taches du Soleil, qu'il regardoit comme des Planètes ; Galilée garda quelque temps le secret de leur découverte entre lui & quelques-uns de ses amis. Il est certain que le sort du Dominicain Jordanus Brunus, brûlé à Rome en 1600, n'étoit pas propre à rassurer ceux qui renouveloient une de ses opinions, même parmi celles qui auroient dû paroître les plus indifférentes.

En effet on regardoit alors comme dangereux tout ce qui contredisoit la doctrine reçue en Philosophie, tout ce qui attaquoit les opinions qui étoient ou qu'on croyoit celles d'Aristote : on s'imaginait que les opinions nouvelles en physique pouvoient troubler la paix, parce qu'en blessant la vanité  
de

de quelques Docteurs & les prétentions de quelques ambitieux, elles excitoient leurs clameurs, dont une longue expérience avoit, en d'autres genres à la vérité, appris à redouter les funestes conséquences.

Dans la suite de son Mémoire, M. de la Lande rapporte & discute un grand nombre d'observations des taches du Soleil, les unes antérieures, les autres postérieures à son premier Mémoire; plusieurs de ces observations s'accordent avec la période de 25 jours & 10 heures qu'il a fixée pour la révolution du Soleil sur son axe; quelques autres paroissent s'en écarter. M. de la Lande attribue cette différence aux changemens de position ou de figure de ces taches, changemens qui font à la vérité une objection contre son opinion sur les causes des taches du Soleil; mais il n'a garde de la dissimuler: il rapporte également ce qui, dans les observations dont il rend compte, paroît ou favorable ou contraire à l'hypothèse de M. Wilson.

Il ne faut qu'un petit nombre d'observations d'une tache pour déterminer la position de l'axe du Soleil, & la durée de sa rotation, ainsi l'on peut être étonné qu'après tant d'observations & de recherches, il reste quelque incertitude; mais il faut remarquer que le diamètre du Soleil n'a que 30 minutes environ, & que c'est sur cet espace que nous devons juger des variations d'angles qui ont 180 degrés d'étendue.

Quand cette question sera décidée, il en restera d'autres dont la solution est réservée aux siècles suivans. La position de l'axe du Soleil est-elle constante; & si elle varie, quelles sont les loix de ses mouvemens?

## OBSERVATIONS DE L'ÉCLIPSE

DU 24 JUIN.

IL n'a pas été possible de voir le commencement de cette Éclipse.

M. Messier a déterminé les distances des cornes dans plusieurs instans avec un micromètre; il a également observé

V. les Mém.  
P. 36.

Hist. 1778.

E

### 36 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

Si le fil, au lieu de s'envelopper autour d'un cylindre, est tiré verticalement par un poids, on a une autre équation, qui, dans le cas des oscillations infiniment petites, retombe encore dans l'équation de *Ricati*.

Enfin si au lieu de considérer un corps pesant, on suppose que le corps décrit un arc-de-cercle sur un plan, sans éprouver de frottement, en vertu d'une impulsion une fois donnée; alors, dans les mêmes circonstances, on n'est plus conduit à l'équation de *Ricati*, mais à des équations intégrables, du moins par les quadratures.

### SUR UNE NOUVELLE BOUSSOLE.

V. les Mém.  
p. 66.

CETTE Boussole, destinée à former une suite d'observations précises de la déclinaison de l'Aiguille aimantée, est formée par un châssis, sur lequel on place une lunette qui fait avec l'axe de l'aiguille (lorsque ses deux extrémités répondent au point zéro de chacun des limbes de la boussole) un angle à peu-près égal à celui que la direction de l'aiguille aimantée, qu'on suppose à peu-près connue, fait avec celle d'une mire éloignée, dont on a déterminé la position : on observe cette mire avec la lunette, dont le centre est marqué par l'intersection de deux fils. Par ce moyen, le nombre de degrés, dont l'aiguille s'éloigne de ce point de zéro, est la quantité qu'il faut ajouter ou retrancher de l'angle que forme la lunette avec la ligne qui passe par les deux points zéro, pour avoir la vraie déclinaison.

L'aiguille est suspendue sur un pivot, elle a une chape d'agate, & est percée d'un trou pour la recevoir : M. le Monnier a observé, que malgré ce trou elle conservoit assez de force magnétique, puisqu'elle fait encore ses oscillations en 10 secondes & demie.

On n'a employé dans la construction de tout l'appareil, que du bois, du cuivre pur ou de l'argent.

L'aiguille a 15 pouces de long, & pèse 146 grains.



Par ce moyen, on peut s'assurer, avec une très-grande exactitude, de la direction de la lunette, & par conséquent, regardant comme nulle l'erreur pour la détermination du vrai Nord, on connoîtra la déclinaison de l'aiguille avec toute l'exactitude qu'on peut attendre d'un instrument de 7 pouces  $\frac{1}{2}$  de rayon, dont on observe les divisions avec une loupe.





## HYDRODYNAMIQUE.

### *NOUVELLES EXPÉRIENCES SUR LA RÉSISTANCE DES FLUIDES.*

V. les Mém.  
p. 353. **L**ES expériences que M. l'abbé Bossut a faites en 1775, ont confirmé les loix connues de la résistance directe des fluides, & celles qu'il a tentées dans le même temps pour connoître la loi de la résistance qu'éprouve un plan mu sous un angle donné, avoient suffi, quoiqu'en petit nombre, pour lui montrer que la loi donnée par la théorie s'écarte dans ce cas de l'expérience. Son but, dans ces nouvelles recherches, a été de déterminer quelle loi il falloit substituer à celle qui établit, que dans les chocs indirects les résistances sont en raison des carrés des sinus de l'angle d'inclinaison.

Pour remplir cet objet, il a fait une suite d'expériences avec des bateaux dont les proues étoient formées par deux plans, faisant entr'eux différens angles depuis 12 degrés jusqu'à 180; la différence entre ces angles étoit constante & de 12 degrés. On fait que lorsqu'il s'agit de chercher les loix des phénomènes, d'après des expériences, il est utile, pour faciliter le calcul, de faire en sorte que les quantités qu'on doit regarder comme connues soient en progression arithmétique.

En comparant les résistances données par ces expériences avec celles que donneroit la loi supposée, on trouve que la différence est très-grande : la résistance que donne l'expérience est constamment plus forte, & dans un rapport d'autant plus grand, que l'angle d'incidence est plus petit; en sorte que

pour l'angle de 12 degrés l'expérience indique une résistance trente fois plus forte qu'on n'auroit dû la supposer d'après la théorie. Ce résultat a fait naître à M. l'abbé Bossut l'idée de supposer cette différence égale à une puissance du complément de l'angle d'incidence, multipliée par un coefficient constant, & cette hypothèse a réussi : il a trouvé qu'on satisfaisoit aux expériences en supposant le rapport de la résistance directe à la résistance sous un angle donné, exprimé par deux termes, l'un proportionnel au carré du sinus de cet angle, l'autre proportionnel à la puissance  $3\frac{1}{4}$  de son complément. Cette expression est assez exacte, mais elle commence à s'écarter très-sensiblement de l'expérience, lorsque l'angle approche de 12 degrés, en sorte que pour que la loi convienne exactement à de petits angles même d'environ 12. degrés, il faudroit y ajouter un troisième terme.

Après avoir déterminé la loi des résistances pour des plans mus dans un fluide, suivant différens angles, il étoit essentiel d'examiner si cette loi est d'accord avec l'expérience pour le mouvement des surfaces courbes. Mais il résulte des expériences faites par M. l'abbé Bossut, que les résistances sont moindres pour les surfaces courbes que ne les donneroit la loi établie, d'après la théorie ordinaire ; conséquence que M. le Chevalier de Borda avoit tirée, il y a déjà plusieurs années, de ses propres expériences : ainsi, comme les nouvelles expériences prouvent que la résistance est plus grande pour les mouvemens indirects que cette même loi ne la donne, il en résulte, que quand même on connoîtroit avec la plus grande précision, la loi pour un plan mu, suivant un angle quelconque, cette loi ne pourroit servir à calculer la résistance d'une surface courbe.

M. l'abbé Bossut examine aussi la résistance directe qu'éprouve une surface plane, dont une partie est recouverte par une proue angulaire, & il trouve cette résistance plus grande qu'elle ne le seroit, en supposant que la partie qui reçoit le choc direct & la proue angulaire, éprouvent chacune la résistance qu'elles auroient éprouvée, si elles

avoient été séparées, & en calculant cette résistance, d'après les expériences précédentes.

Enfin, l'Auteur se propose les deux questions suivantes ; la longueur des bateaux parallépipèdes influe-t-elle sur la vitesse du sillage ? Une poupe triangulaire ajoutée à un bateau augmente-t-elle sa vitesse ? Et il trouve 1.<sup>o</sup> que la résistance varie avec le rapport entre la largeur & la longueur du parallépipède, qu'il y a une valeur de ce rapport pour lequel la résistance est un *minimum*, & que ce *minimum* a lieu à peu-près, lorsque la longueur est triple de la largeur, mais que l'on peut prendre une longueur beaucoup plus grande, sans augmenter beaucoup la résistance, au lieu qu'elle augmente rapidement si on diminue la longueur.

L'addition d'une proue triangulaire diminue également la résistance.

Ces trois dernières conclusions prouvent, ainsi que les précédentes, que la résistance qu'éprouve une figure quelconque, formée de lignes, ne dépend point uniquement de celle qu'éprouve chaque ligne en particulier, mais aussi de la situation de ces lignes entr'elles : on peut appliquer aux courbes les mêmes principes, ce qui rend les loix de la résistance pour des figures dissemblables très-difficiles à connoître, tandis que pour les figures semblables, elles sont d'accord avec la théorie ordinaire. Il reste donc à faire une nouvelle suite d'expériences beaucoup plus délicates que les précédentes, & qu'il sera plus difficile de disposer de manière à pouvoir conduire à une loi générale ; mais s'il est quelqu'un de qui on puisse attendre la découverte de cette loi, c'est du Géomètre qui s'est déjà occupé de ces recherches avec tant de suite & de succès.

### *SUR LA RÉSISTANCE DES FLUIDES.*

V. les Mém. P. 597. **N**ous venons de voir que la résistance des fluides n'est pas telle que la donne la théorie lorsque la direction du mouvement

mouvement n'est pas perpendiculaire à la surface. M. Euler, dont l'âge, les infirmités & les longs travaux n'ont pu ni affaiblir le génie, ni ralentir l'activité, s'est occupé des moyens de concilier la théorie avec l'expérience, & celui qu'il emploie dans ce Mémoire, est de faire entrer dans le calcul de la résistance le frottement que les côtés de la proue éprouvent dans le fluide. Il donne l'expression de la résistance dans ce cas, pour une proue d'une figure quelconque, & applique la formule au cas particulier d'une proue triangulaire ou pyramidale.

La loi de la résistance pour une proue triangulaire est, dans ce cas, composée de quatre termes, l'un proportionnel au carré du sinus de l'angle d'incidence, & indépendante du frottement; des trois autres, le premier est proportionnel au produit du sinus du même angle par son cosinus; le deuxième au cosinus; le troisième au sinus: ces trois derniers termes sont multipliés par une quantité qui exprime le rapport du frottement à la pression. Il reste à déterminer ce rapport par l'expérience, & M. Euler en donne un moyen ingénieux & susceptible d'une assez grande précision.

Le frottement n'est peut-être pas ici la seule cause de la différence que l'on trouve entre les résultats de la théorie & ceux de l'expérience: une partie de cette différence peut tenir à la vitesse avec laquelle le fluide en mouvement coule le long du corps. Cette vitesse peut être différente le long des parois du corps de ce qu'elle est dans le fluide qui en est à une certaine distance, & elle peut dépendre des angles successifs que forment entr'eux les côtés du corps, angles qui, comme nous l'avons vu par les expériences de M. l'abbé Bossut, changent très-sensiblement la résistance, & doivent par conséquent entrer dans la loi qui la détermine. C'est à la recherche de cette vitesse le long des parois du corps, qu'il faudroit chercher maintenant à appliquer le calcul & l'expérience.





## A N A L Y S E.

*THÉORÈMES ANALYTIQUES.*

V. les Mém.  
p. 603 &  
606.

CES deux Théorèmes ont été proposés & démontrés par M. Euler, l'un donne pour une valeur déterminée, l'expression de l'intégrale de plusieurs fonctions dont on ne peut connoître l'intégrale pour une valeur quelconque. Quoiqu'il ne soit ici question que de deux fonctions, il est aisé de voir que ce ne sont que des exemples d'une méthode plus générale qui embrasse une classe de fonctions très-étendue. Le second théorème donne en un seul produit de facteurs, l'expression de la somme des carrés des coefficients de la formule du binome élevé à une puissance quelconque. La démonstration de M. Euler est beaucoup plus générale que l'énoncé du théorème, puisqu'elle donne une expression semblable pour la somme des coefficients d'une puissance du binome, multipliée par les coefficients successifs d'une autre puissance quelconque.

On a joint à ce Mémoire une autre démonstration des mêmes Théorèmes, trouvée avant de connoître celle de M. Euler : l'Auteur de cette démonstration a espéré qu'on ne le soupçonneroit pas de la présomption d'avoir voulu comparer son travail à celui d'un grand homme, dont il s'honore d'être l'admirateur & le disciple.

*MÉTHODE DE CALCUL INTÉGRAL.*

P. 442.

CETTE Méthode, qui s'étend à tous les ordres d'équations différentielles, est développée ici pour le second & pour le

troisième ordres. M. Cousin réduit la solution de l'équation différentielle proposée à celle d'une équation aux différences partielles, ce qui paroît d'abord devoir compliquer les Problèmes; mais il suffit d'avoir une solution de cette nouvelle équation qui renferme une arbitraire, pour connoître une des intégrales de la proposée; & c'est moins la solution générale que la recherche de différens cas d'intégrabilité, qui est l'objet de l'Auteur dans ce Mémoire: d'ailleurs dans cette partie de l'Analyse, on a vu plus d'une fois résoudre par des méthodes qui semblent très-indirectes, des questions qui n'auroient pu l'être avec les méthodes par lesquelles on devoit naturellement en chercher la solution. Celle que donne ici M. Cousin peut encore conduire à un moyen nouveau de résoudre, d'une manière approchée, les équations différentielles: moyen que l'Auteur se propose de développer dans un autre Mémoire.

### *SUR LES PROBABILITÉS.*

TOUTES les questions du Calcul des Probabilités peuvent se réduire à une seule hypothèse, à celle d'une certaine quantité de boules de différentes couleurs mêlées ensemble, dont on suppose qu'on tire au hasard différentes boules dans un certain ordre ou dans certaines proportions. Si on suppose connu le nombre de boules de chaque espèce, on a le calcul ordinaire des probabilités tel que les Géomètres du dernier siècle l'ont considéré: mais si l'on suppose le nombre de boules de chaque espèce inconnu, & que par le nombre de boules de chaque espèce qu'on a tirées, on veuille juger ou de la proportion du nombre de ces boules, ou de la probabilité de les tirer dans la suite suivant certaines loix, on a une nouvelle classe de problèmes. Ces questions dont il paroît que M.<sup>r</sup> Bernoulli & Moivre avoient eu l'idée, ont été examinées depuis par M.<sup>r</sup> Bayes & Price; mais ils se sont bornés à exposer les principes qui peuvent servir à les résoudre. M. de la Place les a considérées avec plus d'étendue, & il y a appliqué

V. les Mém.  
p. 227.



#### 44 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

*l'analyse.* On peut supposer le nombre des boules fini ou infini; s'il est fini, les questions dépendent du calcul intégral aux différences finies; s'il est infini, on n'a besoin que du calcul intégral proprement dit. Le cas du nombre infini est celui qui a lieu lorsqu'on applique les questions aux évènements naturels: en effet, il est aisé de voir qu'alors elles embrassent l'immensité des temps, & que le nombre des combinaisons est infini.

Supposons qu'on ait tiré un certain nombre de boules noires & un certain nombre de boules blanches, on peut demander combien y a-t-il à parier que dans un nombre de coups donné, on tirera plus de boules blanches que de boules noires, ou en général quelle sera la probabilité des différens évènements qu'on peut imaginer devoir arriver? Si on applique ensuite ce que la théorie apprend sur ces questions abstraites à des évènements naturels, comme à la proportion entre le nombre des naissances des garçons & des filles: on partira d'abord d'un fait; par exemple, qu'il est prouvé, par une longue suite d'observations, qu'il naît à Paris un plus grand nombre de garçons que de filles & dans une certaine proportion. On peut demander alors quelle est la probabilité que, dans l'avenir, le nombre des garçons surpassera celui des filles, & cette probabilité est la même que celle de l'existence d'une cause déterminante à laquelle il faut attribuer ce phénomène, dont par conséquent il est raisonnable de rechercher les causes physiques? On peut demander ensuite avec quel avantage on peut parier que, dans un nombre de naissances donné qui exprime celui des naissances d'une année, par exemple, la loi commune sera observée, combien il faudra d'années pour parier à jeu égal, qu'il arrivera une fois que la même loi ne soit pas observée? Enfin si l'on a pour deux lieux différens, un nombre différent d'expériences & un rapport différent entre le nombre des naissances de garçons & de filles, on peut demander quelle est la probabilité que la loi sera observée dans un de ces lieux plutôt que dans l'autre? Ainsi M. de la Place trouve qu'il y a une probabilité très-grande & presque équivalente à une certitude morale, que l'excès

du nombre des naissances des garçons a une cause physique pour Paris ; qu'il y a 259 à parier contre 1 que dans l'année prochaine le nombre des filles n'excédera pas celui des garçons ; qu'on peut parier à jeu égal que cet événement arrivera d'ici à cent soixante-dix-neuf ans ; que la certitude que cet effet a une cause physique régulière, est incomparablement plus grande pour Londres que pour Paris.

Au lieu de supposer que toutes les proportions entre le nombre des boules de différentes couleurs sont possibles, on peut supposer que ces proportions soient renfermées entre certaines limites ; par exemple , si on fait entrer dans des Problèmes sur les jeux de commerce, l'habileté inconnue des joueurs , on doit supposer que cette supériorité d'habileté a des bornes ; il en est de même si on veut chercher les erreurs qui ont pu arriver dans une suite d'observations astronomiques. On peut aussi supposer que toutes les proportions possibles entre le nombre des boules de différentes couleurs le sont ou également, ou avec plus ou moins de probabilité, suivant une loi connue, ou rechercher même la loi suivant laquelle elles sont plus ou moins possibles ; il résulte de-là autant de classes de Problèmes , dont les solutions sont applicables & aux erreurs des observations astronomiques & à l'inégalité d'habileté entre des joueurs. Telles sont les différentes questions que M. de la Place s'est proposées : presque toutes dépendent d'intégrations pour des valeurs déterminées, & il suffit, dans un grand nombre de cas, d'avoir des intégrations approchées. L'Auteur s'est livré sur ces deux objets, à des recherches analytiques très-étendues ; il donne une méthode d'approximation pour les intégrations aux différences, soit finies, soit infiniment petites, très-commode pour les questions qu'il se propose & qui peut s'appliquer avec avantage à des Problèmes d'un autre genre : il détermine également pour des valeurs particulières, les intégrales rigoureuses de fonctions non intégrables en général, par une méthode particulière très-ingénieuse. Les applications de cette partie du calcul des probabilités, sont beaucoup plus

46 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

étendues & plus utiles que celles du calcul ordinaire; en effet, toutes nos connoissances physiques & morales se réduisent à des probabilités de ce genre; c'est parce qu'un évènement est arrivé constamment, que nous jugeons qu'il doit arriver encore; c'est parce que deux phénomènes ont toujours co-existé, que nous jugeons que l'un est la cause de l'autre, c'est parce qu'une suite prodigieuse d'observations nous ont appris que les loix de la Nature sont constantes, que quelques expériences répétées suffisent pour nous faire croire la vérité d'un fait: en sorte qu'il n'existe réellement pour nous qu'une certitude absolue, qui n'a lieu que pour les Sciences abstraites, ou dans les autres Sciences pour la légitimité des conséquences qu'on tire d'un principe supposé donné, & cette probabilité, plus ou moins grande, mais toujours du même genre, seule espèce de certitude qu'on puisse chercher dans les Sciences naturelles, comme dans la conduite de la vie.





## O U V R A G E S PRÉSENTÉS À L'ACADÉMIE.

---

### P R I X.

L'ACADÉMIE avoit proposé pour l'année 1778, un Prix double :

*Sur la Théorie des perturbations que les Comètes peuvent éprouver par l'action des Planètes.*

Elle a trouvé dans la Pièce qui a pour devise :

*Non jam prima peto Mnestheus nec vincere certo,*

Des recherches ingénieuses & utiles à la solution de la question proposée. En conséquence elle a cru devoir accorder à l'Auteur de cette pièce un Prix simple ; mais comme en même temps elle n'a pas trouvé dans cet Ouvrage une solution du problème aussi complète que l'état actuel de l'analyse la mettoient en droit de l'exiger, elle a proposé de nouveau la même question pour l'année 1780, avec un Prix double, en exigeant des Auteurs l'application de leur méthode à la Comète qui a été observée en 1532 & en 1661, & dont on attend le retour vers les années 1789 & 1790 ; de manière que l'on puisse appliquer immédiatement à leurs formules le calcul arithmétique.

L'Auteur de la pièce couronnée est M. Fuss, de l'Académie de Pétersbourg, Élève de M. Léonard Euler. M. Fuss, en se faisant connoître à l'Académie, a fait hommage de son

#### 48 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

travail à son illustre Maître. C'est ainsi que pendant longtemps le nom de Galilée décora les ouvrages des Géomètres de Florence. M. Euler étoit digne de voir renouveler pour lui l'exemple d'une si noble reconnoissance qui prouve peut-être encore plus les vertus du Maître que celles de ses Disciples.

---

#### A R T S.

L'ACADÉMIE a publié en 1778 :

1.<sup>o</sup> La quatrième partie de l'Art du Facteur d'Orgues, par feu Dom Bedos de Celles, Correspondant de l'Académie.

L'Auteur traite dans cette partie des orgues de concert grands ou petits, de la manière d'adapter des jeux d'orgues à des instrumens à clavier & à cordes, tels que le piano, le clavecin, les vielles, les orgues à cylindre ou serinettes. On fait que ces derniers instrumens sont des machines où des dents disposées sur un cylindre qu'on fait tourner, font mouvoir les touches d'un clavier, de manière à jouer plusieurs airs, suivant les changemens de position qu'on donne au cylindre. Dom Bedos donne les moyens d'appliquer les cylindres à un grand orgue, en sorte qu'on puisse à volonté ou jouer des airs en tournant le cylindre, ou employer la main d'un Organiste. L'Art de noter les cylindres est un Art particulier dont on trouve ici les détails; ils ont été communiqués à Dom Bedos par le P. Langremelle, Religieux Augustin, qui a poussé cet Art à un grand degré de perfection, & qui cultive avec succès la Mécanique & l'Histoire Naturelle.

2.<sup>o</sup> *L'Art de la Mâturation*, par M. Rome, Professeur de Mathématiques à Rochefort, & Correspondant de l'Académie. L'Art de la mâturation consiste à déterminer le nombre, les dimensions, la position des mâts qu'il convient de placer sur un Vaisseau, pour qu'il réunisse la rapidité de la marche, la facilité de manœuvrer, l'avantage de recevoir dans un plus grand nombre de directions l'impulsion du vent, avec la plus

plus grande stabilité, & le moins de mouvemens de tangage ou roulis qu'il est possible.

La théorie a donné quelques principes généraux pour cet Art, mais on sent que les problèmes que l'Art se propose sont trop compliqués, pour que la théorie seule puisse éclairer la pratique. C'est à l'expérience & à l'observation qu'elle doit la plus grande partie des règles qu'elle suit; & c'est principalement aux détails de cette pratique qu'est consacré l'ouvrage de M. Rome; il l'a fait sous les yeux de M. Perrain, maître Mâteur à Rochefort.

3.<sup>o</sup> *La troisième division de la première partie de l'Art de fabriquer les étoffes de Soie, par M. Paulet.* Cette division est une suite de la septième section de cet Art immense dans ses détails; elle contient l'art de la fabrique des Satins unis, & de celle des Étoffes qui se façonnent avec la marche, des Cirfakas, des Canelés, des Prussiennes, des Amboisiennes, des Musulmanes, étoffe nouvelle dont l'invention appartient à l'Auteur.

---

M. BORDENAVE a publié cette année la troisième édition de la *Physiologie*, en deux volumes in-12. Cet Ouvrage, destiné pour les Écoles de Chirurgie, où l'Auteur professe cette Science depuis un grand nombre d'années, renferme dans un très-petit espace les principes de Physiologie les plus simples, les plus usuels, exposés avec méthode & avec clarté. L'Auteur a cru devoir entrer dans quelques détails sur les hypothèses que leur accord avec les phénomènes, les idées ingénieuses qu'elles renferment, ou le nom de ceux qui les ont ou proposées ou soutenues, ne permettent pas d'ignorer.

Dans un Livre élémentaire, le talent consiste à faire usage des connoissances approfondies qu'on a pu acquérir sans les montrer, à présenter les objets qui ont exigé des discussions difficiles, sans laisser voir les difficultés qu'on a eues à vaincre, à s'oublier pour ne songer qu'à ses élèves, à faire dire en

*Hist. 1778.*

G

un mot aux Lecteurs que l'ouvrage est bon, en laissant à deviner à ceux qui lisent avec attention, combien l'Auteur a eu besoin pour le bien faire, de connoissances & d'habileté. Tel est le but que M. Bordenave s'est proposé : il a voulu de plus que son Ouvrage, par son volume comme par la manière dont les objets y sont présentés, fût à la portée des jeunes gens qui se destinent à l'art de guérir, & sur-tout de ceux qui doivent l'exercer dans les campagnes, & dont on ne peut exiger ni une intelligence supérieure, ni des études très-approfondies.

---

**L**ES Leçons de Calcul intégral que M. Cousin a publiées, sont un Recueil des principales méthodes de calcul intégral, soit ordinaires, soit aux différences finies, soit aux différences partielles. Le but de l'Auteur a été de rassembler toutes ces méthodes dans un Ouvrage peu volumineux, dans un ordre systématique & sous une forme qui rendît cette collection utile à l'enseignement public.

Cet Ouvrage, en deux volumes in-8.<sup>o</sup> est destiné à servir de base aux Leçons que l'Auteur donne dans le Collège Royal, établissement célèbre en Europe dans le temps de sa première institution, & qui, sous le dernier règne, a repris un nouveau lustre. En France, vers la fin du siècle dernier, & dans le commencement de celui-ci, il s'étoit élevé une sorte d'opposition entre ceux qui s'occupoient de reculer les bornes des Sciences, & ceux qui étoient chargés de les enseigner ; les uns vouloient établir une philosophie nouvelle que Descartes avoit fait naître en Europe, & que les grands hommes, qui lui ont succédé, ont étendue & perfectionnée, en corrigeant ses erreurs ; les autres ne paroissent occupés que de défendre, jusqu'à la dernière extrémité, les restes de l'ancienne Philosophie, & d'en conserver du moins la forme, lorsqu'ils étoient forcés d'en abandonner les opinions. Les progrès des lumières ont fait disparaître

cette opposition , qui n'a existé , du moins d'une manière durable , dans aucune autre Nation éclairée , & qui tenoit moins à l'esprit de la Nation françoise qu'à la forme des établissemens d'instruction publique. Depuis le renouvellement du Collège Royal , les Écoles de Paris disputent aux plus célèbres Écoles de l'Europe l'honneur d'attirer les Étrangers , & de former des Savans dans tous les genres.

---

**M.** VANDERMONDE a lû à l'Académie dans ses Assemblées publiques du 14 novembre 1778 & du 15 novembre 1780, deux Mémoires sur un Système d'Harmonie , applicable à l'état actuel de la Musique.

L'objet principal de l'Auteur est de réduire à un petit nombre de loix fondamentales , les règles que les Compositeurs de Musique suivent dans leurs Ouvrages , & même ce qu'ils regardent comme des exceptions à ces règles.

Ce n'est point dans la théorie qu'il cherche ces loix , mais dans l'observation de ce que les plus célèbres Musiciens ont fait , & de ce que l'expérience a prouvé être agréable à l'oreille , quelle que soit la cause de ce plaisir.

Ce sont des espèces de loix empyriques , comme celles que cherchent les Géomètres & les Physiciens , pour des phénomènes dont ils n'ont pu trouver ou calculer la cause d'après les loix générales de la Nature ; & l'Auteur est persuadé qu'il n'y a point de vraie théorie de l'harmonie qui soit applicable à l'état actuel de la Musique.

Nous allons exposer en peu de mots les principes de ce nouveau système.

Il doit y avoir une raison simple du plaisir que procure par elle-même , à des oreilles exercées , la succession des accords : la voici selon l'Auteur. Les gammes des différens modes deviennent très-familieres à l'oreille , & un accord n'étant qu'un ensemble de sons simultanés , pris entre les



## 52 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

sept, qui forment chacune de ces gammes, le plaisir attaché particulièrement à la pratique des accords, dépend de la facilité plus ou moins grande que procure leur succession, pour reconnoître les gammes dont ils font partie.

Il y a dans chaque accord, comme dans chaque gamme, une note principale; pour chaque gamme, c'est la *note du ton*; & pour chaque accord, c'est quelquefois la note du ton & quelquefois *sa quinte*: l'une de ces deux notes est toujours censée faire partie de tout accord complet, composé d'un certain nombre des sons de cette gamme.

Dans les accords, cette note principale se nomme *base d'harmonie*. Pour bien saisir la signification de ce mot, il faut savoir qu'on ne peut terminer un sens, ou parvenir au repos en harmonie, que sur un accord parfait, c'est-à-dire sur un accord dont les élémens sont la note principale, la tierce majeure ou mineure & la quinte juste: toute autre note entendue en même temps, & qui ne seroit point une octave de l'une de ces trois, seroit donc *dissonante*, c'est-à-dire qu'il faudroit nécessairement cesser de la chanter pour parvenir à ce repos. La base d'harmonie est cette note principale par rapport à laquelle toutes celles d'un accord sont ou consonantes ou dissonantes: entre une note & sa quarte, par exemple, il n'y a pas dissonance, puisque deux parties peuvent faire la quarte entr'elles dans un accord parfait; & cependant la quarte de la base d'harmonie est une note dissonante, puisqu'il faut nécessairement cesser de la chanter pour arriver au repos: entre une note & sa seconde, au contraire, il y a dissonance, puisque dans un accord parfait deux parties ne peuvent pas chanter à la seconde l'une de l'autre; mais pour savoir laquelle des deux notes est la note dissonante, celle qu'il faut cesser de chanter, il faut connoître la base d'harmonie de l'accord.

Cette base d'harmonie est toujours, comme nous l'avons dit, ou la note du ton dans lequel on est au moment où l'accord s'exécute, ou la quinte de ce ton; & ce sera celle

des deux qui, se conformant d'ailleurs aux loix de l'harmonie, supposera l'accord le plus simple, le moins dissonant.

Il y a quatre espèces de notes dissonantes sur la base d'harmonie, les *septièmes*, les *neuvièmes*, les *quartes* & les *sixtes*. Toutes les fois que le Musicien a employé l'une de ces notes dissonantes, il faut raisonner dans l'application des loix de l'harmonie, comme s'il avoit employé en effet toutes celles qui la précèdent dans l'ordre où nous venons de les nommer : il faut aussi restituer la base d'harmonie, si elle a été supprimée, c'est-à-dire enfin que ces loix supposent les accords aussi complets qu'ils peuvent l'être.

L'Auteur admet, dans chacun des douze tons, un mode majeur, & cinq espèces de mode mineur : le mode est la manière dont doivent être affectés ou non, de dièses ou de bémols, les sept noms des degrés de l'échelle ou de la gamme d'un certain ton.

Les cinq espèces de mode mineur sont, 1.<sup>o</sup> le mode mineur tel qu'on le suppose à la clef, ou le *mode mineur en descendant* : la tierce, la sixte & la septième du ton y sont mineures ; 2.<sup>o</sup> le *mode mineur proprement dit*, dans lequel la septième du ton est majeure, c'est celui qui est censé régner toutes les fois que l'on n'emploie pas les cordes particulières aux autres espèces ; 3.<sup>o</sup> celui où la sixte du ton est aussi majeure, on l'appelle *mode mineur en montant*. Dans les deux autres espèces, la quarte du ton est superflue, la septième étant toujours majeure ; ce qui fournit 4.<sup>o</sup> le *mode mineur avec sensible de quinte*, dont la pratique de l'accord appelé *de sixte superflue*, démontre la nécessité ; & 5.<sup>o</sup> le *mode mineur en montant, avec sensible de quinte*, dans lequel la sixte du ton est majeure.

C'est en introduisant dans ces six différens modes, sur la note du ton & sur la quinte les différentes notes dissonantes dont nous venons de parler, que l'on forme tous les accords complets, praticables dans l'harmonie.

Cela posé, la loi générale qui doit être observée de

54 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

proche en proche entre deux accords consécutifs, durant tout le cours d'un morceau de musique, est très-simple à énoncer.

*Il faut, ou que la base d'harmonie soit commune, ou que toutes les notes du premier des deux accords supposé complet, appartiennent à la gamme où le second se trouve placé.*

Si l'on ajoute à cela, qu'il n'est jamais permis d'altérer à la fois deux notes entre lesquelles il y auroit dissonance; & si l'on se rappelle que toute note qui a été supposée dissonante dans le premier accord, ne peut pas devenir consonante dans le second, on aura tout ce qu'il est essentiel de savoir sur la succession des accords.

Il reste à parler de l'arrangement des parties, c'est-à-dire, connoissant quelle est la note du premier accord qu'exécute chacun des concertans, à déterminer quelles sont les notes du second qu'il convient à chacun d'exécuter : l'Auteur énonce comme il suit la loi générale sur l'arrangement des parties.

*Il ne faut considérer pour cet arrangement que la base d'harmonie du second des deux accords consécutifs : il faut la supposer commune aux deux, parce qu'elle l'est en effet ou qu'elle peut toujours l'être. Alors toute note du premier accord qui se trouvera dissonante sur cette base d'harmonie, doit ou tenir, ou passer chromatiquement sur une note de même nom, ou aller diatoniquement sur une note consonante, en observant, lorsqu'il y a deux routes, que le repos absolu exige qu'on descende.*

Il faut ajouter qu'il est toujours permis de parcourir les différentes notes d'un même accord, celles qui se suivroient par ce moyen, fussent-elles dissonantes l'une & l'autre sur la base d'harmonie commune; & qu'il n'est permis d'employer la marche même des bases d'harmonie, quand elles diffèrent en effet, que lorsque celle du second accord ne peut pas être méconnue pour telle.

On voit que ces loix sont en petit nombre & très-simples; elles n'exigent pour être entendues, que des connoissances en musique très-élémentaires.

L'Auteur se propose de les développer dans un Ouvrage particulier, & il a joint à ses deux Mémoires, qui ont été imprimés dans le Journal des Savans, cahier second de Décembre 1778, cahiers de Janvier & de Février 1781, des exemples notés, propres à faire sentir l'étendue des applications de ce système à la pratique de l'harmonie.

---

LES Mémoires présentés à l'Académie en 1778, & destinés à l'impression, sont au nombre de dix-sept :

Sur la formation du Soufre par la voie humide : Par M. le Veillard.

Sur l'Acide sulfureux : Par M. Bertholet.

Sur l'action des Acides vitriolique & marin sur les Huiles : Par M. Cornette.

Sur l'Huile de vitriol glaciale : Par le même.

Sur le Pastel : Par M. Quatremère.

Sur les Précipitations par les Alkalis caustiques ou non caustiques : Par M. de Fourcroy.

Observations d'Aurores boréales : Par M. Wan Swinden, Correspondant de l'Académie.

Sur le Mercure doux : Par M. Cornette.

Sur l'Air sulfureux : Par M. Bertholet.

Sur l'Or fulminant : Par le même.

Sur la combinaison des Huiles avec différentes substances : Par le même.

Sur la décomposition de l'Acide nitreux : Par le même.

56 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

Sur la décomposition du Sel ammoniac par les intermédiaes  
alkalins : Par M. Cornette.

Sur l'Éclipse du Soleil du 24 Juin : Par M. Tondu.

Sur les Volcans éteints de Brisgau : Par M. le Baron  
Diétrick, Correspondant de l'Académie.

Sur des Fossiles trouvés dans les Pyrénées : Par M. le  
Baron de la Peyrouze, Correspondant de l'Académie.

Sur une nouvelle Lunette : Par M. Navarre.

---

**L**ES Machines approuvées par l'Académie, & destinées  
à être insérées dans le Recueil des Machines, sont au nombre  
de trois :

Une nouvelle Pendule : Par M. Robin.

Une Serrure de combinaison : Par M. l'Abbé Boissier.

Un Pantographe : Par M. Sikes.



*ÉLOGE*



## ÉLOGE

## DE M. MALOUIN.

**P**AUL-JACQUES MALOUIN, Pensionnaire-Chimiste de l'Académie Royale des Sciences, Professeur de Médecine au Collège Royal, Médecin ordinaire de la feue Reine; naquit à Caen en 1701, de N. Malouin, Conseiller au Présidial de cette ville & de N. Poupart.

Le père de M. Malouin, qui le destinoit à remplir sa Charge, l'envoya suivre à Paris les études de Droit; mais le jeune homme sans en rien dire, & sans prendre conseil que de lui-même, étudia la Médecine au lieu de la Jurisprudence, en sorte qu'à son retour dans sa patrie en 1730, son père à qui on avoit rendu les meilleurs témoignages de sa bonne conduite, & qui croyoit le revoir Licentié en Droit, apprit avec surprise qu'il étoit Docteur en Médecine: il fallut céder à une inclination si décidée.

L'oncle & le grand-père de M. Malouin avoient exercé à Caen la même profession; sa famille, qui s'est éteinte avec lui, y étoit une des plus anciennes & des plus considérées de la bourgeoisie: elle avoit produit depuis plusieurs siècles, des hommes distingués dans la Médecine & dans la Théologie.

M. Malouin resta trois ans dans sa patrie, il revint ensuite à Paris; son nom y étoit déjà connu parmi les Médecins: M. Geoffroi, Professeur au Collège Royal, obligé d'interrompre une leçon de Chimie, avoit chargé de l'achever M. Malouin son disciple, alors simple Bachelier en Médecine. Quoique le jeune Chimiste ne se fût pas préparé à cette épreuve, il s'acquitta d'une commission si honorable.

*Hist. 1778.*

H

& si hasardeuse, de manière à mériter que M. Geoffroi le choisît désormais pour le remplacer en son absence, & le désignât en quelque sorte pour son successeur; mais M. Malouin étoit absent lorsque M. Geoffroi mourut, & ce ne fut qu'en 1767 qu'il remplaça M. Astruc, successeur de M. Geoffroi.

A son retour à Paris en 1734, il se livra à la pratique de la Médecine, & fut le Médecin d'un grand nombre d'hommes célèbres dans la Littérature & dans les Sciences: il devoit leur confiance & la réputation que cette confiance lui donna bien-tôt, à M. de Fontenelle dont il étoit le parent, & dont il devint l'ami. M. Malouin eut plusieurs autres obligations à ce Philosophe célèbre, & il se plaisoit à publier quelle noblesse, quelle simplicité, M. de Fontenelle savoit mettre dans les services qu'il rendoit, souvent sans attendre qu'on les sollicitât. Il sortoit pour les autres de cette négligence, de cette paresse qu'il se croyoit permis d'avoir pour ses propres intérêts; son amitié étoit vraie & même active; aucun genre de sensibilité ne lui étoit étranger; il en connoissoit sur-tout les peines, & il avoua à M. Malouin, qu'elles étoient les plus cruelles qu'il eût éprouvées, quoique les injustices qu'il avoit si long-temps essuyées dans la carrière des Lettres, eussent fait sentir bien vivement les peines de l'amour-propre à un homme qui auroit été moins Philosophe ou plus personnel. Il savoit, disoit avec plaisir M. Malouin, obliger ses amis à leur insu, & leur laisser croire qu'ils ne devoient qu'à eux-mêmes ce qu'ils tenoient de son crédit & de la juste considération qu'il avoit obtenue. Ce desir d'obliger ne l'abandonna pas dans les dernières années de sa vie, & survécut même à l'affoiblissement de sa mémoire & de ses organes. Un de ses amis lui parloit un jour d'une affaire qu'il lui avoit recommandée: *je vous demande pardon*, lui dit M. de Fontenelle, *de n'avoir pas fait ce que je vous ai promis. Vous l'avez fait*, répondit son ami; *vous avez réussi, & je viens vous remercier. Eh! bien*, dit M. de Fontenelle, *je n'ai point oublié de faire votre affaire; mais j'avois oublié que je l'eusse*

*faite.* Cependant on a cru M. de Fontenelle insensible parce que sachant maîtriser les mouvemens de son ame, il se conduisoit d'après son esprit, toujours juste & toujours sage; d'ailleurs il avoit consenti sans peine à conserver cette réputation d'insensibilité; il avoit souffert les plaisanteries de ses sociétés sur sa froideur, sans chercher à les détromper, parce que bien sûr que ses vrais amis n'en seroient pas la dupe, il voyoit dans cette réputation un moyen commode de se délivrer des indifférens sans blesser leur amour-propre.

Le Public nous pardonnera de nous être un peu étendus sur la tendre reconnoissance de M. Malouin pour M. de Fontenelle, reconnoissance que plusieurs de nos Confrères partageoient avec lui; nous avons cru devoir rendre ce témoignage aux vertus d'un Sage, dont l'envie n'a point respecté les cendres, parce qu'uniquement occupée de l'intérêt de blesser les vivans, elle se plaît également, selon que cet intérêt l'exige, à déchirer les morts ou à les accabler de louanges exagérées. L'Académie nous pardonnera plus volontiers encore cette courte digression sur un Philosophe illustre, dont la mémoire lui est chère, qui a été si longtemps le digne organe de cette Compagnie, & qu'elle a lieu maintenant de regretter plus que jamais.

M. Malouin trouvoit parmi les Savans & les Gens de Lettres, des malades souvent peu disposés à croire à la certitude de la Médecine; & peu de Médecins en ont été aussi persuadés que lui. Son enthousiasme excessif pour son Art, qui eût paru un ridicule dans un Médecin ignorant, devenoit une singularité piquante dans un Médecin éclairé: la franchise, vertu qu'il portoit au plus haut degré, ne lui permettoit pas de rien dissimuler de cet enthousiasme. Un Philosophe célèbre s'étoit trouvé guéri d'une maladie singulière, après avoir pris assidûment pendant quatre ans un remède ordonné par M. Malouin, il vint le remercier: *vous êtes digne d'être malade*, lui dit M. Malouin. Il ne pouvoit pardonner à ceux qui, ayant été guéris par des Médecins, continuoient à faire des plaisanteries sur la Médecine; cette conduite lui paroissoit



une véritable ingratitude , & il rompit avec un grand Écrivain qu'il avoit traité avec succès , & qui depuis dans ses Ouvrages , avoit attaqué la Médecine & sur-tout les Médecins.

Mais le desir d'être utile l'emportoit en lui sur son humeur contre les détracteurs de la Science qu'il professoit. Dans une dispute assez vive qu'il avoit eue avec l'un d'eux , il avoit répondu sérieusement , & même avec humeur , à quelques-unes de ces plaisanteries sur la Médecine , qui même ne prouvent pas toujours l'incrédulité de ceux qui les font : ce prétendu incrédule tomba malade quelque temps après ; M. Malouin vint le trouver , *je sais que vous êtes malade* , lui dit-il , *& qu'on vous traite mal , je suis venu , je vous hais , je vous guérirai , & je ne vous verrai plus* : il tint parole sur tous les points.

Il regardoit la confiance dans les Médecins comme une preuve de la justesse & de la supériorité de l'esprit , & l'on étoit étonné quelquefois de l'entendre ajouter aux justes éloges qu'il donnoit à M.<sup>r</sup> de Fontenelle & de Voltaire , que dans leurs écrits , ces deux hommes illustres avoient constamment respecté la Médecine. On opposoit un jour à cette opinion l'exemple de Molière , à qui personne ne pouvoit refuser ni un grand génie , ni une raison supérieure : *voyez aussi comme il est mort* , répondit M. Malouin ; mot d'autant plus plaisant qu'il est vrai , & sans doute le Médecin de Molière (car on sait qu'il en avoit un) auroit pu lui dire avec raison : *faites des Comédies contre nous , si vous voulez , mais la Médecine vous défend de les jouer , sous peine de la vie*.

On pourroit demander lequel doit inspirer le plus de défiance à un malade , ou d'un Médecin trop persuadé de la certitude de son Art , ou d'un Médecin pyrrhonien qui traite une maladie , qu'il n'est pas sûr de connoître , & donne des remèdes dont l'effet lui paroît douteux à lui-même ? Cette question n'est peut-être pas facile à décider : le doute semble caractériser un esprit plus sage ; mais il est si facile

& si commode de douter de tout, on acquiert si aisément par ce moyen la réputation d'un bon esprit, que la charlatanerie & l'ignorance ont aussi appris à douter. La bonne foi de M. Malouin étoit si connue, que l'excès de sa confiance ne lui fit rien perdre de celle de ses malades.

Il entra comme Chimiste à l'Académie en 1742; il s'étoit fait connoître auparavant par sa Chimie médicale, Ouvrage utile dans un temps où les remèdes chimiques étoient vantés par quelques Médecins avec un enthousiasme aussi ridicule que dangereux, & rejetés entièrement par les autres, d'après un préjugé absurde qui les regardoit comme moins naturels que les remèdes tirés du Règne végétal. On ne songeoit pas que c'est la même Nature qui produit les mixtes des laboratoires & ceux des jardins.

M. Malouin nous a donné plusieurs Mémoires de Chimie; on y remarque une vaste érudition, beaucoup de scrupule & d'exactitude dans les expériences; mais nous ne pouvons dissimuler qu'on en tireroit peu de vérités nouvelles.

La Chimie doit à Stahl l'heureuse révolution qui en a fait une branche, ou plutôt une des bases de la Physique, & cet illustre Chimiste étoit encore peu connu en France, lorsque M. Malouin s'étoit appliqué à l'étude des Sciences. Les Ouvrages de Stahl, malheureusement trop obscurs, avoient besoin qu'un homme né avec le génie de la Chimie, nous apprît à les entendre, & c'est une des obligations que nous avons eues à M. Rouelle; mais lorsque M. Rouelle commença ses Cours, M. Malouin se livroit à d'autres études. Nous sommes donc contraints d'avouer qu'il n'a point contribué aux progrès rapides que la Chimie a faits en France, dans ces derniers temps, & nous l'avouerons, avec d'autant moins de peine, que la Nature lui avoit accordé dans un autre genre des talens distingués.

Aussi renonça-t-il bientôt à la Chimie pour se donner tout entier à la Médecine: obligé quelquefois, malgré son enthousiasme, de reconnoître l'incertitude de son Art, il regardoit cette incertitude comme une suite des mauvaises méthodes,

## 62 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

& non comme un défaut attaché à la Science. Il avoit vu qu'au milieu de ces révolutions, qui ont changé vingt fois la Physique systématique, & rangé successivement les Philosophes sous vingt drapeaux différens, la doctrine d'Hippocrate subsistoit encore entière sur les ruines de tant de systèmes; que si on en excepte les Ouvrages des Géomètres, des Astronomes grecs, & le Livre des animaux d'Aristote, Hippocrate est presque le seul des Anciens où l'on puisse trouver des vérités; qu'enfin, comme les Mathématiques & l'Histoire Naturelle ont fait plus de progrès réels que la Médecine, les Livres d'Hippocrate sont les seuls livres de l'Antiquité où les Modernes puissent apprendre quelque chose, & que même, tandis que les autres Ouvrages ne sont plus pour nous que des monumens de l'histoire de l'esprit humain, ceux d'Hippocrate sont encore une source inépuisable d'instruction. D'après cette considération, qui étoit le plus fort argument que M. Malouin employât pour prouver la certitude de la Médecine, il crut que pour en accélérer les progrès, & la rendre plus certaine, il falloit suivre la méthode d'Hippocrate, multiplier les observations, rapprocher des symptômes des maladies, toutes les circonstances qui peuvent influer sur la santé des hommes, l'air, ses variations, la température, l'humidité, la position des lieux, la nourriture, la manière de vivre de chaque pays & de chaque état de la société. M. Malouin, fixé à Paris, exécuta pour cette capitale & ses environs, ce plan qu'il seroit à désirer que l'on embrassât pour tous les lieux qui peuvent fournir des observateurs, & il continua son travail pendant dix années, jusqu'au moment où il renouça à une pratique étendue.

C'est d'après les Mémoires qu'il a donnés sur ce sujet, qu'il faut apprécier son talent; c'est-là qu'on reconnoît un Observateur exact, timide quand il faut juger, mais hardi dans ses vues, habile à saisir des rapports, sachant les présenter d'une manière frappante, rassemblant tout ce que les Médecins ont écrit, mais discutant leurs opinions, & ne les adoptant que lorsqu'elles sont d'accord avec la Nature.

A la mort de M. Dumoulin, il devint un des Médecins les plus employés de Paris : cette vogue dura vingt-deux mois , au bout desquels il se trouva assez riche pour ne songer qu'au repos ; il acheta une charge de Médecin du Grand-Commun à Versailles. *Je veux me retirer à la Cour*, disoit-il, expression singulière, & qui peut-être ne peut convenir qu'à un Médecin de Paris très-employé. Cette prompte retraite d'un homme qui aimoit à faire le bien, prouve qu'il étoit réellement plus persuadé de la certitude de la Médecine que de ses propres talens.

Ce fut alors qu'il cessa de donner ses Mémoires sur les maladies qui règnent à Paris ; ouvrage utile dont jusqu'ici personne ne s'étoit chargé à sa place : heureusement ce travail, étendu même à la France entière & suivi sur un plan plus vaste & plus régulier, va devenir une des principales occupations d'une Société nouvelle dont l'établissement dut faire espérer à M. Malouin la prompte conversion des détracteurs de la Médecine ; car il étoit trop persuadé pour craindre que des expériences plus répétées, faites plus en grand & d'une manière plus suivie, ne pussent aboutir qu'à augmenter l'endurcissement des incrédules.

Comme il ne vouloit pas malgré son absence rester inutile à l'Académie, il se chargea de décrire l'Art du Boulanger, Art important, peu connu & qui précisément, parce qu'il est de tous les Arts le plus nécessaire au Peuple, est aussi celui de tous sur lequel des préjugés qui s'étendent depuis les procédés mécaniques jusqu'aux loins de la Législation, sont les plus nombreux, les plus absurdes, les plus funestes & peut-être les plus difficiles à déraciner. Les objets qui nous intéressent le plus, sont en général ceux sur lesquels nous raisonnons le plus mal, & il faut savoir ne rien craindre pour voir la vérité aussi-bien que pour la dire.

Cet Art tient à la fois à la Médecine & à la Chimie ; c'étoit pour M. Malouin une double raison de s'en occuper : aussi l'embrassa-t-il dans toute son étendue ; les moyens de conserver le blé, d'en connoître les différentes qualités, de le

## 64 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

réduire en farine, les diverses espèces de farines, leur degré de bonté, l'analyse du blé, l'histoire naturelle des Plantes, qui, dans les différens climats, fournissent, soit de la farine, soit une nourriture journalière qui remplace le pain, la description de la méthode de former avec les substances farineuses du pain de toute espèce, ou des pâtes sèches & non fermentées, la manière de préparer des alimens avec toutes les farines & tous les mucilages qu'on a cru jusqu'ici pouvoir servir de nourriture, le plus ou le moins de salubrité de tous ces alimens, les effets qu'ils produisent sur la constitution de l'homme, soit comme nourriture habituelle, soit comme régime convenable dans l'état de maladie, tous ces objets sont traités avec détail dans l'Ouvrage de M. Malouin, & s'il s'y trouve des erreurs, ce sont pour la plupart des opinions qui régnoient encore dans le temps où il a publié son Ouvrage, & qui n'ont été détruites que par des expériences plus récentes.

M. Parmentier vient de donner sur l'Art de la Boulangerie, un Traité, auquel l'Académie a accordé son suffrage, du moins sur la partie physique, la seule qui soit de notre ressort: il a combattu dans cet Ouvrage quelques opinions de notre Académicien, en rendant justice au mérite de ses recherches, & il a joint aux travaux de M. Malouin, un usage heureux des vérités nouvelles, qu'une analyse plus parfaite des substances farineuses a fait découvrir.

M. Parmentier avoit lû, à une séance de l'Académie, cette partie de son Ouvrage, où quelques idées de M. Malouin sont attaquées: celui-ci étoit présent à la séance; M. Parmentier craignoit ses regards, sachant à quel point l'amour-propre est facile à blesser, & ignorant combien M. Malouin étoit supérieur à ses foiblesses; il fut bientôt rassuré; à peine sa lecture est-elle finie, que M. Malouin vient à lui, l'embrasse; *recevez mon compliment*, dit-il; *vous avez mieux vu que moi.*

M. Malouin étoit d'un caractère franc, & assez franc pour paroître dur quelquefois; mais cette dureté n'étoit que dans son ton ou dans son humeur; elle n'alloit pas plus loin: il pouvoit

pouvoit choquer ceux qui combattoient ses opinions, & surtout son respect pour la Médecine, mais on voyoit aisément qu'il eût été fâché de les blesser.

Comme il croyoit très-sincèrement à son Art, il l'employoit pour lui-même; & sur-tout pendant les dernières années de sa vie, toutes les heures de sa journée étoient scrupuleusement réglées, d'après un régime qu'il s'étoit imposé; ce régime différoit beaucoup de la vie commune, & par conséquent le séparoit presque entièrement de la Société; mais il étoit soigneusement calculé sur les changemens que, selon M. Malouin, l'âge produit dans l'économie animale.

S'il n'a voulu, par ce régime, que se procurer une vieillesse saine & robuste, terminée par une mort prompte & sans douleurs, il ne s'est point trompé; il mourut à Versailles d'une attaque d'apoplexie, le 3 Janvier 1778.

La mort en surprenant M. Malouin, n'a point prévenu l'exécution d'un projet qu'il avoit formé pour contribuer aux progrès de la Médecine; témoin depuis long-temps des travaux de la Faculté, il voyoit avec douleur ces travaux ensevelis dans ses Registres, ne servir qu'à l'instruction de ses Membres, & le dépôt immense des faits que la Faculté rassemble être perdu pour les Sciences & pour l'Humanité.

Il a fondé pour cette Compagnie une Assemblée publique, où chaque année on prononcera l'éloge des Membres que la Faculté a perdus, & où elle rendra compte des travaux de l'année. Jaloux de désabuser le Public, qu'il avoit trouvé souvent si injuste envers les Médecins, il a cru que pour lui apprendre à les estimer, il ne falloit que lui apprendre à les mieux connoître.

Sa place de Pensionnaire-Chimiste, a été remplie par M. Lavoisier, déjà Associé dans la même Classe.





## ÉLOGE

## DE M. DE LINNÉ.

CHARLES DE LINNÉ, plus connu sous le nom de Linnæus, Chevalier de l'Ordre de l'Étoile polaire, premier Médecin du Roi de Suède, Professeur de Médecine & de Botanique dans l'Université d'Upsal, un des huit Associés-Étrangers de l'Académie des Sciences, de la Société Royale de Médecine de Paris, de la Société Royale de Londres, des Académies de Berlin, de Pétersbourg, de Stockholm, d'Upsal, de Bologne, d'Édimbourg & de Philadelphie, naquit dans la Province de Smolande en Suède, le 23 Mai 1707.

« De tous ces titres académiques (dont nous n'avons donné ici qu'une liste très incomplète), aucun ne l'a autant flatté que celui d'Associé-Étranger de l'Académie des Sciences, dont il a été revêtu le premier de sa Nation, & jusqu'à présent le seul. »

Ce sont les propres termes de M. de Linné, dans un Mémoire qui nous a été envoyé de sa part : telle étoit l'expression de sa reconnaissance pour l'Académie, peu de temps avant sa mort, dans ces momens où l'homme cessant d'être sensible aux distinctions frivoles de la vanité, peut l'être encore aux honneurs de la gloire.

Cet hommage rendu à l'Académie par un Savant illustre que l'Europe avoit comblé de titres Littéraires, honore à la fois cette Compagnie & la Nation ; il prouve sur-tout combien est sage la loi qui fixe à huit seulement le nombre de nos Associés-Étrangers : en effet, quel homme de génie ne

seroit flatté de voir son nom inscrit dans une liste si courte, entre le Czar Pierre & Newton?

Le père de M. de Linné, qui exerçoit les fonctions de Ministre dans le village de Stenbrohult, s'amusoit à cultiver des Plantes; & son fils apprit dès l'enfance à les aimer & à les étudier. Il avoit reçu de la Nature cette activité d'esprit qui ne permet point de repos tant qu'il reste quelque chose à voir ou à découvrir; ce coup-d'œil prompt & juste qui saisit tout ce qui mérite d'être observé, & qui ne voit les objets que tels qu'ils sont; cette force de tête nécessaire pour rassembler des faits épars, & ne former qu'une grande vérité d'une foule de vérités isolées. Ainsi en offrant des Plantes aux premiers regards de M. de Linné, en déterminant par-là sur quels objets son esprit devoit s'exercer, le hasard le fit Botaniste: mais déjà la Nature avoit préparé un grand homme.

A l'âge de vingt-un ans, il se rendit à Upsal, qu'on pouvoit alors regarder comme la Capitale littéraire de la Suède. Olaüs Celsius, qui étoit à la fois un Érudit très-profond & un Naturaliste habile, sentit le mérite du jeune Linné & devina son génie; il lui servit de père, & lui procura toutes les instructions, tous les encouragemens que ses connoissances & son crédit le mettoient en état de donner à ce jeune homme, qui croissoit pour changer la face de la Botanique.

M. de Linné obtint à vingt-cinq ans, dans l'Université d'Upsal, la Chaire que le savant Botaniste Rudbeck, accablé d'années & de travaux, étoit obligé d'abandonner: mais cette place ne suffisoit pas à l'activité du nouveau Professeur, & il quitta bien-tôt Upsal, mais en conservant sa Chaire & par les ordres même de l'Université, qui préféra sagement le bien des Sciences & sa propre gloire à l'observation de ses réglemens.

D'abord il parcourut la Lapponie, la Dalécarlie, la plupart des provinces de la Suède, étendant ses observations à tout ce qui peut intéresser un Philosophe, occupé en même temps d'acquérir des lumières & d'en faire des applications utiles, enrichissant la Botanique ou de vues nouvelles, ou de Plantes



inconnues, & apprenant aux Suédois, soit à connoître les productions de leur sol, soit à en profiter. Soumis dans ces voyages à toutes les privations, exposé, dans des pays inhabités, aux rigueurs d'un climat terrible, tantôt gravissant entre des rochers, tantôt s'enfonçant dans des mines profondes, obligé de braver des dangers de toute espèce, & de longues fatigues plus difficiles encore à supporter que les dangers, M. de Linné ne se reposoit du travail de la journée que par un autre, celui de recueillir ses observations & de préparer les objets qu'il avoit ramassés.

Après ces voyages, il en fit de plus lointains & de moins pénibles : il parcourut le Danemarck, l'Allemagne, une partie de la France : il s'arrêta long-temps en Hollande & en Angleterre, étudiant dans des Herbiers ou dans des Jardins, les Plantes que la Nature a refusées à l'Europe ; consultant les Botanistes les plus célèbres ; Dillen à Londres, Jussieu à Paris, & se rendant leur disciple pour se montrer bien-tôt digne d'être leur rival.

Plus il étudioit la Botanique, plus il sentoit que cette Science devenue immense dans ses détails, avoit besoin qu'une main réformatrice vînt y produire une de ces grandes révolutions qui attachent le nom de leurs Auteurs à l'histoire de l'esprit humain.

Tournefort avoit donné le premier une méthode vraiment systématique de classer les Plantes, & M. de Linné aspirait à être dans son siècle ce que Tournefort avoit été dans le sien ; sachant bien que dans les Sciences on peut aller plus loin que ses prédécesseurs, sans néanmoins s'élever au-dessus d'eux, & qu'il est un degré de talent où l'on ne peut plus apercevoir entre deux hommes livrés aux mêmes recherches, d'autre différence que celle de leur siècle. M. de Linné chercha les caractères fondamentaux de son système dans les parties des Plantes qui servent à leur reproduction. Les Botanistes Allemands ont prétendu qu'il devoit la première idée de ce système à Burkard ; & dans les mêmes Ouvrages, ils revendiquoient, en faveur de Camérarius, la méthode de Tournefort ;

ils soutenoient que Jungius, & un autre Camérarius, avoient été les guides de Vaillant, à qui M. de Linné accordoit le mérite d'avoir bien décrit le premier les étamines & les pistils, & connu leur usage pour la fécondation des Plantes. Ces prétentions peuvent être fondées; mais les conséquences qu'on a voulu en tirer pour diminuer le mérite de M. de Linné & des deux Botanistes françois, nous paroissent injustes. Trouveroit-on dans l'histoire des Sciences une grande théorie dont les premières idées, les détails & les preuves appartiennent à un seul homme? Et n'est-il pas juste d'accorder plutôt la gloire d'une découverte à celui à qui on en doit le développement & les preuves, à celui qui avec autant de génie a été vraiment utile; qu'à l'auteur d'une première idée toujours vague, souvent équivoque, & dans laquelle on n'aperçoit quelquefois le germe d'une découverte que parce qu'un autre l'a déjà développée?

La fécondation s'opère dans les Plantes, lorsque les poussières des étamines s'arrêtent sur le stigmate des pistils, stigmate qui, dans la saison de la fécondation, est ou garni d'un velouté ou humecté d'une liqueur gluante; mais les grains de cette poussière ne sont pas encore ce qui doit féconder le germe de la Plante; le stigmate est souvent séparé de ce germe par un long stilet, creux à la vérité, mais à travers lequel les poussières, toutes petites qu'elles sont, ne pourroient pénétrer. La Nature y a remédié, en faisant de chaque poussière un corps organique, doué d'élasticité; imprégné de l'humidité qu'il rencontre sur le stigmate, il se brise, & lance, soit une poussière plus fine encore, soit une liqueur très-tenue, qui pénètre à travers le stilet, & va féconder le germe. Cette dernière observation est due à M. de Jussieu, comme nous l'avons dit dans son éloge; M. Needham l'a développée depuis, & l'a confirmée par des recherches plus étendues; & il semble qu'il ne puisse être donné aux Observateurs de rien voir au-delà dans les merveilles de la reproduction des êtres organisés.

Le nombre des étamines ou des parties mâles des Plantes,

celui des parties femelles ou des pistils, la position de ces étamines & de ces pistils sur les différentes parties de la fleur, ou leur distribution dans des fleurs ou sur des individus séparés, tous ces caractères varient dans les différentes espèces de Plantes.

Dans les espèces les plus communes, les deux sexes sont réunis sur une même fleur, à laquelle on a donné le nom de *fleur hermaphrodite*; dans d'autres espèces ils sont réunis sur le même individu, mais sur des fleurs différentes, tandis que dans quelques-unes, les fleurs mâles & les fleurs femelles sont sur des Plantes séparées. Quelquefois un individu porte à la fois des fleurs hermaphrodites & des fleurs femelles; dans quelques-unes de ces espèces de Plantes, il arrive que les étamines & les pistils des fleurs hermaphrodites ne parviennent pas en même temps à l'état de perfection, ou même que leurs pistils n'y parviennent jamais, & alors le concours des autres fleurs est nécessaire à la fécondation: dans d'autres espèces, les fleurs hermaphrodites suffiroient seules à la production; ainsi on aperçoit également dans les deux cas, un luxe de la Nature, qui, occupée de perpétuer les espèces, semble en avoir multiplié les moyens, même au point d'en préparer d'inutiles.

Lorsque les parties mâles & les parties femelles, les étamines & les pistils se trouvent dans une même fleur, leur disposition paroît quelquefois s'opposer à la reproduction; mais si le pistil est plus élevé que le sommet des étamines, alors l'anthère des étamines, c'est-à-dire la vésicule qui les termine, & qui renferme la poussière fécondante, lance avec force cette poussière qui s'élève jusqu'au pistil, ou bien le pistil se courbe pour se joindre aux anthères: si les fleurs sont disposées soit en grappes, soit en épis, les fleurs inférieures sont fécondées par celles qui sont au-dessus; quelquefois les fleurs penchées vers la terre, & dont alors les étamines se trouvent au-dessous du pistil, se relèvent dans le temps de la fécondation, pour donner à ces organes la disposition nécessaire à la reproduction de la Plante.

Dans les espèces où ces parties sont placées sur des fleurs différentes, mais sur le même individu, le vent ébranlant les branches des Plantes, fait tomber des étamines une pluie de poussière, qui est reçue par les pistils.

Enfin, si les individus eux-mêmes sont séparés, les poussières emportées au loin par le vent, répandues dans tout l'espace, & agitées en tout sens, parviennent enfin jusqu'aux fleurs femelles : dans quelques espèces même, des insectes conformés de manière que les fleurs des deux individus sont nécessaires à leur existence, portent, d'une Plante à l'autre, cette poussière fécondante ; tel est selon M. de Linné, le véritable secret de cette opération merveilleuse, décrite par Tournefort, & usitée dans les îles de l'Archipel, où les habitants, pour se procurer des figues plus grosses, portent sur les figuiers femelles certains insectes, qu'ils ont auparavant fait éclore sur les figuiers mâles. On diroit que la Nature n'a mis à l'accomplissement de ses desseins, des obstacles, en apparence insurmontables, que pour déployer, avec plus de grandeur, la puissance & les ressources dans les moyens employés à les surmonter.

Ce fut dans ces parties, construites par la Nature avec tant de soin, & destinées par elle à la perpétuité des espèces, que M. de Linné crut devoir chercher les caractères de la classification des Plantes.

Les étamines lui servirent pour former les premières grandes divisions, & il tira des pistils les caractères de ses divisions secondaires : pour déterminer ensuite les genres, il employa les autres parties de la fructification, comme le nombre & la forme des semences, la nature des corps destinés à les recevoir & à les protéger, le nombre, l'arrangement des pétales, la forme des fleurs, la structure du calice, qui, tantôt enveloppe le fruit après la chute des pétales, tantôt tombe avec elles. A l'égard des espèces, M. de Linné emploie pour les distinguer, la manière dont les fleurs sont disposées sur la Plante, & naissent de ses branches ; les parties de structure différente qui enveloppent les fleurs

naissantes ou qui les défendent ; les vrilles qui soutiennent la Plante ; la forme de ses racines, de la tige, de ses feuilles ; la structure des boutons destinés à former de nouvelles branches ; la manière dont les feuilles nouvelles y sont pliées.

Après avoir formé ce plan, M. de Linné n'avoit fait encore qu'une très-petite partie du grand ouvrage qu'il méditoit : il s'en falloit de beaucoup que toutes les parties des Plantes eussent été exactement décrites par les Botanistes ; il falloit donc faire une étude plus approfondie de toutes les Plantes, en examiner toutes les parties, les suivre dans le cours entier de la durée de la Plante, observer les diverses formes qu'elles ont dans les différentes espèces, les changemens qu'elles éprouvent dans chacune, afin de pouvoir distinguer ce qui n'est qu'accidentel à l'âge de la Plante, au climat ou à la culture, d'avec ce qui est essentiel à l'espèce : il falloit parmi ces caractères essentiels, choisir les plus frappans, les plus faciles à observer, les plus propres à distinguer chaque espèce de l'espèce voisine ; il falloit enfin, pour ces objets nouveaux, créer une langue nouvelle. Tel étoit le travail qu'imposoit à M. de Linné l'exécution de sa méthode.

On se dispense trop souvent d'estimer ces travaux immenses, en disant qu'ils ne demandent que de la patience & du temps ; mais la vie de ceux qui exécutent ces grandes entreprises est-elle plus longue que celle des autres hommes ? M. de Linné n'avoit pas trente ans, & déjà son Ouvrage étoit presque terminé : quel étoit donc pour lui ce secret de doubler la durée du temps ? N'étoit-ce pas quelque chose de plus que de l'assiduité & de la patience ? & si ce talent de porter rapidement son attention sur une foule d'objets, de les bien voir, de les voir tout entiers, n'est pas le génie de l'observation, c'est du moins une qualité très-rare, très-précieuse, & sans laquelle ce génie ne peut exister.

Ce système fit une révolution dans la Botanique ; la plupart des Écoles de l'Europe s'empresèrent de le suivre, & de publier les Catalogues de leurs Plantes, rangées d'après la méthode de Linnæus. La nomenclature des Plantes assujettie  
à un

à un ordre facile à saisir, l'art de les connoître, réduit à un petit nombre de principes généraux, rendirent l'étude de la Botanique moins pénible & moins rebutante : les nouvelles merveilles que M. de Linné avoit découvertes dans les Plantes excitèrent un nouvel enthousiasme pour une Science, qui, déjà si séduisante, parce que l'étude y a presque toujours l'air d'un délassement, l'est sur-tout dans l'âge où l'on se choisit un objet d'étude. Elle satisfait à la fois l'activité de l'esprit & celle du corps, le besoin du mouvement & celui de l'occupation ; elle offre à un âge avide de jouir des plaisirs toujours variés, & chaque jour offrant quelque objet nouveau, le travail de chaque jour ne manque presque jamais d'avoir sa récompense : les jouissances sont sans doute moins vives que dans les Sciences, où la vérité est le prix d'une méditation longue & profonde, mais elles sont plus fréquentes, & elles coûtent moins de peine. Nous ne parlons pas ici de l'utilité plus ou moins grande des différens genres de Sciences, & de la gloire plus ou moins brillante qu'elles procurent : sans doute ces motifs animent & soutiennent puissamment tous les hommes nés pour de grandes choses ; mais quand il s'agit de se livrer à des occupations où le plaisir du travail en est la première récompense, ce n'est jamais que l'attrait de ce plaisir qui détermine notre choix.

Les jeunes Botanistes accoururent en foule chercher des instructions auprès de M. de Linné ; il les pénétra de son zèle, & bientôt la terre entière fut couverte de ses Disciples : la Nature fut interrogée à la fois au nom d'un seul homme, de la cime des montagnes de la Norwège aux sommets des Cordillères & de l'Atlas, des rives du Mississipi aux rives du Gange, des glaces du Groënland aux glaces de l'hémisphère austral. Tous ces voyages, qui paroïtroient demander qu'un grand Roi voulût déployer en faveur des Sciences sa magnificence & son pouvoir, un simple particulier les fit entreprendre, sans autre force que l'empire du génie sur des âmes également avides d'instruction & de gloire, & sans autre récompense pour ses Élèves que l'honneur de rapporter

*Hist. 1778.*

K

aux pieds de leur Maître les richesses qu'ils enlevoient à la Nature.

Trois de ces Savans, Hasselquist, Forskahl & Lœffling, succombèrent à leurs fatigues; ils moururent éloignés de leur patrie, au milieu de peuples incapables de sentir combien cette mort étoit glorieuse & touchante, ne remportant d'autre prix d'une vie sacrifiée à l'étude de la vérité, que l'espérance incertaine qu'un jour le fruit de leurs travaux seroit remis à M. de Linné, & que leur nom réuni au sien, n'échapperoit point à la renommée. M. de Linné, en recevant ces restes précieux, pleura ses Disciples: il revit leurs Ouvrages, les donna au Public; & cet honneur funèbre leur fit naître des successeurs, que l'exemple de leur mort ne put rebuter.

Le système de Linnæus a sans doute quelques endroits foibles; mais jusqu'ici aucune autre méthode n'a réuni autant d'avantages; peut-être même les défauts qu'on reproche à ce système sont-ils inévitables dans toute méthode artificielle: faut-il pour cela les proscrire, & se condamner à marcher à tâtons, parce que le flambeau qu'on nous présente peut s'éteindre quelquefois?

Plusieurs Botanistes ont relevé des fautes dans les détails de la méthode de M. de Linné. Quand il a trouvé leurs remarques justes, il s'est corrigé; lorsqu'elles lui ont paru mal fondées, il a fait comme s'il les eût ignorées. « Toutes les discussions » dans les Sciences naturelles, du moins lorsqu'elles ont un » objet réel, se réduisent toujours, dit M. de Linné, à des » faits bien ou mal observés, & alors les efforts réunis de tous » les Savans ne peuvent ni établir une erreur, ni ébranler une vérité ». Il n'eût donc combattu que pour son amour-propre; mais le temps qu'il eût consacré à défendre sa gloire, il aimoit mieux l'employer à l'accroître par de nouveaux Ouvrages.

On a reproché enfin à M. de Linné d'avoir rendu la nomenclature de la Botanique trop facile, & d'avoir par-là donné lieu à une foule d'ouvrages médiocres. Cette objection nous paroît prouver seulement les progrès que la Botanique a faits entre ses mains. Rien ne montre mieux peut-être

combien une Science est avancée, que la facilité de faire sur cette Science des livres médiocres, & la difficulté d'en faire qui contiennent des choses nouvelles.

M. de Linné a publié une longue suite d'Observations sur les végétaux & les animaux comparés ensemble. Les végétaux naissent, vivent & meurent comme les animaux; ils se nourrissent, croissent & dépérissent comme eux; ils ont, comme eux, un principe interne de mouvement. M. de Linné observa de plus que les Plantes ont des instans de mouvement & de repos, de sommeil & de veille; qu'elles subissent ces alternatives dans des serres où l'on entretient jour & nuit une chaleur égale, & qu'ainsi ces phénomènes ne sont pas l'effet de la chaleur plus ou moins grande, mais de la présence ou de l'absence de la lumière; qu'enfin les feuilles dans quelques Plantes, & les anthères des étamines dans un plus grand nombre, donnent des signes d'irritabilité. La sensibilité, & le mouvement spontané qui en est la suite, paroissent seuls distinguer la vie des Plantes & celle des Animaux.

On observe des rapports encore plus frappans entre l'œuf d'un animal & la semence d'une Plante, dans la manière dont les germes sont fécondés, ou dans les loix de leur développement. Enfin la reproduction par bouture, cette manière de multiplier & d'éterniser l'existence d'un même individu, existe dans les deux règnes, & forme une sorte d'analogie entre les Plantes les plus parfaites & les Animaux les plus imparfaits. Aussi quand on observe la chaîne de tous les genres d'animaux, depuis les quadrupèdes jusqu'aux polypes, on voit l'organisation se simplifier, le mouvement spontané & la sensibilité s'affaiblir, & en même temps les organes destinés à recevoir la nourriture, se multiplier, le principe de la vie, au lieu d'appartenir seulement à l'individu, se trouver tout entier dans plusieurs de ses parties, & l'Animal se rapprocher de la Plante jusqu'à n'en être plus séparé que par des nuances imperceptibles.

Ces rapprochemens ne sont pas les seuls que M. de Linné



ait cru trouver entre les deux règnes ; il en a saisi de très-singuliers entre les substances dont les plantes & les animaux sont composés : nous n'entrerons dans aucun détail sur ces idées ingénieuses, mais trop systématiques. Ceux qui n'ont vu dans M. de Linné qu'un simple Nomenclateur, & qui font consister le talent d'un Naturaliste moins dans l'art de bien voir & de bien lier les faits, que dans celui de former des conjectures hardies & de hasarder des vues générales, ne pourront du moins s'empêcher d'estimer M. de Linné en lisant cette partie de ses Ouvrages.

La Botanique, quelque immense qu'elle soit dans ses détails, ne suffisoit pas à son activité ; il osa former le projet de décrire & de classer tous les êtres de la Nature : il choisit pour les caractères du règne animal, les parties destinées aux fonctions les plus importantes de la vie ; le cerveau ou l'organe, d'où partent les nerfs ; le cœur, ou en général les viscères dans lesquels réside la force qui fait circuler les liqueurs ; les organes de la respiration ; les mamelles, le nombre & la forme des dents ou la figure du bec ; le nombre & la forme des parties qui servent au mouvement progressif : il savoit par ses observations qu'une grande ressemblance dans ces parties essentielles, annonce nécessairement entre des espèces un grand nombre d'autres rapports. Il auroit pu sans doute étendre aux Animaux la méthode qu'il avoit employée pour les Plantes, mais il craignoit que, malgré toute la modestie & la gravité qu'il pourroit mettre dans ses Leçons ou dans ses Ouvrages, cette méthode n'offrît trop souvent à ses Élèves des images que les Naturalistes même n'ont pas toujours le privilège de pouvoir contempler avec une entière indifférence ; il écarta même parmi les organes nécessaires aux autres fonctions de la vie, ceux qu'on ne pouvoit observer sans des recherches anatomiques ; il ne vouloit pas qu'on se crût obligé de déchirer les animaux pour parvenir à les connoître ; ainsi la pureté de ses mœurs & son humanité ont nui peut-être à la perfection, & sur-tout à l'unité de son système. M. de Linné classa les minéraux presque uniquement d'après leurs formes extérieures :

les Chimistes ont fait contre cette méthode des objections, auxquelles il paroît bien difficile de répondre, mais les Naturalistes, ou du moins les Disciples de M. de Linné en auroient pu faire d'aussi fortes contre un système dont l'analyse chimique auroit fourni les premiers caractères; d'ailleurs, lorsque M. de Linné a publié sa méthode, l'analyse des substances minérales étoit bien éloignée du degré de perfection, où l'un de ses compatriotes, le célèbre Bergman, l'a portée depuis. Toute méthode de nomenclature est nécessairement dépendante de l'état des Sciences, à l'époque où elle a été proposée, & ce n'est qu'en la comparant avec leurs progrès, qu'on peut l'apprécier avec justice. Mais en convenant des défauts attachés à toutes les méthodes artificielles, on ne peut s'empêcher de reconnoître qu'il faut, pour les former, joindre une vaste étendue de connoissances au talent de faire des combinaisons & de saisir des rapports; que ces systèmes utiles, nécessaires même pour suivre, sans s'égarer, les détails immenses de l'Histoire naturelle, servent encore à faciliter la recherche des vérités générales; & qu'enfin, s'il y a peu de philosophie à prendre ces arrangemens méthodiques pour la Science elle-même, il y en a bien moins encore à les mépriser.

M. de Linné avoit formé dès sa première jeunesse le projet de son système général, & il s'en occupa toute sa vie. Aucun Naturaliste n'avoit jusqu'à lui conçu un plan si vaste, & si on peut dans l'exécution lui reprocher quelques défauts, c'est encore un prodige qu'un seul homme ait pu la porter à ce point de perfection.

Son système de la Nature eut douze éditions en trente ans; dans chacune il profitoit de ses nouvelles observations, des travaux de ses Disciples, des objections de ses critiques: c'étoit aux Sciences plutôt qu'à sa gloire qu'il vouloit élever un monument: aussi ne doit-on juger ce grand ouvrage que sur sa dernière édition, & regarder les autres comme des esquisses que l'Auteur soumettoit au jugement des Naturalistes.

M. de Linné ne voulut pas que l'Histoire Naturelle fût

entre ses mains une Science stérile : en l'appliquant à des choses d'un usage commun, il étoit utile à ses concitoyens, & il fervoit en même temps la Science qu'il aimoit, puisqu'il la rendoit plus importante aux yeux de ceux dont le secours pouvoit en accélérer les progrès. Ses Ouvrages contiennent un Traité complet de matière médicale; des dissertations sur les Plantes de Suède, qui peuvent être utiles dans la Médecine, & remplacer les Plantes étrangères, sur celles qui peuvent fournir aux hommes une nourriture saine & agréable, ou qui sont employées dans les Arts; sur les végétaux qui conviennent le mieux à chacune des espèces d'animaux domestiques; sur la manière de juger de la vertu des Plantes, soit par les genres où elles sont rangées dans la méthode, soit par leur saveur ou par leur odeur; sur les terrains qui conviennent à chaque espèce; sur des Plantes, qui, semées dans des sables mobiles, peuvent les fixer, préserver le pays des dangers auxquels ces sables l'exposent, & les changer à la longue en des terres fertiles; sur le rapport de la végétation de chaque Plante, avec les différentes saisons de l'année; sur l'origine de plusieurs substances, comme le baume de Tolu, la sarco-colle, la gomme gutte qu'on employoit depuis long-temps, sans savoir quel arbre les avoit produits, & quelles préparations on leur avoit fait subir.

Le suffrage de la plupart des Compagnies savantes de l'Europe, l'adoption presque générale du système de Botanique de Linnæus, avoit appris à la Suède à le regarder comme un Savant qui faisoit honneur à son pays : ses travaux dirigés vers le bien public le montraient à ses compatriotes comme un citoyen utile; l'envie fut réprimée cette fois par l'enthousiasme national. M. de Linné fut le premier homme de Lettres décoré de l'Ordre de l'Étoile polaire, & cette nouveauté fit peut-être moins d'honneur au Savant qui le reçut, qu'aux lumières du Gouvernement de Suède : en accordant cette distinction à M. de Linné, il montrait que l'emploi d'éclairer les hommes étoit à ses yeux une fonction publique, & avoit droit aux mêmes récompenses.

M. de Linné obtint quelques années après un rang dans la Noblesse suédoise ; il retrancha alors de son nom la terminaison latine qu'il y avoit ajoutée, suivant l'usage de son pays : mais ce nom étoit déjà trop illustré pour qu'il fût en son pouvoir de le perdre ; & le Chevalier Von Linné ne fut jamais que Linnæus pour l'Europe savante, comme le Baron de Vérulam n'a jamais été que Bacon pour les Philosophes. Les marques de l'estime personnelle des Princes sont toujours flatteuses pour un Savant qui aime la gloire ; quel que soit le Prince qui les accorde, elles prouvent du moins une grande célébrité. Celles que M. de Linné reçut de ses Souverains, devoient le flatter à d'autres titres : il fut traité par la Reine de Suède, sœur du Roi de Prusse, avec cette familiarité noble qui honore les Souverains, parce qu'elle prouve qu'en se trouvant avec des hommes d'un mérite supérieur, ils sentent qu'ils ont droit de se croire avec leurs égaux.

Le crédit que M. de Linné ne devoit qu'aux Sciences, il le fit servir tout entier à l'avancement des Sciences ; l'établissement de l'Académie de Stockholm fut en partie son ouvrage ; le jardin d'Upsal, remis dans un meilleur ordre, augmenté de vastes serres construites selon ses vues, devint digne du Démonstrateur qui, de toutes les parties de l'Europe, y attiroit des Disciples.

L'hommage de quelques Plantes qui manquoient à ce jardin si riche, étoit un tribut que tous les amateurs de Botanique croyoient devoir à M. de Linné ; & lorsque le Roi de Suède vint en France, le feu Roi le chargea de remettre à l'illustre Professeur d'Upsal, des graines rares qu'il avoit recueillies dans son jardin de Trianon.

Si nous ajoutons à ce que nous avons dit de M. de Linné, qu'il remplit pendant plusieurs années les fonctions de Secrétaire de l'Académie d'Upsal, qu'il donnoit exactement des Leçons de Botanique & de Médecine, enfin, qu'il publia une foule de Dissertations sur des objets particuliers d'Histoire naturelle, de Botanique, de Médecine, qui toutes renferment des vues toujours ingénieuses & quelquefois profondes,

nous aurons donné une idée de la vie de cet Homme célèbre. Elle fut heureuse jusqu'à soixante ans ; sa santé ne fut altérée, avant cette époque, que par une violente attaque de goutte, dont il prévint les retours par l'usage des fraises. Il avoit fait un mariage heureux qui lui a donné trois filles & un fils digne de lui succéder. Il passa des jours tranquilles, glorieux, occupés, au milieu de ses Disciples, qui étoient ses amis, jouissant de sa gloire, que chaque jour il augmentoit encore, de la reconnoissance de son pays, & de cette considération publique que la célébrité & le talent ne peuvent donner, à moins qu'ils ne soient unis à un caractère qui force l'envie au respect. Sensible avec ses amis, aimable & gai dans la société intime, noble avec les Grands, simple & bon avec les inférieurs, on ne le vit jamais acheter par des bassesses le droit de faire éprouver des hauteurs ; d'autant moins jaloux d'affecter une supériorité précaire qu'il étoit plus sûr d'en avoir une réelle. Riche des bienfaits de la Cour, il ne quitta jamais cette simplicité de vie dont on ne peut s'écarter sans en être puni par le ridicule & par l'ennui.

Il employa pour la Nation ce qu'il avoit reçu d'elle : son seul luxe étoit un *Musæum* immense, monument glorieux pour la Suède, puisqu'il étoit la collection des tributs que les Naturalistes du Nord avoient consacrés à celui que, d'une voix unanime, ils avoient nommé leur Chef & leur Maître.

Frappé, au mois d'Août 1776, d'une apoplexie qui détruisit ses forces, affoiblit sa mémoire, & le conduisit au tombeau par un dépérissement lent & insensible, ce *Musæum* étoit encore sa consolation ; chaque jour, la reconnoissance de ses Disciples lui présentait de nouvelles merveilles produites par la Nature aux extrémités du globe : on eût cru voir des enfans occupés de consoler les derniers jours d'un père chéri. Devenu enfin incapable d'agir & de penser, il goûtoit encore quelque plaisir, en parcourant de ses yeux éteints les Plantes nouvelles que son Disciple Thunberg venoit de lui envoyer des extrémités de l'Asie.

Très-peu de temps après son attaque d'apoplexie, il  
dressa

dressa lui-même une courte notice de sa vie, & il voulut qu'elle fût envoyée à l'Académie pour servir de matériaux à son Éloge: c'est avec une égale simplicité qu'il y parle de ses travaux, de ses découvertes, ou qu'il convient de ses défauts. Il avoue qu'il fut peut-être trop facile à s'émouvoir, ou à s'irriter; que lent à embrasser une opinion, il tenoit peut-être avec trop d'opiniâtreté à celles qu'il avoit une fois adoptées; qu'il ne souffrit avec assez de modération, ni les critiques qui s'élevèrent contre lui, ni les contradictions qu'il éprouva de la part de ses rivaux. Ces aveux prouvent seulement que M. de Linné eut pour la gloire une passion véritable, & que cette passion a comme toutes les autres, ses excès & ses faiblesses; mais combien peu d'hommes ont comme lui le courage d'avouer ces faiblesses, & sur-tout le courage plus rare d'en souffrir seuls & dans le secret? Car en jugeant M. de Linné, d'après sa conduite, personne ne l'eût soupçonné de ces défauts, & pour qu'ils fussent connus, il a fallu qu'il les révélât.

Ainsi ce soin de s'occuper de son Éloge, qui dans un autre eût été peut-être l'effet d'un vain amour-propre, ne fut chez lui qu'une nouvelle marque de son amour pour la vérité. Après avoir combattu toute sa vie contre les erreurs, il ne voulut pas laisser subsister celles que l'admiration ou l'envie auroient pu accréditer pour ou contre lui.

L'extrême laconisme des Ouvrages de M. de Linné, l'usage peut-être trop fréquent de termes techniques souvent tirés du Grec, la manière de tout réduire en Tables, en rendent la lecture difficile; il faut les étudier plutôt que les lire: à la vérité, on en est dédommagé par la précision des idées, & par l'avantage de voir d'un coup-d'œil un plus grand nombre de résultats. M. de Linné trouvoit sans doute que plus la vérité est nue, plus elle est belle; & que les ornemens dont on cherche à la parer, ne font que la cacher; il songeoit à former des Naturalistes, plus qu'à amuser des Amateurs; il vouloit des Disciples, & dédaignoit de chercher des Prôneurs.

*Hist. 1778.*

L

Il n'ignoroit pas néanmoins combien il est utile de répandre le goût des véritables Sciences dans toutes les classes d'hommes qui peuvent avoir sur le bonheur des Nations, une influence plus ou moins grande; il favoit qu'après avoir obtenu la gloire de reculer les bornes des Sciences, il restoit au Philosophe l'obligation de les rendre utiles, & qu'elles n'étoient utiles qu'autant qu'elles devenoient populaires: mais pour faire goûter les Sciences à des hommes dissipés, avides de plaisir, ennemis du travail, moins jaloux de savoir que de se faire honneur de ce qu'ils savent, il faut avoir l'art de s'emparer de leur imagination par des peintures séduisantes, de soutenir leur attention par des traits ingénieux ou brillans, de réduire la Science à des résultats piquans & faciles à saisir. M. de Linné sentit que cet art lui manquoit, & peut-être même eût-il l'injustice de le mépriser, comme le talent de ceux que la Nature a formés pour publier & non pour découvrir les secrets.

Ce n'est pas que dans les Ouvrages qu'il a donnés en sa langue naturelle, ses Compatriotes n'aient trouvé un style élégant & agréable, & le genre d'éloquence le plus rare de tous; le seul aussi peut-être qui convienne vraiment à des Ouvrages philosophiques, & qui consiste à renfermer beaucoup d'idées en peu de mots, & à exprimer dans un style noble & simple des vérités neuves & importantes: mais cette éloquence n'est pas celle qui frappe le grand nombre, & comme c'est aux passions des hommes qu'il faut parler, si l'on veut les conduire, c'est à leur imagination qu'il faut s'adresser, si l'on aspire à régner sur leurs goûts ou sur leurs opinions.

On voit dominer dans tous les Ouvrages de M. de Linné, un grand respect pour la Providence, une vive admiration de la grandeur, de la sagesse de ses vues, une tendre reconnaissance pour ses bienfaits; ce sentiment n'étoit point en lui une croyance inspirée par l'éducation; ce n'étoit pas même cette conviction que l'on conserve après avoir examiné & discuté une fois dans la vie les preuves d'une opinion. Il

croioit à la Providence, parce que chaque jour, de nouvelles observations sur la Nature lui en fournissoient de nouvelles preuves : il y croioit, parce que chaque jour, il la voyoit agir sous ses yeux. « L'homme physique qui use de la Nature, est, disoit-il, comme un Roi qui a droit d'exiger de ses Sujets ce qui est nécessaire à ses besoins, & qui les fait servir « à l'accomplissement de ses desseins; s'il abuse de son pouvoir, « il apprend bientôt par la résistance de ses Sujets même, « que les Rois ont été établis pour les Peuples, & non les Peuples « pour les Rois, & qu'il n'a reçu l'empire sur la Nature que « pour servir à conserver dans l'Univers l'ordre que la Provi- « dence y a établi. Ainsi tandis que les végétaux fournissent « à tous les animaux leur nourriture, une retraite, un abri pour « les générations naissantes, ces mêmes animaux, quelquefois « nécessaires à la reproduction des Plantes, servent encore par « la destruction même qu'ils font des végétaux, à maintenir « entre les différentes espèces, un équilibre qui en assure la « perpétuité; l'on peut dire en un sens que les animaux ont « été formés pour les plantes, comme les plantes pour les « animaux : ou plutôt toutes les parties de la Nature subor- « données entr'elles, mais nécessaires l'une à l'autre, forment « un ensemble aussi frappant par l'unité du plan que par la « sagesse des vues de son Auteur ».

L'existence des poisons n'étoit même pour M. de Linné, qu'une raison de plus d'admirer les soins de la Providence pour l'espèce humaine. « La Nature, disoit-il, n'a préparé des poisons dans l'ordre physique, que pour assurer à l'homme « des remèdes contre les maladies rebelles & invétérées ; « comme dans l'ordre moral, elle abandonne quelquefois les « Peuples à des tyrans qui deviennent entre les mains des « moyens violens, mais efficaces de rappeler à la vie des « Nations engourdies & corrompues ».

M. de Linné, préparé depuis long-temps à la mort par l'affoiblissement de ses organes, la reçut comme un doux sommeil qui délivre d'un état de langueur & d'angoisses. Il mourut vers la fin du mois de Janvier 1778, regretté



#### 84 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE, &c.

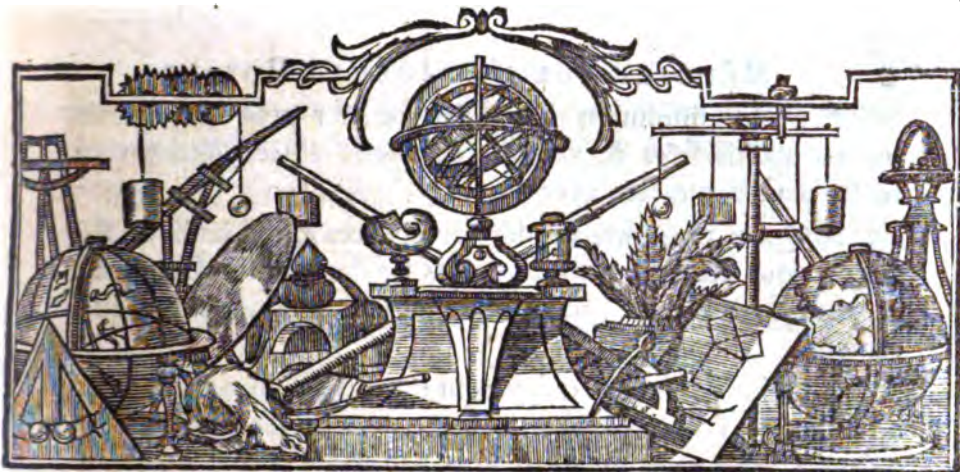
de sa famille & de ses Disciples, qui le chérissent comme un père, parce qu'ils en avoient trouvé en lui la tendresse vive & désintéressée ; honoré des regrets d'une Nation généreuse, passionnée pour toutes les espèces de gloire, capable d'enthousiasme, parce qu'elle l'est d'héroïsme, & qui n'attend point pour rendre hommage à ses Grands hommes, qu'ils ne puissent plus jouir des honneurs qu'elle leur décerne.

Après la mort de M. de Linné, le Roi de Suède lui a fait élever un monument à côté de celui que le même Prince a consacré à ce Descartes, qui, négligé dans sa patrie après sa mort comme pendant sa vie, attend encore de ses compatriotes les honneurs que les Étrangers lui ont prodigués. Un Temple digne de la magnificence de Rome & du goût d'Athènes, a remplacé dans cette capitale l'église modeste où les cendres de Descartes avoient été déposées ; & la France peut espérer d'y voir enfin, ce qui seroit le plus bel ornement de ce Temple, un Mausolée de Descartes qui acquittât envers lui la dette de la Nation.

Nous n'oublierons pas ici un autre monument qu'un des Disciples de M. de Linné lui a consacré dans l'église d'Édimbourg, monument plus glorieux peut-être pour le savant Suédois, que celui qu'il a obtenu dans sa patrie : parce qu'érigé au milieu d'une Nation étrangère, il est l'hommage d'une admiration absolument désintéressée.

La place d'Associé-Étranger que M. de Linné occupoit à l'Académie des Sciences, a été remplie par M. Pringle, premier Médecin de la Reine d'Angleterre, & ci-devant Président de la Société royale.





M É M O I R E S  
D E  
M A T H É M A T I Q U E  
E T  
D E P H Y S I Q U E,  
*T I R É S D E S R E G I S T R E S*  
*de l'Académie Royale des Sciences.*  
Année M. DCCLXXVIII.

---

O B S E R V A T I O N S  
S U R  
*QUELQUES COMBINAISONS SALINES DU FER.*

Par M. D E L A S S O N E.

**J**E me propose dans ce Mémoire de rechercher & d'établir  
par une suite de faits & d'observations :  
1.<sup>o</sup> De quelle manière le fer se combine, selon diverses  
circonstances, avec l'acide concret du tartre:

*Mém. 1778.*

A

## 2 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

2.<sup>o</sup> Si la dissolution immédiate du fer peut être opérée par les alkalis fixes & volatils, & quelle espèce d'union ce métal peut contracter avec eux :

3.<sup>o</sup> Quels phénomènes dérivent de ces combinaisons salines, pour éclaircir certains points de la théorie chimique, & pour faire mieux connoître la nature de quelques médicaments.

Les Chimistes savent qu'on peut procéder de deux manières à l'union de l'acide concret du tartre avec le fer, c'est-à-dire qu'après avoir mêlé deux ou trois parties de crème de tartre en poudre avec une partie de limaille pure de fer, si ce mélange est successivement humecté & digéré long-temps à froid ou à un foible degré de chaleur, en remuant souvent la matière, & y versant de temps en temps de l'eau simple ou de l'eau-de-vie, on parvient enfin à former une masse homogène, noirâtre, tenace, visqueuse, dont on peut faire des boules martiales; ou bien le même mélange de limaille de fer & de tartre en poudre, étant soumis un temps suffisant à une ébullition rapide dans l'eau, on obtient promptement une composition saline, qu'on ne croit pas différer de la précédente, par la manière dont l'acide tartareux y est combiné avec le fer; & comme elle est préparée par un procédé plus expéditif, on s'en sert de préférence, soit qu'on veuille faire les boules martiales ou le tartre martial soluble : mais plusieurs expériences, dont je vais exposer les détails, m'ont appris, qu'il existe réellement une différence notable entre les deux combinaisons salines du tartre & du fer précédemment décrites, c'est-à-dire que l'acide tartareux s'y trouve uni au métal, d'une manière absolument différente.

1.<sup>re</sup>  
EXPÉRIENCE. Étant donnée la première combinaison de tartre & de fer, préparée, comme il a été dit, par une longue digestion, & mise ensuite en boules martiales; je fais infuser dans l'eau froide ou tiède, cette masse saline, pour en avoir une dissolution ou teinture très-foncée. Sur une portion de cette liqueur filtrée par le papier, si je verse la teinture de noix de gale,

## DES SCIENCES.

j'obtiens sur le champ de l'encre très-noire, preuve évidente que la liqueur ainsi éprouvée, contient du fer.

Sur une autre portion de la même teinture, si je verse la liqueur alcaline saturée de la partie colorante du bleu de Prusse, il n'arrive nul changement de couleur.

II.  
EXPÉRIENCE.

Une portion de la même teinture martiale ayant été soumise à l'ébullition dans une fiole de verre, si, dans le temps qu'elle est encore chaude, ou après qu'elle est entièrement refroidie, ces deux circonstances ne changent rien au résultat, j'y verse l'alkali Prussien; sur le champ paroît le bleu: ce qui n'arrive point, comme on l'a vu, avant l'appropriation de la liqueur par l'ébullition.

III.  
EXPÉRIENCE.

On pourroit, d'après ces trois expériences, proposer un Problème de Chimie, qu'on trouveroit sans doute fort difficile à résoudre, si l'on ignoroit les faits précédens, qui en donnent la solution complète. Il faudroit énoncer ainsi ce Problème :

*Étant donnée la dissolution d'une combinaison du fer avec un sel acide, y développer à volonté ou ne pas y développer le bleu de Prusse, en y ajoutant l'alkali Prussien sans mélange ultérieur d'aucune autre substance.*

On vient de voir, qu'après avoir fait subir l'ébullition à la teinture saline de Mars, l'alkali Prussien, par son mélange, y développe ensuite le bleu de Prusse; mais il est possible, même dans ce cas, de ne point obtenir de bleu de Prusse: pour cela, il ne s'agira que de mêler d'abord l'alkali Prussien avec la teinture saline de fer, avant que de la soumettre à l'ébullition; car si l'on fait bouillir ensuite ces deux liqueurs déjà réunies, il ne se développe plus de bleu de Prusse; la liqueur se trouble & ne prend que la couleur de vert sale, laquelle se soutient, à moins que l'on n'ajoute ensuite un acide quelconque, soit acéteux, soit minéral, qui dans l'instant avive & fait paroître le bleu de Prusse.

IV.  
EXPÉRIENCE.

Voilà des faits, que je crois d'autant plus remarquables

#### 4 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

qu'ils semblent au premier coup - d'œil devoir faire une exception à la règle générale, établie pour la formation du bleu de Prusse. *Tout fluide, a-t-on dit, qui contient du fer dissout par un acide quelconque, donnera du bleu de Prusse en y mêlant l'alkali Prussien*; cependant je viens de faire observer, que l'on ne forme point ce bleu en versant l'alkali Prussien en liqueur sur la teinture bien chargée des boules martiales préparées par digestion, lorsque la dissolution a d'abord été faite avec l'eau froide ou même chaude, pourvu que cette chaleur n'ait point été poussée jusqu'au degré de l'ébullition: or étant bien démontré par l'épreuve de la teinture de noix de gale, que cette dissolution de boule martiale contient réellement le fer combiné avec le tartre, qui est un acide concret, on se croiroit, ce me semble, autorisé par ce seul fait isolé, à infirmer ou à modifier la règle proposée d'une manière générale, & comme une espèce d'axiome; mais cette première induction ne seroit qu'une erreur facile à découvrir, en considérant de plus près ce même fait, non pas simplement isolé, mais revêtu des circonstances qui l'accompagnent, & cet examen plus approfondi, indique encore des différences bien réelles entre les combinaisons du tartre & du fer préparées, comme je l'ai dit, par ébullition ou par simple digestion.

Je vais donc essayer de développer actuellement la théorie & l'étiologie des divers phénomènes qui résultent de ces combinaisons salines du fer, & que je n'ai d'abord énoncées que d'une manière générale.

L'acide concret du tartre a dans la mixtion intrinsèque deux parties essentielles & bien distinctes, un principe huileux & un principe acide; il agit sur quelques corps, tantôt par l'une, tantôt par l'autre de ces substances, prises séparément, tantôt par les deux à la fois: il y a des faits positifs qui le prouvent. Qu'il me soit permis de citer ce que j'en ai déjà dit dans mes Mémoires sur le Zinc & sur la Chaux vive.

Or le tartre étant un sel acide concret, qui n'est soluble

& ne peut rester dissous & étendu que dans l'eau bouillante; & tout sel en général n'étant capable d'agir sur les autres corps que lorsqu'il est dans un état de fluidité, c'est-à-dire réduit par son extension dans un fluide à l'unité des molécules primitives, qui constituent son agrégation; il s'ensuit que dans la composition des boules martiales, si l'on procède en mêlant la limaille de fer & le tartre en poudre, & en humectant peu-à-peu ce mélange soit avec de l'eau-de-vie pure, soit avec l'eau-de-vie & l'eau, soit avec l'eau seule, ayant l'attention de n'employer pour favoriser l'action réciproque qu'une simple digestion, le tartre ne sauroit alors attaquer le fer & s'y combiner par sa partie purement acide; mais puisque malgré cette impuissance de l'acide pur, il se fait une combinaison réelle du fer & du tartre, elle ne peut & ne doit s'opérer d'abord que par le *latus* huileux du tartre, qui se développe ici d'une manière si bien apparente.

Une telle dissolution de fer, dans laquelle il existe à la vérité un acide, mais qui ne tient au métal que par une autre substance interposée & intermédiaire, c'est-à-dire par le *latus* huileux, ne doit point former de bleu de Prusse, en y versant l'alkali Prussien, parce que cet alkali ne pouvant rompre ni détruire la combinaison préexistante du fer, il n'arrive ni précipitation du métal, ni séparation de la matière colorante; aussi ne résulte-t-il de ce mélange nul changement, nulle altération sensible.

Tout étant ainsi disposé, si l'on introduit dans ce premier mélange un acide tout-à-fait analogue, tel que l'acide acéteux pur & distillé, qui sans nulles entraves agisse immédiatement sur le fer & le dissolve; alors l'alkali Prussien reprend ses droits; il se fait entre lui & la nouvelle dissolution du fer, une double décomposition, & le bleu de Prusse se démontre aussitôt dans la liqueur.

Si en procédant par une autre voie, on n'ajoute point un nouvel acide végétal, mais que l'on approprie par le moyen de l'ébullition, la teinture bien chargée & faite d'abord à froid de la boule martiale, où le fer n'est encore combiné

## 6 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

avec le tartre que par le *latus* huileux de cet acide concret, on achève ainsi de combiner ce métal avec l'autre portion acide du tartre; & dès-lors cette dissolution complète réunit toutes les conditions requises pour que l'alkali Prussien intervenant, le bleu de Prusse soit bien développé.

Mais si sur la même teinture martiale, extraite par l'eau froide ou simplement tiède, je verse d'abord l'alkali Prussien, & que je fasse ensuite bouillir le mélange, il ne se forme point alors de bleu de Prusse; la liqueur se trouble & ne prend qu'une couleur sale verdâtre, parce que le mouvement rapide & violent de l'ébullition déterminant une action & réaction tumultueuses entre les principes qui ont une affinité réciproque, la précipitation de toutes les parties du fer se fait confusément, en même temps que la portion acide du tartre, brusquement saisie & arrêtée par l'alkali devenu libre, ne peut plus aviver le précipité en attaquant la partie dissoluble jaune du fer.

Il paroît donc par ces détails, que la théorie de la formation du bleu de Prusse, proposée par le savant Chimiste qui en est l'auteur, ne souffre réellement nulle exception de la part du fait singulier qui semble d'abord en être une : on y trouve au contraire de nouvelles preuves qui la confirment.

Il se présente ici de nouvelles remarques à faire.

1.<sup>o</sup> Le Docteur Willis, à qui doit être attribuée, je crois, la première composition des boules martiales, procédoit en humectant peu - à - peu le mélange du tartre & du fer, & favorisoit la combinaison par une simple digestion. L'opération par cette voie, sans être difficile ni embarrassante, est fort longue, car elle exige au moins trois mois; mais on obtient une masse bien homogène & assez visqueuse, pour que, sans le secours & l'intermède d'aucun mucilage étranger, on puisse former avec elle des boules capables de contracter d'elles-mêmes, en séchant doucement, une consistance bien ferme, & de conserver à leur surface un luisant inaltérable par la rouille : telle est la formule exacte, & telle devoit être toujours la composition des vraies boules martiales.

Or il paroît, par les observations précédentes, que dans les boules martiales ainsi préparées, le tartre n'est encore uni au fer que par son *latus* huileux; que par conséquent le fer y existe dans un grand état de division pur & entier, c'est-à-dire revêtu de tout son phlogistique, & de plus enduit & pénétré par la substance huileuse du tartre, qui le préserve de la rouille, & contribue à lui imprimer un caractère demi-salin.

2.<sup>o</sup> Ceux qui procédant pour la composition des boules martiales, par une voie différente de la précédente, ont l'intention de simplifier ou plutôt d'abrégé beaucoup l'opération, en combinant rapidement le tartre & le fer, par l'ébullition dans l'eau, parviennent sans doute à former cette combinaison; mais la masse qu'on obtient n'est pas à beaucoup près si visqueuse: il faut donc, si l'on veut en former des boules qui aient assez de liant & de ténacité pour ne pas être exposées à s'entr'ouvrir, se fendre, s'égrainer, & à perdre le luisant de leur surface, y mêler ensuite un mucilage épais, qui aglutine mieux les molécules, & forme sur la surface une sorte de vernis; de plus, il est évident, par les remarques précédentes, qu'ici le fer se trouve dans un état différent, puisqu'il est entré en combinaison avec la portion acide du tartre, & qu'il doit ainsi avoir été privé d'une portion de son phlogistique, conformément à l'action semblable que tout acide exerce sur ce métal. Je croirois donc la première combinaison préférable; & de-là, je conclus, que dans la vue de réformer, ou de simplifier, ou même de perfectionner certaines compositions médicinales, telles qu'on les a d'abord publiées, il faut en général beaucoup de réserve & de circonspection pour les changemens qu'on croit à propos & quelquefois utiles d'y faire, à moins qu'on ne soit bien assuré que ces changemens seront absolument sans conséquence.

3.<sup>o</sup> Puisqu'il existe certaines combinaisons du fer avec une substance acide, sans néanmoins qu'on puisse y démontrer la présence de ce métal par l'action & le mélange de l'alkali



Prussien ; il faut en conclure , que ce même alkali ne doit point être admis , sans exception , comme un sûr indice du fer , c'est-à-dire comme un moyen assuré de le démontrer & de le rendre apparent dans toutes ces dissolutions salines. Or , puisque je viens de faire voir encore que la noix de gale décide la présence du fer dans les circonstances où l'alkali Prussien ne produit point cet effet , il en résulte pareillement , que cette noix de gale paroît être une pierre de touche du fer , préférable dans presque tous les cas , ou du moins , que dans toute opération de Chimie où il s'agira de rechercher si le fer existe dans quelque combinaison , il faudra toujours employer ces deux moyens , dont la réunion ne peut plus laisser de doute dans les résultats qui doivent indiquer ou la présence ou l'absence du fer , sur-tout en faisant intervenir encore dans les essais l'addition d'un acide pur comme complément des épreuves.

4.<sup>o</sup> Puisque l'acide concret du tartre s'unit avec le fer , tantôt par son *latus* huileux seulement , tantôt par ce même principe & par son *latus* acide , & que dans l'un & l'autre cas , le principe huileux du tartre se trouve également développé & atténué , il s'ensuit , qu'alors l'esprit-de-vin digéré sur le tartre martial soluble , pour en extraire une teinture foncée , ne se charge d'une assez bonne quantité de ce sel métallique , qu'il tient en dissolution , qu'à la faveur du principe huileux , qui paroît devoir être le moyen unissant entre les deux substances.

Mais peut-on admettre la même théorie pour la formation de la teinture martiale de Ludovie ? On fait que pour la préparer , on fait d'abord un mélange de l'acide concret du tartre avec le vitriol de Mars calciné à blancheur , c'est-à-dire dépouillé de son eau de cristallisation , & qu'ensuite après avoir fait bouillir long-temps dans l'eau ces deux matières pour opérer leur pénétration réciproque , & les réduire en consistance d'extrait solide , on y verse de bon esprit-de-vin , qui par une simple digestion dissout une portion de tout ce qui forme la masse métallique , c'est-à-dire ,  
du

du tartre & du vitriol; car il suffit de goûter cette teinture, pour y bien reconnoître la saveur âpre, austère & métallique du vitriol martial. Or, comme il est certain, que l'acide concret du tartre seul, & sans avoir encore souffert d'altération, ni le vitriol de Mars calciné à blancheur ne sont point séparément solubles dans l'esprit-de-vin bien déphlegmé, & que de plus en réduisant, par le moyen de l'ébullition, le mélange de tartre & de vitriol martial en une espèce de magma visqueux & noir, & presque semblable en tout au tartre martial soluble, on produit ici la même atténuation, le même développement du principe huileux; on peut en inférer, que le *latus* huileux du tartre ayant eu une action bien marquée sur le vitriol martial avec lequel il s'est lié, devient encore ici le moyen unissant entre l'esprit-de-vin & les deux autres substances, qui entrent dans la teinture martiale de Ludovic, & qui lui donnent pour l'usage médicinal une propriété tonique bien supérieure, & plus efficace dans certains cas à celle des autres teintures martiales.

5.<sup>o</sup> Puisque le tartre martial soluble, soit qu'il ait été préparé par une ébullition rapide, dans l'eau, soit par une digestion lente, peut former par son mélange avec la décoction de noix de gale, ou toute autre substance végétale, astringente, une encre noire; on a donc ici un moyen de faire une belle teinture noire sans vitriol, & qui par cette raison auroit peut-être moins de causticité, & seroit moins sujette à brûler les étoffes pénétrées de cette couleur. Quoi qu'il en soit, voici le procédé que j'ai suivi pour composer sans vitriol une encre excellente très-promptement.

Je fais d'abord une décoction de noix de gale, que je rends légèrement glutineuse, en ajoutant une petite quantité de racine de grande consoude, qui, selon la remarque de Hellot, dans son *Traité des Teintures*, fournit le gluten le plus convenable pour cette composition. Dans la décoction ainsi préparée & encore chaude, je plonge une boule martiale suspendue par un fil en forme de nouet; je préfère les boules martiales, faites après une longue digestion du tartre & du

fer, & ce qui a été dit sur cette préparation fait assez sentir les motifs qui déterminent cette préférence : je continue l'infusion de la boule, en l'agitant souvent dans la liqueur, jusqu'à ce que j'aie obtenu une encre très-noire qui se conserve bien.

Après cet examen des principales teintures martiales spiritueuses, dont la théorie étoit obscure, je vais donner des détails sur quelques nouvelles teintures martiales alkales, différentes de celles de Stahl, & qu'on peut mettre aussi au rang des médicamens; ces expériences détermineront d'une manière positive, l'action immédiate & très-peu connue que peuvent exercer les alkali fixes & volatils par la voie humide sur le fer, avant qu'il ait éprouvé aucune altération.

Sur deux gros de limaille de fer très-pur, j'ai versé dans une fiole de verre mince, deux onces d'alkali volatil en liqueur bien saturée, & nouvellement dégagée du sel ammoniac par l'alkali fixe : ces deux circonstances sont toujours essentielles lorsqu'on veut bien juger de l'action de ce dissolvant sur les substances métalliques qu'il est capable d'attaquer. Le mélange ayant été placé sur un bain de sable à une chaleur très-tempérée, l'alkali volatil a agi sur le fer avec une effervescence très-sensible, moins vive cependant & moins soutenue que celle qui a lieu dans la dissolution complète du zinc \*; l'effervescence ayant cessé, le degré de chaleur du bain de sable a été augmenté de manière à tenir en ébullition l'alkali volatil; il n'y a point eu de nouvelle effervescence : après six jours de digestion, la liqueur a été profondément colorée, & la plus grande partie du fer est restée sans être dissoute.

La liqueur éprouvée avec la teinture de noix de gale ne devient point noire : ce mélange occasionne une sorte de décomposition dans la teinture martiale; elle blanchit d'abord, & donne quelque temps après un précipité assez abondant,

---

\* Voyez ce que j'en ai dit dans mon second Mémoire sur le Zinc, où je détaille ce phénomène.

de couleur purpurine ; mais l'affusion d'un acide forme sur le champ de l'encre noire : l'alkali Prussien ne produit rien.

Cette nouvelle teinture alkaline de Mars pourroit être employée utilement en Médecine dans des cas particuliers , où il conviendrait d'user d'un remède stimulant, tonique & pénétrant.

L'alkali volatil caustique digéré long-temps sur le fer , n'a paru avoir absolument aucune action sur ce métal , qui a conservé tout son brillant métallique.

L'alkali fixe en liqueur très-saturée , ou étendue & affoiblie avec l'eau distillée , n'a pas plus agi ; il est arrivé seulement , que par le progrès de la digestion , le fer est devenu aussi noir que l'éthiops martial ; d'ailleurs , je me suis assuré par les épreuves nécessaires , que ces deux liqueurs alkalines ne tenoient pas en dissolution la moindre parcelle de fer.

Je fis digérer ensuite deux gros de limaille de fer bien pur , dans deux onces d'alkali fixe caustique ou lessivé des Savonniers ; après trois jours de digestion , la liqueur alkaline avoit pris une teinte rougeâtre : je l'examinai en cet état. L'alkali Prussien n'y produisit aucun changement ; mais le mélange de la teinture de noix de gale développa une couleur d'un beau cramoisi foncé : quoique la limaille de fer , restée au fond du vaisseau de verre , conservât son brillant métallique , elle paroissoit bien plus noire ; je remis le tout au bain de sable , & continuai encore la digestion six jours de suite ; après avoir affoibli la lessive des Savonniers avec quatre onces d'eau distillée ; la liqueur prit une couleur beaucoup plus foncée ; alors éprouvée de nouveau avec la noix de gale , sur le champ elle devint noire ; mais avec l'alkali Prussien , la couleur bleue ne parut qu'après l'affusion d'un acide.

C'est ici une autre teinture martiale alkaline assez semblable à celle de Stahl.

Il est donc certain par ces expériences , que l'alkali volatil dégagé par l'alkali fixe , & que l'alkali fixe caustique sont les seuls dissolvans alkalins du fer par la voie humide : j'ai

12 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

démontré ailleurs, que ces deux mêmes dissolvans sont aussi les seuls qui agissent sur le zinc, mais d'une manière beaucoup plus marquée; cependant il existe ici, à l'égard du fer, une différence notable, c'est que l'alkali volatil en liqueur dégagé par l'alkali fixe, qui dissout presque en un instant la chaux du zinc, comme je l'ai fait connoître, n'a pas la moindre action sur la chaux du fer, soit qu'elle ait été préparée par la calcination, soit qu'elle ait été séparée par précipitation du vitriol martial, & ensuite bien édulcorée.

Mais malgré cette disparité, on voit par l'ensemble des faits précédens, une sorte de similitude entre les deux substances métalliques; & si c'étoit ici le lieu de discuter plus particulièrement cette analogie, déjà si fort soutenue par Henckel, plusieurs autres faits, que je pourrois produire, seroient capables de l'établir d'une manière encore plus frappante.



*OBSERVATION  
AU SUJET DE DEUX ANIMAUX,  
DONT  
LE MÂLE ACCOUCHE LA FEMELLE.*

Par M. DEMOURS.

LES Naturalistes sont intarissables sur les éloges qu'ils prodiguent à l'industrie des Animaux; ils prétendent que c'est d'eux que les Hommes ont appris les Arts les plus utiles, & il en est qui outrent la matière jusqu'à dire que nous leur avons obligation des Sciences même les plus abstraites (a). La Médecine, au rapport de Pline & de plusieurs autres Naturalistes, doit à l'hippopotame l'usage de la saignée; celui des lavemens à cette espèce de cigogne, qui, à raison de son utilité, fut autrefois adorée des Égyptiens, sous le nom d'*Ibis*: l'ours & le chien, selon ces mêmes Naturalistes, lui ont indiqué l'utilité du vomissement, que ces animaux se procurent selon leurs besoins; *le premier, disent-ils, en avalant des fourmis, & le second en mangeant des feuilles de chiendent.* Heureusement pour la Médecine, le fait dont il s'agit dans ce Mémoire n'a pas été connu de ces Naturalistes; ils n'auroient pas manqué de dire aussi qu'elle doit l'art des accouchemens à l'animal qui fait le sujet de cette observation.

Lit  
le 21 Janvier  
1778.

Dans les grands jours d'été, je rencontrai sur le soir, proche de quelques marches qui étoient autrefois auprès du grand bassin du Jardin du Roi, où j'occupois alors la place de Démonstrateur & Garde du Cabinet d'Histoire Naturelle,

---

(a) *Giovanni Bonifacio, l'Arti liberali & mecaniche, come siano state dagli animali irrationali, agli Huomini dimostrate.*

deux crapauds de terre de la petite espèce (b), qui étoient accouplés; j'aperçus que le mâle remuoit beaucoup les pattes de derrière; la curiosité me fit approcher pour voir quelle étoit la cause des mouvemens qu'il se donnoit. Deux faits également nouveaux pour moi, & que je ne sache pas avoir été encore observés, me surprirent en même temps; le premier étoit la difficulté avec laquelle la femelle faisoit la ponte, & cette difficulté étoit si grande, qu'elle avoit besoin d'un secours étranger, ce qui n'est point ordinaire à aucun des animaux que nous connoissons; le second est que le mâle travailloit avec beaucoup d'action à lui tirer les œufs avec les pattes de derrière, & qu'il faisoit les fonctions d'un véritable accoucheur.

Je ne saurois dissimuler la joie que me causa la vue d'un fait aussi nouveau; mon attention redoubla, & je m'assis doucement par terre pour les observer de plus près, & pour examiner sur-tout si le mâle arrosoit de sa liqueur séminale les œufs à mesure qu'il les tiroit du réceptacle de la femelle.

Pour bien entendre la mécanique de cet accouchement, il faut savoir en premier lieu que les pattes de ces animaux, tant celles de devant que celles de derrière, sont divisées en plusieurs doigts, & que c'est par leur moyen, que le crapaud mâle tire les œufs du fondement de la femelle, de la manière qu'il sera dit ci-après.

En second lieu, que ces animaux s'accouplent comme les grenouilles, c'est-à-dire, que le mâle monté sur le dos de la femelle, l'embrasse avec les pattes de devant; la seule différence qu'il y a entre l'accouplement des crapauds dont il s'agit, & celui des grenouilles, est que dans celles-ci le mâle a les pattes assez longues pour embrasser entièrement la femelle, & pour entrelasser les doigts les uns dans les autres; elles sont plus courtes dans le crapaud, & ne peuvent se joindre de même: de sorte qu'elles n'atteignent qu'aux deux côtés de la poitrine, où il les applique si fortement qu'il y

---

(b) *Rubeta minor*, *Gesneri*.

survient souvent une échymose, avant que ces animaux se séparent.

Il faut remarquer troisièmement, que les œufs de cette espèce de crapaud sont formés chacun d'une coque membraneuse très-forte, dans laquelle est contenu l'embryon, & que les œufs qui ont environ deux lignes de longueur, & qui sont oblongs, sont attachés les uns aux autres par un filet court & très-fort. Pour donner une idée assez juste de ces œufs, on peut les comparer à un chapelet, dont les grains seroient distans les uns des autres d'environ la moitié de leur longueur : ces œufs sortent par le fondement, parce que le réceptacle dans lequel ils sont contenus jusqu'au temps de l'exclusion, s'ouvre à la partie inférieure du *rectum*.

Il y a lieu de croire que la femelle fait beaucoup d'efforts pour faire sortir le premier œuf; mais dès qu'il l'est, c'est au mâle à faire le reste : c'est alors qu'il commence à faire les fonctions d'accoucheur, & il s'en acquitte avec une adresse qu'on ne soupçonneroit pas dans un animal naturellement aussi peu agile. Il avoit déjà tiré un second œuf, lorsque je le vis dans cette grande agitation qui fixa sur lui mes regards, & il faisoit des efforts redoublés pour tirer le suivant; le premier étoit engagé entre les deux doigts du milieu de la patte droite, par le filet qui l'attachoit au second, & c'est en allongeant la patte qu'il les faisoit sortir par le fondement de la femelle, qui pendant ce temps-là restoit immobile. Il tâchoit aussi de se saisir du cordon avec la patte gauche, & il s'y prit à plusieurs reprises avant que d'en venir à bout. Ma présence sans doute lui causoit quelques distractions; car tantôt il s'arrêtoit tout court, & alors il jetoit sur moi des regards fixes qui dénotoient son inquiétude ou sa crainte; tantôt il reprenoit son travail avec plus de précipitation qu'auparavant, & un moment après il opéroit d'une manière si nonchalante qu'il paroïssoit indécis s'il devoit continuer ou non : la femelle elle-même marquoit aussi son embarras par des mouvemens qui interrompoient quelquefois le mâle dans son opération; mais elle ne parut jamais vouloir rentrer sous la pierre d'où elle étoit sortie.



Enfin, soit que le silence que j'affectai, & l'immobilité où je me tins eussent diminué leur crainte, soit que le cas fût pressant, la femelle se tint tranquille, & le mâle se remit en devoir de continuer son opération: il ne fut pas long temps sans s'emparer du cordon des œufs avec les doigts de la patte gauche, & alors il le tira avec la force réunie des deux, qu'il alongeoit tout doucement; lorsqu'il eut fait sortir de ce cordon, aussi long que ses pattes pouvoient s'étendre, il écarta la gauche sans abandonner les œufs qui y étoient engagés, & continua à tirer avec la droite seule. Ici les difficultés recommencèrent: la portion du cordon qui étoit déjà passée entre les deux doigts du milieu de cette patte droite, l'empêchoit souvent de le saisir de nouveau de ce cordon avec la même patte; il s'y prit à plusieurs reprises avant que d'y parvenir; il s'arrêta même plus d'une fois tout court. Je craignois quelquefois que les mouvemens de tête que j'étois obligé de faire pour l'observer de plus près, ne fussent la cause de cette interruption, & alors je restois immobile, & retenois jusqu'à ma respiration: d'autres fois j'accusois la difficulté de l'opération même, & alors j'étois tenté de l'aider, mais la crainte de l'interrompre m'arrêtoit aussitôt.

Mon attention jusqu'alors avoit eu deux objets qui la partageoient également; si j'admirois d'un côté l'adresse du mâle à s'acquitter de la fonction pénible d'accoucheur, je n'étois pas moins attentif de l'autre à observer en même temps si le mâle arrosoit les œufs de sa liqueur séminale, à mesure qu'il les tiroit du réceptacle de la femelle; jusque-là je n'avois rien aperçu qui m'eût satisfait quant à ce dernier point. Je crus que le défaut d'un jour suffisant, pouvoit m'empêcher de voir cette irrigation, qui me paroissoit absolument nécessaire pour la fécondation des œufs, & qui piquoit le plus ma curiosité; de sorte qu'au hasard de les interrompre, je pris ces animaux au milieu de leur opération, & les ayant mis sur ma main, je me levai pour les mieux exposer au jour.

Le premier effet de ce mouvement fut d'arrêter pendant quelques instans le mâle dans ses fonctions; mais la nécessité  
sans

sans doute de délivrer promptement la femelle qui étoit en travail , lui fit reprendre courage , & il recommença de nouveau à tirer le cordon des œufs. Mon attention cessa dès-lors d'être partagée ; je ne m'attachai plus qu'à observer si le mâle fécondait les œufs à mesure qu'il les tiroit : cependant quelque soin que j'aie apporté pour m'assurer de cette irrotation que je cherchois avec tant d'empressement , & dont les salamandres d'eau m'avoient fourni un exemple (c) , il me fut impossible de rien découvrir qui y eût rapport ; de sorte que le jour baissant , je fus obligé , après environ une demi-heure d'attention , de remettre ces crapauds où je les avois pris.

La rencontre de ces animaux fut pour moi un de ces heureux hasards dont les Naturalistes seuls peuvent connoître le prix ; elle m'offrit d'abord un fait d'histoire naturelle des plus singuliers & dont je ne sache pas que personne ait donné jusqu'ici aucun exemple parmi les animaux : c'est la fonction d'accoucheur que le mâle exerce envers la femelle ; ce fait s'étant passé sous mes yeux , & même sur la paume de ma main , il ne me resta rien à désirer là-dessus. Il n'en fut pas de même à la vérité pour l'autre partie de l'observation ; malgré toute l'attention que j'apportai , il ne me fut pas possible de rien apercevoir qui eût quelque rapport à ce qu'avoit observé Swammerdam au sujet des grenouilles , qui est qu'après un accouplement de quarante jours ou environ , le mâle féconde les œufs à mesure que la femelle les pond , en les arrosant de sa liqueur séminale.

Cependant quoique je n'aie pu apercevoir cette irrotation , il y a lieu de croire non-seulement qu'elle est nécessaire pour la fécondation de cette espèce de frai , mais qu'elle se fait de

(c) La fécondation de la salamandre femelle , se fait sans contact de la part du mâle , qui se tenant à un pouce environ de distance de la femelle & au-dessus , éjacule sa liqueur séminale sur ses flancs , & cette liqueur trouble

un peu l'eau où se trouvent ces animaux. Cette observation se trouve à la suite du premier volume des *Essais & Observations de Médecine de la Société d'Édimbourg* , en françois.

la même manière que dans les grenouilles : la conformité qu'il y a entre la structure des parties internes de celles-ci avec celles des crapauds, entre leur accouplement & leurs embryons, qui passent également par l'état de têtard avant que de parvenir à celui de crapaud ou de grenouille, me paroissent des raisons qui confirment cette conjecture ; je serois donc tenté de croire que le mâle prend un autre temps pour cela. Il est vraisemblable qu'il arrose tous les œufs à la fois, de même que la grenouille, & c'est ce qu'il ne peut faire que lorsqu'il les a entièrement dévidés autour de ses pattes : en effet la dépense seroit trop grande s'il les arrosoit les uns après les autres, à mesure qu'il les tire du réceptacle ; cela même ne pourroit se faire sans qu'il y eût une grande quantité de liqueur séminale répandue par terre, & dans ce cas, il en seroit tombé sur ma main, où le mâle travailla pendant environ un quart-d'heure.

Cette observation me fit connoître l'erreur où j'étois tombé quelque temps auparavant, lorsqu'étant chez le célèbre M. du Verney, aux travaux anatomiques duquel j'ai eu part pendant les deux dernières années de sa vie ; je fus obligé de chercher au milieu de la nuit & au flambeau, des salamandres que la chaleur & la sécheresse du temps retenoient dans leurs retraites pendant le jour. J'aperçus auprès d'un réservoir un de ces crapauds qui portoit sur son derrière un paquet d'œufs ; ce réservoir étoit un tonneau qui sortoit huit ou dix pouces hors de terre, & dont les environs étoient humides ; cet animal rodoit inutilement autour de ce tonneau pour y déposer ses œufs ; l'accès lui en étoit interdit, parce que les bords en étoient trop élevés. Je le pris pour le jeter dans l'eau, afin de le tirer de la peine où il étoit, lorsque je sentis quelque chose qui fretilloit dans ma main ; je m'approchai du flambeau pour voir ce que c'étoit, & j'aperçus quelques petits têtards qui étoient sortis de leur coque dans cet instant-là ; ils étoient très-vifs, aussi gros & aussi formés que des têtards de grenouilles qui ont déjà perdu leurs appendices, & qui sont sortis depuis environ quinze jours de leurs

enveloppes. Le cordon des œufs étoit entrelacé autour des pattes postérieures, de manière que l'animal ne pouvoit marcher qu'à petits pas. Je le pris alors pour la femelle; mais l'observation ci-dessus me fit connoître dans la suite que c'étoit le mâle : c'est lui qui est chargé du soin de l'incubation. La Nature a partagé le travail avec une sorte d'égalité entre ces deux animaux; la femelle est non-seulement chargée du fardeau de ses œufs avant la ponte, mais elle porte encore le mâle sur son dos peut-être pendant quarante jours, comme on l'a observé à l'égard des grenouilles & des crapauds aquatiques : le mâle à son tour accouche la femelle avec quelque difficulté, s'empare des œufs, qu'il porte sur son derrière jusqu'au temps de l'exclusion des têtards, c'est-à-dire plus ou moins de temps, selon que la saison est plus ou moins favorable, & alors il va les déposer dans un endroit convenable. Il se précipite dans la première eau qu'il rencontre, & souvent il est la victime de l'amour paternel; car s'il se jette dans un bassin ou dans tout autre endroit d'où il ne puisse facilement sortir, il y périt au bout de quelques jours, ainsi que je l'ai observé plusieurs fois. Cette espèce de crapaud, que *Oligerus Jacobæus*, regarde comme le *Rana phrynoïdes* de *Gesner*, & que quelques Auteurs appellent *Rubeta minor*, pour le distinguer du crapaud ordinaire, qu'ils nomment *Rubeta major*, ne peut vivre dans l'eau quand une fois il en est sorti. Il passe les premiers temps de sa vie dans cet élément, & le reste sur terre; & ce fait, au rapport de *Gesner*, a été connu des plus anciens Naturalistes, qui assurent la même chose du crapaud ordinaire.

Celui dont il s'agit ici, sort de la coque sous la forme d'un têtard sans appendices : dans cet état, il a des ouïes & vit dans l'eau à la manière des poissons; il y reste jusqu'à ce que les ouïes commencent à s'effacer, ce qui arrive lorsque les deux pattes de devant ont déchiré la membrane qui les renfermoit, & dès qu'il peut marcher ou sauter, il cherche un autre élément, & sort de l'eau avant même que la queue soit entièrement effacée.



## DEUXIÈME MÉMOIRE

*Sur le Gommier blanc appelé Uérék au Sénégal ;  
sur la manière dont on fait la récolte de sa gomme  
& de celle des Acacias , & sur un autre Arbre  
du même genre.*

Par M. ADANSON.

Lû  
le 11 Juillet  
1778.

DANS le premier Mémoire, que je lûs à l'Académie le 24 Février 1773, sur les Gommiers, je me bornai à la description des trois espèces d'*Acacias*, dont deux particulièrement portent la gomme connue dans le commerce sous le nom de *Gomme rouge* ou *Gomme d'Arabie*; dans celui-ci, je me propose d'entretenir l'Assemblée de deux autres espèces qui doivent former un genre particulier, qui reconnoitra pour chef le Gommier blanc, le Gommier par excellence, le Gommier du Sénégal, celui dont le suc fait presque la seule nourriture des Arabes, pendant leurs voyages dans les déserts de l'Afrique.

### PREMIÈRE ESPÈCE.

*Gommier blanc Uérék.*

Découverte  
du  
Gommier  
blanc.

Cet arbre, des plus communs parmi ceux qui couvrent la côte sablonneuse du Sénégal, depuis l'embouchure du Niger jusque vers la hauteur du Cap-blanc, quoique vu ou au moins à portée d'être vu, tous les jours par les Commerçans européens qui fréquentent ce pays depuis plus de quatre cents ans, n'avoit cependant encore été reconnu par aucun d'eux. L'intérêt qu'ils avoient de reconnoître cette branche du Commerce, qui est sans contredit le plus lucratif qui se fasse en Afrique, & peut-être dans le monde, qui par sa quantité, par la modicité de son prix, & par la facilité de son transport, est préférable à la traite de l'Or & à celle des Nègres, les

avoient engagés plusieurs fois dans le projet de faire avec les Maures un voyage dans les forêts, où l'on fait qu'ils recueillent cette gomme : plusieurs fois ils tentèrent ce voyage ; mais rebutés, soit par les difficultés qu'ils rencontrèrent à traverser des sables brûlans dans le pays le plus chaud qui soit connu, soit par le danger qu'ils avoient à courir ; livrés ainsi entièrement à la merci des brigands tels que les Maures, ces tentatives échouèrent, de sorte que l'arbre de la gomme resta inconnu jusqu'à l'année 1748, où je partis pour le Sénégal. Arrivé dans ce pays, dans le dessein d'y découvrir, s'il étoit possible, les plantes qui fournissent au Commerce une source aussi variée que considérable de richesses, & dont plusieurs Membres de cette Académie m'avoient remis une note, savoir, le gommier, l'encens, le bdellium, la myrrhe, l'assa foetida, l'opopanax, la sarcocolle, &c. mes premières vues se portèrent sur le gommier & sur l'arbre de l'encens, que l'on disoit croître dans les mêmes forêts. Je formai donc le projet de courir les risques d'aller visiter les forêts de gommiers ; il ne s'agissoit pour cela que de remonter le Niger à trente lieues de son embouchure, jusqu'au lieu qu'on nomme le *Désert*, où se fait annuellement la traite de la gomme, & de traverser de cet endroit quinze à vingt lieues de terres en allant vers le Nord pour gagner lesdites forêts. Pendant qu'on équipoit un bateau pour faire ces voyages, je m'avisai, pour ne pas perdre de temps, de faire quelques promenades aux environs de l'île du Sénégal, où j'avois débarqué ; mais quelle fut ma surprise lorsqu'en mettant pied à terre sur la pointe méridionale de l'île au Bois, distante d'une petite lieue au nord de l'île du Sénégal, un des premiers arbres que je rencontrai fut un gommier, portant le long de ses branches & de son tronc plusieurs boules de gomme, d'un blanc terne, mais très-transparente ; je la goûtai, & sa douceur, sans fadeur, jointe à sa couleur & à sa forme, m'assura qu'elle ne différoit aucunement de la gomme du commerce ; puis examinant les feuilles, les fleurs & les fruits de cet arbre, il me parut former, sinon un genre, au moins une nouvelle espèce

## 22 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

d'acacia, de sorte que comme elle n'avoit point encore été nommée par aucun Botaniste avant moi, je l'envoyai à M. de Jussieu dès la même année, avec beaucoup d'autres plantes, pour en communiquer la découverte à l'Académie, sous la dénomination suivante: *Acacia, Uerek Senegalentibus dicta, aculeata, aculeis ternis, intermedio deflexo, floribus polyandris spicatis, legumine compresso laevi elliptico*, que M. Linné fit imprimer en 1753 dans son livre intitulé *Species Plantarum*, pag. 521, & qu'il nomma *mimosa, Senegal, spinis ternis, intermedio reflexo, foliis bipinnatis, floribus spicatis*. Tel est l'historique abrégé de la première découverte du gommier blanc, qui me mena peu après à celle des divers gommiers rouges qui se trouvent aussi dans les mêmes cantons, & qui me dispensa de faire un voyage au moins superflu, & peut-être pernicieux chez les Maures: passons actuellement à sa description.

**Son nom.** Le gommier blanc est connu par les Nègres du pays d'Oualo, sous le nom d'*Uerek*; il se plaît particulièrement dans les sables blancs & mobiles qui bordent la côte maritime du Sénégal, où ils forment une espèce de bande de dix à quinze lieues de largeur, qui s'étend depuis la rivière de Cachao, par le douzième degré de latitude boréale, jusqu'au Cap-blanc, par le 20.<sup>e</sup> degré  $\frac{1}{2}$  & au-delà: j'en ai trouvé par toute cette bande, depuis l'île Saint-Louis du Sénégal jusqu'au Cap-verd, mais nulle part en aussi grande abondance qu'à deux lieues à la ronde de l'île même du Sénégal.

**Sa forme.** C'est un arbre de moyenne taille, un arbrisseau de quinze à vingt pieds de hauteur, d'une forme peu élégante & très-irrégulière, comme celle d'un buisson; son tronc est cylindrique, rarement droit, mais diversement incliné, d'un pied au plus de diamètre, & couvert pour l'ordinaire du bas en haut de branches pareillement tortueuses, fort irrégulières, assez denses, menues, mais roides & fortes: l'écorce qui couvre les vieilles branches ainsi que le tronc, est médiocrement épaisse, assez lisse, un peu luisante, & d'un gris qui

tire sur le cendré ou sur le brun ; leur bois est plein , dur & blanc par-tout : les jeunes branches sont d'un gris-blanc & semées de poils coniques, très-petits & couchés.

Les feuilles sont disposées alternativement & circulairement Ses feuilles,  
autour des branches , à un travers de doigt de distance les unes des autres , & ailées doublement , c'est-à-dire composées chacune de quatre, mais plus communément de cinq paires d'ailes, qui portent chacune quinze paires de folioles elliptiques, d'un vert-bleuâtre, longues de deux lignes & demie, & deux fois moins larges : les ailes ont à peine un pouce de longueur, & sont d'un tiers plus courtes que le pédicule commun qui les soutient ; celui-ci n'est pas terminé par un denticule, & porte sur sa face supérieure deux à trois glandes en cupule hémisphérique concave, dont la première est placée vers son extrémité entre les deux ailes de la première paire, & la seconde, tantôt entre la dernière paire inférieure, tantôt plus bas ; la troisième, lorsqu'elle s'y trouve, est placée entre la seconde paire des ailes supérieures : de l'origine du pédicule commun de chaque feuille, sortent deux, & plus communément trois épines coniques, brunes-noires, luisantes, longues de deux lignes, assez égales entr'elles, dont les deux collatérales sont droites, écartées horizontalement, & la troisième ou l'intermédiaire est courbée en-dessous en crochet : les branches de la sève précédente, portent souvent deux feuilles qui sortent d'une espèce de tubercule, qui est resté comme un bourgeon après la chute de l'ancienne feuille.

Ce n'est que sur ces branches de la sève ou de la crûe Ses fleurs,  
précédente que l'on voit les épis de fleurs : ils sortent communément deux à deux, non de l'aisselle d'une feuille, mais derrière elle, c'est-à-dire, entr'elle & les deux épines latérales ; chaque épi est garni d'environ cent fleurs hermaphrodites blanches, disposées par groupes ou paquets de trois à cinq, semés çà & là sur toute leur longueur, qui est de trois pouces environ, c'est-à-dire, une fois plus longue que les feuilles prises dans leur entier ; lorsque cet épi est en fleurs bien épanouies, il a à-peu-près la grandeur & la forme du



24 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

petit doigt, de sorte qu'il paroît avoir cinq fois plus de longueur que de largeur; chaque fleur est blanche, longue de trois lignes, & accompagnée à son origine d'une écaille elliptique pointue, une fois plus longue que large, ciliée, c'est-à-dire, bordée de poils en forme de cils, trois fois plus courte que le calice, & qui tombe bien avant lui.

Le calice forme un tuyau cylindrique, blanc, verdâtre, de moitié plus long que large, partagé jusqu'au tiers de sa longueur en cinq denticules égaux triangulaires équilatéraux; il renferme une corolle blanche, de même forme, plus longue d'un quart, & dont les cinq dentelures ont une fois plus de longueur que de largeur, & sont bordées de petites pointes coniques cristallines. Soixante-dix à quatre-vingts étamines égales, droites, blanches, une fois plus longues que la corolle, divergentes à peine sous un angle de 15 degrés, lisses, luisantes, sont réunies en une espèce d'anneau contigu à la corolle qui part du fond du calice, & au sommet duquel elles sont distribuées sur cinq rangs: chacun de leurs filets est couronné par une anthère sphéroïde marquée du côté intérieur de trois sillons, & de l'autre d'un petit enfoncement qui reçoit l'extrémité du filet; cette anthère est outre cela terminée par un tubercule blanc sphérique chagriné de denticules coniques: c'est par les deux sillons latéraux qu'elle s'ouvre pour répandre la poussière fécondante, qui est composée de globules très-nombreux, d'une petitesse qui échappe à la vue, lisses, luisants, & de couleur d'or. L'anneau des étamines laisse à son centre un petit vide, duquel s'élève, sans le toucher, un filet fort mince, qui sert de support à un ovaire cylindrique ou peu aplati, trois fois plus long que lui, & deux fois plus long que large; cet ovaire est terminé par un style cylindrique trois fois plus long & plus étroit que lui, dont le sommet est creux, coupé horizontalement, & tout couvert de pointes coniques insensibles à la vue simple.

Ses fruits. La forme de l'ovaire change peu-à-peu en grandissant, au point qu'il devient, lors de la maturité, un légume extrêmement aplati, presque aussi mince qu'une membrane, d'un jaune de bois,

les forêts de gommiers : car ces arbres ne se cultivent pas. Ces forêts commencent à quinze lieues environ du fleuve Niger, & s'étendent en gagnant vers le Nord à une distance qu'on estime communément de quatre-vingts lieues, & qui pourroit bien aller jusqu'au Cap-blanc, c'est-à-dire, jusqu'à cent lieues, & peut-être beaucoup au-delà en approchant de Maroc, à en juger par les relations des Maures eux-mêmes. Ils donnent à cette forêt environ trente lieues de largeur de l'Occident à l'Orient, & la distinguent en trois portions distantes de dix lieues l'une de l'autre, dont la première, qu'ils appellent la *forêt de Sahel*, est la plus proche du Niger, en étant éloignée d'environ quinze lieues, ainsi que de la mer ; celle qui vient après, en longeant vers le Nord, s'appelle la *forêt de Lébiar*, & côtoye comme elle la bande sablonneuse qui borde l'Océan : c'est la plus grande des trois ; enfin la forêt d'*Alfatak* occupe le milieu de la bande de terre, moitié sablonneuse, moitié argileuse, à l'orient des deux autres forêts ; sa largeur est ignorée. Il paroît encore par le récit des mêmes Maures, qui s'accorde assez avec mes observations, que la forêt de Sahel, qui est pour la plus grande partie plantée sur la bande sablonneuse, est presque uniquement composée de gommiers blancs uéreck ; que celle de Lébiar, qui borde en partie les mêmes sables vers le Nord, contient plus de petit gommier rouge nebeb, qui est celui d'Arabie ; qu'enfin, la forêt d'Alfatak, qui est plus enfoncée dans le continent où la terre est plus grasse, est entièrement du grand gommier appelé *gonaké*. Ces trois forêts appartiennent à trois tribus de Maures, qui y font leur récolte chacune dans la leur ; ce sont elles qui fournissent toute la gomme qui se porte au Sénégal : les trois espèces se trouvent mélangées indistinctement, & , suivant le canton où elle a été cueillie, tantôt c'est la blanche, tantôt c'est la rouge qui domine ; celle-ci est la moins estimée ; on y rencontre aussi des morceaux de *bdellium*, que les Européens regardent mal-à-propos comme l'encens, quoiqu'il leur fasse le même usage : c'est une résine d'un rouge d'abord rosé, ensuite brun, très-odoriférante, dont je donnerai l'histoire en son temps.

Se fait deux  
récoltes  
par an.

Les Maures nous assurent qu'ils font deux récoltes de gomme chaque année : la première, qui est la plus abondante, se fait au mois de Décembre ; les boules en sont plus grosses, plus nettes, moins sèches, moins ridées, parce que les arbres, alors surchargés de sève par les pluies de l'été, la rendent en abondance, & que le Soleil, moins chaud pendant ce mois que dans le reste de l'année, ne la dessèche pas tant : la seconde récolte se fait au mois de Mars ; les boules en sont plus petites, plus ridées, moins fréquentes, mais souvent plus blanches, & tombent quelquefois par terre, desséchées par le vent d'Est, qui les fait détacher de l'écorce. La plupart des Auteurs qui ont écrit sur le Sénégal, depuis le P. Labat, ont dit, d'après lui, que les Maures la tiroient par incision ; mais c'est une erreur qu'on a tort de répandre, parce qu'elle n'a aucun fondement.

Lieux  
où l'on traite  
la gomme.

Il n'y a que cinq endroits principaux où l'on ait jamais fait la traite de la gomme au Sénégal, dont trois sur la côte ; savoir, Marfa ou le petit Portendic, à trente-quatre lieues marines au nord de l'île du Sénégal ou de l'embouchure du Niger ; Portendic à quarante-deux lieues, & l'île de Gui Aguidir ou d'Arguin, à quatre-vingt-cinq lieues : les deux autres escalles de traite sont sur le fleuve Niger, dont la première & la plus considérable appelée le *Désert*, est à trente lieues de son embouchure dans l'Est-nord-est, & correspond au grand & au petit Portendic : la seconde est à Donai, sur le terrier rouge, à quarante lieues de la même embouchure, & correspond au commerce d'Arguin ; voici comment.

J'ai dit ci-dessus qu'il y a trois forêts de gommiers au Sénégal ; que chacune d'elle appartient à une tribu de Maures, qui se réserve le droit exclusif d'y venir faire annuellement la récolte de gomme : or la position physique de chacune de ces forêts a déterminé leurs propriétaires à porter leur gomme à l'escalle ou l'échelle la plus voisine de leur habitation ordinaire ; & comme les pâturages nécessaires à leurs troupeaux sont plus abondans dans le voisinage des rivières, ils se sont rapprochés autant qu'ils ont pu du fleuve Niger,

sans quitter leur forêt : c'est ainsi que le Bakar \*, chef de la tribu des Ébragéna, à laquelle appartient la grande forêt d'Alfatak qui commence aux bords du lac Caër, improprement appelé *Cayar*, & qui s'étend considérablement dans l'Est, vient porter sa gomme à l'escalle de Donaï, sur le terrier rouge, dans le voisinage du comptoir de Podor; nous apprenons par cette Tribu, & par les Nègres qui l'avoisinent, que son adouar, c'est-à-dire le lieu de son campement, est à cinquante lieues du fort de Podor, sur les terres du royaume de Sitati, dont les peuples appelés *Peul*, & par corruption *Foules*, sont des Nègres. On sait par les dépouillemens des registres de la Compagnie des Indes, qu'en l'année 1700, où son commerce n'étoit pas aussi considérable que dans les derniers temps, il fut traité au terrier rouge, pendant les Mars, Avril & Mai, plus de trois mille six cents quintaux mois de Maures de gomme, qui équivalent à quatorze mille quatre cents quintaux de France; or, le quintal des Maures pesoit alors quatre cents livres, & depuis l'année 1715, M. Brié, alors Directeur général au Sénégal, le fit monter à sept cents livres, où il est resté.

La forêt de Lébiar, que le P. Labat & ses Copistes disent n'être qu'à trente lieues au Nord-est de l'escalle du Désert, & que les Maures nous assurent être à plus de quarante lieues, appartient à la famille des Darmanko, chefs de la tribu des Auled-el-hagi; ces Maures sont fort laborieux, & quoiqu'aussi voisins d'Arguin, ils préfèrent d'apporter leur gomme à l'escalle du Désert, à cause des pâturages qu'ils trouvent aux bords du Niger, où ils passent le reste de la saison sèche, c'est-à-dire jusqu'en Mai & Juin: quoique leur forêt soit la plus grande des trois, & qu'elle fournisse abondamment, néanmoins ils en recueillent quelquefois dans celle d'Alfatak, & ils en portent communément douze à quinze mille quintaux au Désert.

La forêt de Sahel, quoique la moindre des trois forêts de gommiers est la plus précieuse, par la qualité de la gomme

---

\* Ceci a été écrit en 1749, sur les lieux, au Sénégal.

Arguin  
&  
Portendic.

qu'elle produit: aussi le maître de cette forêt a-t-il sur les deux autres une supériorité qui est encore augmentée par la plus grande proximité de Portendic & de l'île Saint-Louis, qui est le chef-lieu de la concession du Sénégal; elle fournit environ dix mille quintaux de gomme: la tribu à laquelle elle appartient se nomme Thrarza ou Terarza, & a pour chef Hamar-Alichandora, fils d'Addi, qui a donné son nom au port d'Addi, appelé par corruption *Portendic*. Ce Seigneur promène ses tentes ou ses villages ambulans au nord & à l'occident de cette forêt, du côté d'Arguin & de Portendic, où il porte sa gomme, mais par préférence à Portendic, où sont deux pauvres hameaux d'environ deux cents personnes chacun, qui y sont fixes, au moins pendant le temps de la traite, c'est-à-dire depuis le mois de Décembre jusqu'au mois de Juin. Le gouvernement de ces deux hameaux est confié au maître de l'escalle, nommé autrefois Bovali, qui fait avertir Alichandora dès qu'il arrive des vaisseaux pour la traite.

Différends  
pour ce  
commerce.

Les Maures trouvant beaucoup plus de facilité à porter leur gomme sur les bords du Niger, où ils sont attirés après leur récolte, & comme fixés pendant l'hiver par l'abondance des pâturages, la vendoient autrefois toute aux François, qui étoient en possession de ce fleuve, & qui profitoient de cette facilité pour l'acquérir à très-vil prix. Les Anglois de leur côté, les Hollandois & les Portugais, qui vouloient enlever aux François, ou au moins partager avec eux ce commerce avantageux, jusqu'à ce qu'ils fussent en état de s'en emparer entièrement, cherchèrent à attirer les Maures avec leur gomme sur la côte maritime; pour y réussir, ils s'établirent d'abord parmi eux à Portendic, puis ils gagnèrent Hamar-Alichandora par des présens, & le déterminèrent, à force d'argent, à insulter, maltraiter & piller les deux autres Tribus qui alloient porter leurs gommes sur le Niger, pour les forcer de les amener à Portendic, où il les achetoient à un prix excessif, en livrant leurs marchandises à perte, afin d'engager ces trois nations Maures à leur apporter leurs récoltes entières: ces

Interlopes étrangers firent donc en contrebande ce commerce d'abord à terre, mais ils en sentirent bientôt les inconvéniens ; les friponneries des Maures, leurs contestations élevées à dessein sur leurs droits de propriété du terrain où se faisoit la traite, le double maniement de la gomme ainsi traitée à terre, le temps perdu à cette double opération, les risques de la mouiller en l'embarquant dans les chaloupes pour la porter à bord, la perte & le déchet qui en sont les suites & qui doivent retomber sur le vendeur & non sur l'acheteur ; tout cela leur fit faire des réflexions : ils jugèrent à-propos de ne plus descendre à terre, & de se faire apporter la gomme à bord de leurs vaisseaux ; mais cet expédient fut sujet à d'autres inconvéniens, à cause des grands mouvemens de la mer ; ils prirent donc le parti de s'établir à terre, dans un lieu où ils n'eussent point à craindre le brigandage & les incursions des Maures : pour cet effet, ils bâtirent sur le roc de l'île d'Arguin un Fort, dont ils furent bientôt chassés par les François, qui le démolirent. Ce fut ainsi que les Anglois n'abandonnèrent que peu-à-peu, & malgré eux, un commerce dont ils connoissoient parfaitement tout le prix.

La quantité de gomme qui se vend annuellement au Sénégal, va communément à trente mille quintaux ; savoir, douze mille à l'escalle du Désert, six mille à celle de Donaï ou du Terrier rouge, & dix mille à Portendic, qui portés en Europe, rendent près de six millions en espèces ; son commerce est donc, comme il a été dit, infiniment plus avantageux que la Traite de l'or & que celle des Nègres, dont on ne tire guère plus de trois mille par an de ce même pays.

Autrefois la gomme se tiroit toute de l'Arabie, avant que les François se fussent établis sur le fleuve Niger au Sénégal ; mais depuis qu'ils ont ouvert ce commerce à l'Europe, le prix de cette marchandise a beaucoup diminué, & fait disparaître celle qui venoit de l'Arabie, & certainement en bien moindre quantité ; car les trois millions pesant qu'on tire annuellement du Sénégal, feroient la charge de plus de trois mille chameaux. Elles ne diffèrent en rien l'une de

Quantité  
de gomme  
qui se tire  
annuellement  
du Sénégal.

## 32 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

l'autre : elles ont les mêmes qualités, les mêmes vertus, les mêmes usages, les mêmes avantages, & il paroît, par ce qui a été dit, qu'elles sont tirées des mêmes arbres, au moins de deux gommiers rouges dont j'ai fait la description.

Remarques, Quoiqu'on ne trouve dans les Auteurs anciens aucune description qui puisse s'appliquer à cette espèce, on voit cependant que ce que Pline dit, livre XIII de son Histoire Naturelle, au commencement du chapitre II, ne peut guère être attribué qu'à elle : *Gummi optimum esse ex Ægyptiâ spinâ convenit vermiculatum, colore glauco, purum, sine cortice, dentibus adhærens. Præterea ejus in libras XIII deterius ex amygdalis amaris & ceraso, pessimum ex Prunis, &c.*

Quelqu'éloigné que je sois de vouloir paroître trouver M. Linné en défaut, je ne puis refuser, à la vérité, de dire qu'il s'est trompé en rapportant à cette plante, celle que Prosper Alpin a figurée à la *Planche IX*, ainsi que celle que Plukenet a fait graver, *Planche CCLI, figure 1* de sa *Phytographie*, avec la dénomination suivante : *Acacia altera vera, siliquâ longâ villosâ, cortice candicante donatâ*, qui est comme l'on a vu l'*Acacia vera*, appelé *Nebneb* au Sénégal. Au reste, cette espèce est assez différente des trois premières par la disposition de ses fleurs, & par la figure de la gouffe aplatie, pour déterminer les Botanistes à en faire un genre différent que l'on pourroit appeler de son nom de pays *Uérék*.

### S E C O N D E E S P È C E,

Le *Dad* des Nègres du Sénégal, est une cinquième sorte d'*Acacia* qui vient naturellement dans le genre du *Uérék*, ou du Gommier blanc, & qui est assez commun dans les sables voisins de l'embouchure du fleuve Niger.

C'est un arbrisseau en buisson conique, de la hauteur de six à dix pieds, dont les branches vieilles garnissent le tronc depuis la racine jusqu'au faite, & sont couvertes d'une écorce brune mince, qui enveloppe un bois blanc, plein, assez dur. Les jeunes branches sont verdâtres pentagones, couvertes de poils courts couchés assez serrés, & armées de tous côtés d'épines

d'épines semblables à celles du rosier, c'est-à-dire rouges, brunes, coniques, comprimées, longues de deux lignes & demie, & recourbées en dessous en forme de crochet. Ses feuilles diffèrent de celles de l'Uérék, en ce qu'elles ont sept à quatorze paires d'ailerons, chacune de trente-cinq paires de folioles plus étroites, longues de trois lignes, & trois fois moins larges : leur pédicule commun est semé en dessous, comme les branches d'épines rouge-clair, & porte en-dessus quatre tubercules ou glandes, dont une conique entre la première paire inférieure des pinnules, & trois hémisphériques entre les trois dernières paires d'en haut; au lieu d'épines comme dans l'Uérék & les Acacias, ce pédicule commun est accompagné à son origine sur les côtés, de deux stipules en lames triangulaires plates, une fois plus longues que larges, & qui tombent bien avant lui.

Deux épis cylindriques de fleurs blanches sortent de l'aisselle de chacune des feuilles qui terminent le bout des branches; ils ont chacun deux pouces de longueur, & quatre fois moins de largeur; ils sont une fois plus courts que les pédicules communs des feuilles, écartés sous un angle de quarante-cinq degrés, & couverts depuis le haut jusque vers le bas d'une centaine de fleurs sessiles contiguës, couchées horizontalement, & accompagnées chacune d'une écaille en forme de lance, égale à la longueur de la corolle, arrondie à son origine, deux fois plus longue que large, semée de longs poils & caduque; au-dessous des dernières fleurs, cet épi porte encore une espèce d'enveloppe, composée de trois écailles triangulaires de grandeur médiocre, deux à trois fois plus longues que larges, veluës & qui tombent de bonne heure.

Chaque fleur a deux lignes de longueur; son calice est un tuyau cylindrique, jaunâtre, lisse, mince, presque une fois plus long que large, divisé jusqu'au quart de sa longueur en cinq dents triangulaires; il enveloppe une corolle une fois plus longue que lui, de même forme, blanche, deux fois plus longue que large, partagée jusqu'au quart de sa longueur en cinq denticules triangulaires, d'un tiers plus longs que larges.

*Mém. 1778.*

E



### 34 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Les étamines sont comme dans l'Uérék; l'ovaire est ovoïde, comprimé, une fois plus long que large, tout couvert de poils blancs cristallins, porté sur un pédicule une fois plus court, & trois fois plus menu que lui, égal à la corolle; & il est surmonté par un style cylindrique tortillé une fois plus long que lui: du reste, il ressemble à celui de l'Uérék. Le légume qui provient de cet ovaire ne diffère de celui de l'Uérék, qu'en ce qu'il n'a que deux pouces & demi de longueur, qu'il est trois fois moins large, brun-noir, marqué sur chacune de ses faces de deux à trois grandes fossettes, & partagé intérieurement en quatre à cinq loges, renfermant chacune une graine orbiculaire qui n'a ni prolongement, ni impression sur ses faces.

Usages. Je n'ai jamais rencontré de suc gommeux sur cet arbrisseau, quoiqu'il paroisse devoir en fournir comme l'Uérék, & il n'est d'aucun usage. Les Nègres le respectent beaucoup, & le regardent superstitieusement comme un arbre sacré, sans doute à cause de la quantité d'épines dont il est couvert, & ils prétendent qu'un homme qui s'y réfugierait, poursuivi en guerre ou pour quelque crime, y ferait à l'abri de ses ennemis & de leurs flèches empoisonnées: pareille recette ne serait certainement guère goûtée par de braves guerriers.

Remarques. Rauwolf nous apprend qu'auprès d'Alep, le long du fleuve du Tigre dans la Mésopotamie, & de l'Euphrate dans l'Arabie déserte, on trouve une espèce d'Acacia, appelée *Schack* par les Turcs, & *Schamuth* par les Arabes, qui l'ont corrompu du mot *Sant*, selon Celse; que cet arbrisseau n'est qu'un buisson aussi détesté par les Laboureurs du pays, que le sont ici les fougères & l'arête-boeuf, *anomis resta bovis*, lorsqu'ils gagnent dans nos champs; que ses branches sont cendrées & couvertes d'épines semblables à celles du rosier; que ses feuilles sont ailées comme celles du tragacant ou de la fougère femelle, mais si petites & si nombreuses sur la même côte, qu'au rapport de Bélon, le pouce seul en pourroit couvrir une cinquantaine; qu'il n'en a point vu les fleurs, mais que ses gousses sont brunes, plus épaisses & plus arrondies que celles

de la fève, fongueuses intérieurement, & contenant deux à trois graines rouges. Peut-on trouver une plus grande conformité entre le *Schack* & le *Ded* du Sénégal, & ne seroit-on pas autorisé à les regarder comme la même espèce, si son légume n'étoit pas aussi épais que le dit Rauwolf, qui paroît avoir décrit une gousse de tamarin? Ce seroit encore celle dont Pline parle chapitre IX du livre XIII de son *Histoire Naturelle*, & qu'il dit avoir le bois blanc. *Nec minus spina celebratur in eâdem gente (Ægypto) duntaxat nigra, quoniam incorrupta etiam in aquis durat, ob id utilissima navium costis. Candida faciliè putrescit. Aculeus spinarum & in foliis. Semen in Siliquis, quo coria perficiuntur gallæ vice, Flos & coronis juundus, & medicamentis utilis. Manat & gummi in eâ. Sed præcipua utilitas quod cæsa anno tertio resurgit. Circa Thebas hæc, ubi & Quercus & Persica & Oliva 300 a Nilo stadiis sylvestri tractu & suis fontibus riguo.*

Si M. Grangé ne s'est point trompé, le *Sant* est l'arbrisseau dont les gousses bouillies fournissent le suc d'Acacia; mais si le *Sant* est la même espèce que le *Ded* du Sénégal, comme il y a beaucoup d'apparence, par la ressemblance de toutes leurs parties, les gousses sont si minces, si peu succulentes, que son assertion doit au moins passer encore pour douteuse.

Il n'y a presque pas d'Acacia au Sénégal qui ne fournisse plus ou moins de gomme; de plus, de quarante espèces que je possède, & qui doivent former au moins sept à huit genres, quoique M. Linné les ait confondus sous le nom très-impropre de *mimosa*, qui ne convient qu'à la sensitive, je me suis borné jusqu'ici à la description des cinq espèces qui comprennent les trois vrais gommiers, & deux arbres qu'on a souvent pris pour eux; leur histoire m'a paru assez neuve & assez intéressante pour mériter les recherches pénibles que j'ai faites, dans la vue de vérifier, concilier ou corriger les contradictions ou les erreurs qui se trouvent répandues dans les Auteurs qui en ont parlé.



**ÉCLIPSE DE SOLEIL,**  
*DU 24 JUIN 1778, APRÈS-MIDI,*  
*Observée à Paris de l'Observatoire de la Marine.*

Par M. MESSIER.

Lû  
le 27 Juin  
1778.

J'AVOIS préparé différens Instrumens pour cette observation : la veille & le jour de l'Éclipse, j'avois pris un grand nombre de hauteurs correspondantes du Soleil, pour bien connoître la marche de la Pendule. Les 23 & 24 jusqu'à 2 heures  $\frac{1}{2}$  de l'après-midi, le ciel fut entièrement serein & sans nuages, de manière qu'il y avoit tout lieu d'espérer que le beau temps continueroit; mais vers les 2 heures  $\frac{1}{2}$ , quelques nuages se formèrent & augmentèrent successivement, de manière que quelques minutes avant l'Éclipse, le ciel se trouva en grande partie couvert : le Soleil étoit dans les nuages au moment que l'Éclipse a eu lieu, de manière qu'il ne fut pas possible de saisir le commencement, & je ne pus voir le Soleil sortant des nuages qu'à 3<sup>h</sup> 53' 46" de temps vrai; & la Lune alors avoit déjà échancre le bord du Soleil, il y avoit quelques secondes.

Je m'occupai ensuite, dans les intervalles des nuages, à mesurer la distance des cornes de la partie éclipsée, par le moyen d'un micromètre à fils adapté à ma lunette achromatique de 3 pieds  $\frac{1}{2}$ , montée sur la machine parallactique; j'observai aussi l'occultation de deux taches du Soleil au bord de la Lune; j'avois déterminé leurs positions sur le Soleil, & je rapporterai leurs déterminations, ainsi que celles qui étoient en même temps sur le disque : ces observations pourront servir aux Astronomes qui auront observé leurs immersions & émerfions. Voici la Table de mes observations.

T E M P S			DISTANC.	
vrai.			des CORNES, &c.	
H.	M.	S.	M.	S.
3.	53.	46	.....	
3.	57.	47	10.	59
4.	1.	53 $\frac{1}{2}$	15.	10
4.	2.	42	16.	6
4.	4.	15	16.	58
4.	5.	4	17.	41
4.	6.	57 $\frac{1}{2}$	18.	44
4.	10.	19	20.	39
4.	12.	45 $\frac{1}{2}$	22.	0
4.	14.	9 $\frac{1}{2}$	.....	
4.	16.	55	23.	30
4.	19.	10 $\frac{1}{2}$	21.	2
4.	24.	13 $\frac{1}{2}$	25.	42
4.	25.	25 $\frac{1}{2}$	25.	52
4.	26.	53	.....	

l'Éclipse déjà commencée depuis quelq. sec.

distance des cornes.

Immerf. de la tache n.<sup>o</sup> 1 des Tables suiv.

distance des cornes.

partie éclairée restante du Soleil: douteuse.

distance des cornes.

Immerf. de la tache n.<sup>o</sup> 3<sup>e</sup> des Tables suiv.

distance des cornes.

Immerf. de la tache n.<sup>o</sup> 1 des Tables suiv.

distance des cornes.

partie éclairée restante du Soleil: douteuse.

distance des cornes.

Immerf. de la tache n.<sup>o</sup> 3<sup>e</sup> des Tables suiv.

Après l'immersion de la tache n.<sup>o</sup> 3<sup>e</sup>, des nuages très-épais qui venoient du Sud-est, couvrirent le Soleil, & il ne fut plus possible de le revoir de la journée: vers les 6 heures du soir, il tomba un peu de pluie; elle fut plus abondante vers les 7 heures  $\frac{1}{2}$ : entre 9 & 10 heures, il éclaircit, & après 10 heures le ciel se découvrit.

Durant la journée du 24, la chaleur fut très-grande, le Soleil étoit brûlant: pour connoître sa chaleur, je fis tomber perpendiculairement ses rayons sur un thermomètre à mercure que j'avois attaché à l'extrémité de ma lunette achromatique, montée sur sa machine parallaétique, placée dans mon observatoire, où l'air ne pouvoit pas circuler; à 1 heure  $\frac{1}{2}$  de l'après-midi, le ciel étant parfaitement beau, serein & sans nuage, la liqueur du thermomètre monta à 47 degrés  $\frac{1}{2}$  de

dilatation, tandis qu'un second thermomètre, de même mercure, qui étoit placé au Nord, ne marquoit que 25 degrés; ce qui donnoit une différence entre ces deux positions de 22 degrés  $\frac{1}{2}$ .

À 3<sup>h</sup> 17', le thermomètre de la lunette achromatique marquoit encore, quoiqu'il y eût des nuages, 45 degrés: à 3<sup>h</sup> 25', les nuages augmentés, le même thermomètre marquoit 44, & celui qui étoit au Nord 26 degrés.

Pendant l'Éclipse, le thermomètre au Nord marquoit, quoique le ciel fût presque totalement couvert, savoir à 4<sup>h</sup> 30', 26<sup>d</sup>; à 4<sup>h</sup> 45', 25<sup>d</sup>  $\frac{1}{2}$ ; à 5<sup>h</sup> 23', 24<sup>d</sup>; à 5<sup>h</sup> 40', 24<sup>d</sup>: le baromètre étoit à 28 pouces 0 lignes  $\frac{1}{2}$ , le vent au Sud.

Voici les observations des taches du Soleil, déterminées les 24 & 25 Juin, peu de minutes après midi.

Position des Taches, le 24 Juin.

NUMÉR. des TACHES.	TEMPS VRAI du Passage des TACHES au fil horaire.	D I F F É R. de hauteur des TACHES au bord supérieur du SOLEIL.
	H. M. S.	M. S.
☉	0. 39. 4	1. <sup>er</sup> bord ☉
1	0. 39. 20	14. 37
2	0. 39. 26	13. 19
3	0. 40. 25 $\frac{1}{2}$	22. 34
3 <sup>i</sup>	0. 40. 26 $\frac{1}{4}$	22. 12
5	0. 40. 29	8. 56
4	0. 40. 31 $\frac{1}{2}$	22. 0
6	0. 40. 37	7. 28
☉	0. 41. 23	2. <sup>e</sup> bord ☉

Position des Taches, le 25 Juin.

NUMÉR. des TACHES.	TEMPS VRAI du Passage des TACHES au fil horaire.	D I F F É R. de hauteur des TACHES au bord supérieur du SOLEIL.
	H. M. S.	M. S.
☉	0. 11. 52	1. <sup>er</sup> bord ☉
1	0. 11. 59	14. 34
2	0. 12. 5	13. 22
3	0. 12. 59	22. 51
3 <sup>i</sup>	0. 13. 0	22. 33
5	0. 13. 4	9. 13
4	0. 13. 4	22. 6
6	0. 13. 59 $\frac{1}{2}$	7. 44
☉	0. 14. 10	2. <sup>e</sup> bord ☉



*OBSERVATION  
DE L'ÉCLIPSE DE SOLEIL,  
DU 24 JUIN 1778,  
Faite à l'Observatoire royal de Paris.*

Par M. JEAURAT.

**L**ES observations d'Éclipses de Soleil sont importantes pour la détermination des Longitudes terrestres, & pour la rectification des Tables de la Lune; mais comme je n'ai pas été assez heureux pour avoir un temps favorable à ces observations, on fera bien de ne compter sur leur exactitude, qu'autant qu'elles auront été confirmées par d'autres observations faites dans un lieu où le temps étoit plus favorable.

Là  
le 27 Juin  
1778.

Dès le commencement de l'Éclipse, le Soleil ne se pouvoit voir que par instans à travers les nuages; & avant que l'Éclipse fût à son milieu, le Soleil a entièrement disparu. Pour observer le commencement de l'Éclipse, j'avois, grâce à la complaisance de M. Navare, un excellent télescope de sa construction: ce télescope a 32 pouces de foyer, & amplifie quatre-vingt fois le diamètre des objets; j'avois aussi deux pendules à secondes & un instrument des passages, dont je pouvois mouvoir la lunette sans craindre que les fils verticaux & horizontaux cessassent d'être placés convenablement; j'étois pourvu d'ailleurs d'une autre lunette, que je nommerois volontiers *lunette Diplantidienne*, parce qu'elle présente deux images de l'objet, l'une dans le sens renversé de l'autre: j'espérois, au moyen de cet instrument, saisir avec précision les instans où l'Éclipse a dû être de six doigts avant & après la plus grande phase de l'Éclipse; car cette observation peut se faire facilement avec ma nouvelle lunette.

Depuis les découvertes qu'ont faites M.<sup>rs</sup> Bouguer & l'abbé Rochon, pour les micromètres objectifs, on ne peut plus,

pour ainsi dire , se flatter d'en imaginer d'autres dans ce genre : aussi mon unique but dans l'invention de ma *lunette Diplantidienne* , a été de me procurer une lunette méridienne , avec laquelle je pusse observer directement l'instant même du passage du centre des Astres par le Méridien , sans être privé du moyen de déduire ce passage par l'observation du contact des deux bords au fil de la lunette , comme on le fait ordinairement , & aussi de pouvoir observer les petites Étoiles sans avoir besoin d'éclairer les fils de la lunette (*V. Mém. de l'Acad. ann. 1779*).

Je dois à l'habileté de M. Navare , dans l'Optique , la construction de ma nouvelle lunette ; car la difficulté de l'exécution , & celle des combinaisons propres à la faire réussir étoient grandes. Voici succinctement en quoi consiste l'idée de ma lunette , dont je me propoisois de faire usage dans l'observation de l'Éclipse dont il est ici question.

C'est une lunette qui représente tout-à-la-fois l'objet dans une situation droite , & dans une situation renversée , les deux images étant d'ailleurs exactement de la même grandeur , & le champ de la lunette pour chaque image étant aussi le même , lorsqu'on dirige la lunette vers un Astre , on l'y voit entrer tout-à-la-fois des deux côtés ; puis les deux images s'étant croisées , sortent de la même manière par les côtés opposés à ceux par où elles sont entrées.

Il suit de-là que l'instant où les deux images se trouvent exactement l'une sur l'autre , est précisément celui du passage du centre par l'axe de la lunette , & que les attouchemens des disques , avant & après le croisement des deux images , donnent les instans des passages des deux bords , dont on déduit , comme à l'ordinaire , l'instant du passage du centre , quoique déjà observé d'une manière directe , comme je viens de le dire.

Comme la marche des images dans la lunette se fait en sens contraire , elle double la vitesse apparente des passages par le Méridien ; voici présentement le peu d'observations que j'ai pu faire de l'Éclipse de Soleil du 24 Juin 1778 , dont ce Mémoire est l'objet.

CORRECTIONS

*CORRECTIONS à faire aux Observations faites à un fil vertical, ou Mouvement apparent des cornes sur le disque solaire, calculé en degrés & en temps, pour un intervalle de 5 minutes, dont 3' 17" de temps, répondent à 31' 33" de degrés.*

TEMPS VRAI des OBSERVATIONS	PREMIÈRE CORNE ou CORNE OCCIDENTALE.		SECONDE CORNE ou CORNE ORIENTALE.	
	En Degrés.	En Temps.	En Degrés.	En Temps.
4 <sup>h</sup> 0'	− 63",0.	− 6",4.	+ 178",0	+ 18",5.
4. 5.	− 41,0.	− 4,2.	+ 146,0	+ 15,2.
4. 10.	− 19,0.	− 1,9.	+ 130,0	+ 13,5.
4. 15.	− 2,0.	− 0,2.	+ 112,0	+ 11,7.
4. 20.	+ 9,0.	+ 0,9.	+ 90,0	+ 9,4.
4. 25.	+ 30,0.	+ 3,2.	+ 75,0	+ 7,8.
4. 30.				

C'est avec cette Table que les Observations suivantes ont été réduites; ces Observations sont aussi toutes réduites au temps vrai de l'Observatoire royal de Paris.

*Observations de l'Éclipse de Soleil du 24 Juin 1778.*

Cette Éclipse étoit commencée à..... 3<sup>h</sup> 53' 42".

Par estime, j'ai conjecturé qu'elle avoit pu com-  
mencer à..... 3. 53. 15.

C'est-à-dire, plus tôt que selon les Tables de M.

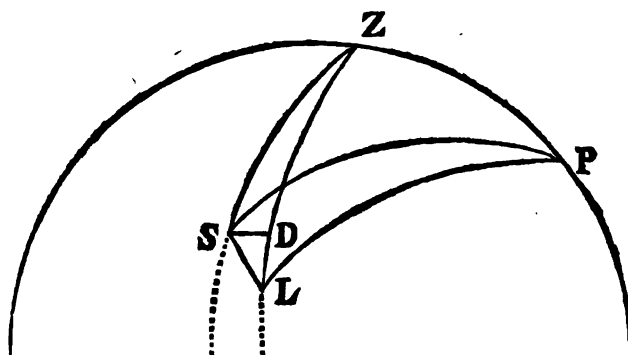
Mayer, de..... + 58.

Et plus tôt que selon les Tables de M. Clairaut... + 3. 5.

*Première Observation faite au fil vertical, & calculée  
pour 4<sup>h</sup> 5' 12".*

Passage	{	du premier bord du Soleil . . . . .	4 <sup>h</sup> 4' 46"	Differ. 0' 26" 1. 46. 1. 5.
		de la corne occidentale de la Lune . . . .	4. 5. 12.	
		de la corne orientale de la Lune . . . . .	4. 6. 58.	
		du second bord du Soleil . . . . .	4. 8. 3.	
Mém. 1778.			E.	





De cette phase observée, il suit que le centre  $L$  de la  $\odot$  étoit moins élevé sur l'horizon que le centre  $S$  du  $\odot$  d'une quantité  $LD = - 26' 32''$ .

Et que ce même centre étoit à l'occident, d'une quantité.....  $SD = + 6. 27.$   
Conséquemment.....  $SZL = - 8. 0.$

*Seconde Observation faite au fil vertical & calculée pour  $4^h 13' 0''$ .*

Passage	du premier bord du Soleil.....	$4^h 12' 40''$	Differ.	
	de la corne occidentale de la Lune....	$4. 13. 0.$		$0' 20''$
	de la corne orientale de la Lune....	$4. 15. 15.$		$2. 15.$
	du second bord du Soleil.....	$4. 15. 57.$		$0. 42.$

De cette phase observée, il suit que le centre  $L$  de la  $\odot$  étoit moins élevé sur l'horizon que le centre  $S$  du  $\odot$  d'une quantité  $LD = - 23' 45''$ .

Et que ce même centre étoit à l'occident d'une quantité.....  $SD = + 3. 32.$   
Conséquemment.....  $SZL = - 4. 18.$

*Troisième Observation, faite au fil horizontal & calculée pour  $4^h 19' 4''$ .*

Passage	du bord inférieur du Soleil.....	$4^h 18' 34''$	Differ.	
	de la corne orientale de la Lune....	$4. 19. 4.$		$0' 30''$
	de la corne occidentale de la Lune....	$4. 19. 13.$		$0. 9.$
	du bord supérieur du Soleil.....	$4. 21. 46.$		$2. 33.$

De cette phase observée, il suit que le centre  $L$  de la  $\odot$  étoit moins élevé sur l'horizon que celui  $S$  du Soleil d'une quantité  $LD = - 21' 33''$ .

Et que ce même centre  $L$  étoit à l'occident  
 d'une quantité.....  $SD = + 1' 17''$   
 Conséquemment.....  $SZL = - 1. 34.$

*Quatrième & dernière Observation, faite au fil vertical  
 & calculée pour  $4^h 22' 23''$ .*

Passage	{	du premier bord du Soleil.....	$4^h 19' 28''$	Differ. 0' 18" 2. 37. 0. 22.
		de la corne occidentale de la Lune...	$4. 19. 46.$	
		de la corne orientale de la Lune.....	$4. 22. 23.$	
		du second bord du Soleil.....	$4. 22. 45.$	

De cette phase observée, il suit que le centre  $L$  de la  $\odot$  étoit moins élevé  
 sur l'horizon que le centre  $S$  du  $\odot$  d'une quantité  $LD = - 20' 21''$

Et que ce même centre  $L$  étoit à l'occident  
 du centre  $S$  d'une quantité.....  $SD = + 0. 28.$   
 Conséquemment.....  $SZL = - 0. 34.$

De plus, j'ai déduit de ces phases observées les grandeurs  
 de l'Éclipse & les distances des cornes que voici :

à  $4^h 5' 12''$ , grandeur de l'Écl. =  $5' 10''$ ; dist. cornes =  $17' 28''$   
 $4. 13. 0$ , grandeur de l'Écl. =  $8. 24$ ; dist. cornes =  $21. 45.$   
 $4. 19. 4$ , grandeur de l'Écl. =  $10. 45$ ; dist. cornes =  $24. 10.$   
 $4. 22. 22$ , grandeur de l'Écl. =  $12. 2$ ; dist. cornes =  $25. 12.$

Enfin je conjecture que l'erreur des Tables est en longitude,

Pour les Tables de M. Mayer.....  $+ 7''$ .

Pour les Tables de M. Clairault.....  $- 44.$

Mais ce dont je suis plus certain, c'est que dans la cir-  
 constance dont je viens de donner le petit nombre d'Obser-  
 vations que j'ai pu faire, les Tables de M.<sup>rs</sup> Clairaut &  
 Mayer diffèrent entre elles,

Quant à la longitude, de.....  $- 51''$

à la latitude, de.....  $- 12.$

à l'ascension droite, de.....  $- 56.$

Le temps étoit donc si peu favorable, que ce que je viens  
 de donner est à quoi se réduit ce que je puis dire de l'obser-  
 vation de cette Éclipse du 24 Juin 1778.



## M É M O I R E

*Sur la décomposition de plusieurs Sels neutres à bases  
d'alkalis fixes & volatils , par l'acide marin.*

Par M. C O R N E T T E.

Présenté  
à l'Académie  
le 17 Mars  
1774.  
Relû  
le 27 Mai  
1778.

**M.**<sup>rs</sup> MARGRAFF & BAUMÉ se sont occupés les premiers de l'objet principal que le titre de ce Mémoire vient d'énoncer ; mais ces deux habiles Chimistes ne s'accordant pas sur les mêmes faits , il en résulte au fond une incertitude d'autant plus fondée , que de part & d'autre on cite des expériences bien faites.

La matière , intéressante par elle-même , le devient donc davantage par cette diversité de sentimens , & semble exiger des recherches & des observations ultérieures , pour tâcher de découvrir pourquoi , en opérant avec les mêmes substances , on obtient des résultats si opposés.

J'ose me flatter que mon travail tendant à éclaircir cette matière par une suite de procédés variés , nouveaux , étendus sur plus de mixtes salins , & comparés avec ceux qui ont déjà été employés , l'Académie voudra bien agréer l'hommage que j'ai l'honneur de lui en faire , pour le soumettre à son jugement.

Négligeant absolument toute espèce de remarques théoriques qui pourroient ramener à l'ordre admis & reconnu des affinités , ces décompositions extraordinaires , quoiqu'elles y paroissent tout-à-fait contraires , je me bornerai à ne présenter que les faits.

Mais avant d'entrer dans aucun détail sur la manière plus simple , plus naturelle , ce me semble , & plus expéditive , avec laquelle j'ai procédé , pour faire opérer à l'acide marin les décompositions extraordinaires dont il s'agit , il convient que j'expose en peu de mots ce qui a été fait en premier lieu , dans les mêmes vues , par M.<sup>rs</sup> Margraff & Baumé.

M. Margraff, dans sa Dissertation sur le Sel commun, imprimée dans le second volume de ses *Opuscles*, édition françoise, affirme qu'il est parvenu à décomposer le nitre & le nitre quadrangulaire, par l'acide marin, en mêlant cet acide avec ces sels, & en leur faisant supporter l'action du feu le plus fort dans des vaisseaux fermés: voici ce qu'il dit à ce sujet, dans les pages 363 & suivantes de cette même Dissertation. « Nous avons vu que l'acide du nitre, quand on en verse une quantité convenable sur le sel commun, & qu'on « l'en retire ensuite par la distillation, pousse dehors l'acide du « sel, & s'unit avec la partie alkaline du même sel en nitre « cubique: quoiqu'il n'y ait pas là un grand sujet d'étonnement, « continue-t-il, vu que, suivant les principes de la Chimie, « un fort acide en chasse un plus foible; c'est pourtant une « chose toute particulière, qu'ici la chose est au rebours, en ce « qu'un bon acide de sel bien pur pousse à son tour l'acide du « salpêtre hors du nitre cubique aussi-bien que hors du nitre « prismatique.» Voici comment cet habile Chimiste procède à la décomposition de ces sels. Après avoir apporté à la préparation de l'une & l'autre de ces substances, toute l'exactitude qu'on lui connoît, il prend une demi-once de nitre en poudre, qu'il met dans une cornue de verre, & sur lequel il verse quatre onces d'esprit de sel très-pur; il distille entièrement tout le liquide & pousse le feu jusqu'à l'incandescence: il observe que pendant la distillation il s'élève d'abord des vapeurs rouges, & ensuite de blanches, & qu'à la fin, lorsque la retorte est en incandescence, elles redeviennent rouges. L'opération étant finie, il fait dissoudre la matière saline restée dans la cornue, dans une suffisante quantité d'eau distillée; il obtient de cette liqueur, par la filtration, évaporation & cristallisation, un vrai sel fébrifuge de Sylvius, à l'exception cependant d'une assez bonne quantité de nitre avec lequel il se trouvoit encore mêlé, & qui par conséquent n'avoit pas été décomposé: il a aussi le même résultat avec le nitre cubique; & quoiqu'après l'opération, il lui en reste encore une partie qui n'est pas entièrement décomposée, il

observe cependant que le nitre cubique se décompose plus facilement que le nitre prismatique; enfin pour lever tous les doutes que l'on pourroit encore avoir sur la réalité de ces décompositions, il sature l'acide qu'il a retiré de ces distillations avec une suffisante quantité d'alkali fixe; il en obtient par la cristallisation du sel marin régénéré, mais parmi lequel il se trouve du vrai nitre. Il ne parle point dans cette Dissertation de l'action de l'acide marin sur le tartre vitriolé & le sel de Glauber; mais on trouve à la fin du même Ouvrage, *page 455*, une Lettre dans laquelle, en confirmant par son propre témoignage la belle observation de M. Baumé, sur la décomposition du tartre vitriolé par l'acide nitreux, il annonce que la décomposition de ce sel est également possible par l'acide marin, comme par l'acide du nitre: enfin ce n'est pas seulement le tartre vitriolé, ajoute-t-il, mais encore le sel de Glauber qui est aussi décomposable, tant par l'acide nitreux que par l'acide marin; & comme il ne fait qu'indiquer ces décompositions, sans entrer dans aucun détail sur la manière d'opérer, on est en droit de présumer qu'il n'a pas procédé d'une façon différente pour la décomposition de ces sels, que pour celle du nitre & du nitre quadrangulaire: or l'on voit qu'il résulte de ces expériences de M. Margraff, que le tartre vitriolé, le sel de Glauber, le nitre & le nitre quadrangulaire sont décomposés par l'acide marin, mais aussi que cet habile Chimiste a employé, pour y parvenir, une quantité d'acide très-considérable, & que nonobstant il a été obligé pour l'avoir complete, à avoir recours aux cohobations réitérées, & à la distillation, poussée jusqu'à l'incandescence; ce qui d'après cet exposé rend ces expériences longues & pénibles.

M. Baumé au contraire paroît s'être servi d'un moyen plus simple & plus naturel: il est vraisemblable que cet habile Chimiste, après avoir décomposé le tartre vitriolé & le sel de Glauber par l'acide nitreux, procédé dont on trouve le détail à la *page 438*, *premier Volume de sa Chimie*, a tenté avec l'acide marin les mêmes expériences qu'avec l'acide nitreux. Il paroît que, s'il n'a point obtenu de décomposition

avec cet acide, ainsi qu'il l'avance aux pages 39 & 43, *second Volume de sa Chimie*, particulièrement pour le sel de Glauber & le nitre quadrangulaire, cela ne peut dépendre que de ce qu'ayant opéré de même avec l'acide marin qu'avec l'acide nitreux, c'est-à-dire que s'étant servi d'acide marin ordinaire sur une dissolution de sel de Glauber & de nitre quadrangulaire, cet acide se trouvoit trop affoibli, & étoit par ce moyen hors d'état de pouvoir agir sur ces sels, comme j'aurai occasion de le faire voir par la décomposition du tartre vitriolé.

D'après ce court exposé des expériences que ces deux habiles Chimistes ont faites sur cet objet, il conviendrait que je rapportasse de suite celles qui me sont propres ; mais avant d'entrer dans ce détail, j'ai cru devoir répéter moi-même les expériences de M. Margraff, dont je viens de parler, afin d'observer les principaux phénomènes qui se passeroient pendant la décomposition de ces sels, les comparer ensuite à celles que j'ai faites.

J'ai procédé pour la décomposition du nitre, selon la méthode indiquée par ce Chimiste, c'est-à-dire, j'ai soumis à la distillation, dans une cornue de verre, une demi-once de nitre en poudre avec quatre onces d'acide marin fumant très-pur ; il s'est élevé d'abord, comme il l'a fort bien remarqué, des vapeurs rouges, mais qui sont devenues blanches quelque temps après ; sur la fin de la distillation, il s'est excité dans la cornue une effervescence assez considérable, dont M. Margraff n'a point parlé, & que je ferai mieux connoître à l'article de la décomposition de ce sel ; j'augmentai le feu, jusqu'à faire rougir la cornue, ce dernier degré de chaleur fit encore dégager quelques vapeurs d'acide nitreux : lorsque la distillation fut finie, je délutai les vaisseaux, je fis dissoudre la matière saline restée dans la cornue dans une suffisante quantité d'eau distillée ; après avoir filtré, fait évaporer & cristalliser la liqueur, j'obtins des cristaux de sel fébrifuge de Sytvius, mais qui étoient encore mêlés d'une quantité considérable de nitre qui n'avoit pas été décomposée.

Je répétai la même expérience sur le nitre quadrangulaire, & quoique par cette opération le sel ne fût pas entièrement décomposé, j'observai néanmoins, comme l'a fort bien remarqué M. Margraff, que ce sel se décomposoit plus facilement que le nitre : j'aurai occasion de faire voir dans la suite l'analogie que l'acide marin conserve pour sa base ; quoique cette base soit combinée avec un acide plus fort que lui, je démontrerai que je parviens à décomposer ces sels avec beaucoup moins d'acide que ceux à base d'alkali fixe végétal.

Je fis le même travail sur le tartre vitriolé & le sel de Glauber ; mais je ne tardai pas à m'apercevoir, comme on le verra par les expériences suivantes, que l'acide marin n'opéroit point par cette voie d'une manière aussi marquée sur ces sels, que sur le nitre & sur le nitre quadrangulaire.

Je mis dans une cornue de verre, une demi-once de tartre vitriolé très-pur, sur lequel je versai quatre onces d'acide marin fumant ; je poussai la distillation jusqu'à l'incandescence ; je fis dissoudre la matière saline restée dans la cornue, dans de l'eau distillée, & je n'obtins après l'évaporation de la liqueur qu'un léger indice de décomposition.

Je répétai la même opération sur le sel qui me restoit avec la même quantité d'acide : le résultat de cette seconde expérience fut absolument semblable à la première.

Enfin, après avoir employé pour la décomposition de ce sel douze onces d'acide marin, ce qui fait, comme on le voit, vingt-quatre parties d'acide sur une de sel, je ne pus encore obtenir qu'une décomposition très-imparfaite, puisqu'il me resta plus des trois quarts du tartre vitriolé, qui n'avoit souffert aucune altération. Le sel de Glauber, traité de même, ne réussit pas mieux ; & je ne pus parvenir avec cette quantité d'acide à me procurer une décomposition plus marquée.

Les expériences que j'ai faites, & dont je vais rendre compte, quoique tendantes au même but que celles de M. Margraff, paroîtront, ce me semble, plus simples & plus faciles, si l'on considère que je n'emploie pour opérer ces décompositions ni distillation, ni incandescence, & beaucoup moins d'acide :

d'acide : il est vrai que ce n'a été qu'après plusieurs recherches ultérieures, & par des expériences variées & multipliées, que je suis parvenu au but que je m'étois proposé. Mon objet principal dans tout ce travail, étoit non-seulement de mieux décomposer ces sels, mais encore d'observer tous les phénomènes qui devoient se passer pendant leurs dissolutions dans cet acide; & c'est-là le motif qui m'a déterminé à employer l'acide marin dans divers degrés de concentration. Ce Mémoire étoit presque fini, lorsque j'ai eu connoissance du travail que M. Margraff avoit fait sur cette matière, & dont je viens de rendre compte; le desir de le mieux faire connoître, en démontrant que l'on peut y parvenir par un procédé différent, m'a engagé à le continuer & à l'étendre par une nouvelle suite d'expériences.

Comme le tartre vitriolé est celui de tous les sels qui m'a présenté le plus de difficultés pour sa parfaite décomposition, c'est aussi celui sur lequel j'ai fait le plus de tentatives.

*Décomposition du TARTRE VITRIOLÉ par l'acide marin.*

Je fis dissoudre dans une suffisante quantité d'eau distillée, une demi-once de tartre vitriolé; je versai sur ce sel, ainsi dissous, deux onces d'acide marin ordinaire, la liqueur évaporée dans une capsule de verre au point de cristallisation, ne me fournit aucun changement; les cristaux que j'en obtins par le refroidissement, étoient du tartre vitriolé qui n'avoit souffert aucune altération: la seule différence que j'y trouvai ne consistoit que dans la forme des cristaux qui étoient disposés en poignards ou lames d'épée, jetés les uns sur les autres confusément; ils approchoient assez, par cette forme, de ceux du sublimé corrosif, obtenus par une évaporation lente.

Peu satisfait de cette expérience, je crus devoir procéder d'une autre manière: je variaï les doses de cet acide, tantôt en ajoutant moins d'eau & beaucoup plus d'acide, & tantôt en distillant l'acide marin, dont je recevois les vapeurs sur

*Mém. 1778.*

G



une dissolution de tartre vitriolé; je ne fus guère plus heureux après toutes ces tentatives, je n'obtins aucune marque de décomposition; car je retrouvai après l'évaporation de la liqueur, tout le tartre vitriolé qui n'avoit souffert aucune altération.

Tous ces moyens m'ayant donc été infructueux pour décomposer ce sel, je m'y pris d'une autre manière: comme jusqu'ici je n'avois employé que de l'acide marin ordinaire sur une dissolution de tartre vitriolé, je présumai que si le succès n'avoit pas été plus favorable, cela ne pouvoit dépendre premièrement que de l'eau que j'avois employée pour dissoudre ce sel, qui venant à affoiblir cet acide, qui l'étoit déjà beaucoup par lui-même, le mettoit hors d'état d'agir d'une manière aussi efficace que s'il eût été plus concentré; secondement, qu'ayant opéré avec l'acide marin, en quelque sorte comme M. Bauminé l'avoit fait avec l'acide nitreux, je ne pouvois pas obtenir les mêmes résultats, puisqu'à volume égal, l'acide nitreux le plus foible contient plus de matière saline acide, que l'acide marin le plus fumant.

Ce fut d'après ces conjectures que je me déterminai à ne plus employer que l'acide marin fumant, seul & sans addition, dans l'espérance que faisant passer sur ce sel cet acide dans le plus grand état de concentration, je pourrois peut-être, par son action immédiate, y occasionner quelque altération: cette expérience eut tout le succès que j'avois lieu d'en attendre; & quoique la décomposition ne fut pas complète, j'eus la satisfaction néanmoins de voir ce sel presque totalement décomposé.

Je mis dans un matras une demi-once de tartre vitriolé réduit en poudre, sur lequel je versai une once d'acide marin fumant; je fis bouillir pendant quelque temps cet acide sur ce sel; je décantai la liqueur; je reversai de nouveau sur celui qui n'avoit pas été dissous la même quantité, que je fis bouillir également; je rassemblai ensuite ces dissolutions, auxquelles j'ajoutai une once d'eau distillée, afin de la faciliter & de l'étendre davantage; j'en obtins, par le refroidissement, une

quantité suffisante de petits cristaux très-jaunes. La liqueur qui me restoit ayant été soumise à l'évaporation, me fournit encore des cristaux semblables aux premiers : je fis égoutter ce sel sur le papier gris ; il perdit une partie de sa couleur, mais resta encore extrêmement acide ; néanmoins il avoit en cet état toutes les propriétés du sel marin régénéré ; il pétillloit comme lui sur les charbons ardens ; l'acide vitriolique concentré le décomposoit, & faisoit dégager beaucoup de vapeurs blanches d'acide marin ; il précipitoit aussi en lune cornée la dissolution d'argent, mais celle de mercure étoit toujours précipitée en turbith minéral ; couleur qui, comme on le voit, me déceloit encore la présence de l'acide vitriolique.

Cette dernière expérience suffisoit, ce me semble pour me laisser encore douter sur la réalité de cette décomposition, puisque je pouvois aussi-bien attribuer à la présence de l'acide marin, encore engagé dans les cristaux de ce sel, qu'à l'acide vitriolique, les principaux phénomènes que je viens d'énoncer ; mais pour m'éclaircir sur cet objet, je le fis dissoudre dans une suffisante quantité d'eau distillée, il s'excita aussitôt assez de froid pour faire descendre le thermomètre de Réaumur, de 6 degrés, la température étant à 15 au-dessus de la glace ; effet que je presumai ne devoir être produit que par le sel fébrifuge de Sylvius déjà formé ; puisque celui qui s'étoit excité au moment du mélange de l'acide marin avec le tartre vitriolé, n'avoit fait descendre le thermomètre que de 2 degrés. La dissolution de ce sel étoit, un peu laiteuse, je la filtrai en cet état, elle passa fort clair sans couleur, mais encore très-acide ; soumise à l'évaporation, elle me fournit de petits cristaux très-blancs, mais qui ne perdirent point leur acidité, même après avoir été égouttés long-temps sur le papier gris ; les dissolutions répétées dans l'eau distillée, ainsi que les imbibitions sur le papier n'ayant donc point suffi pour enlever à ce sel cet acide surabondant, j'entrepris de le saturer avec une suffisante quantité de craie ; ce moyen me réussit, & je parvins à me procurer d'une part du sel

fébrifuge de Sylvius parfaitement neutre, & d'une autre de la sélénite.

Cette expérience me prouvoit donc incontestablement la décomposition réelle du tartre vitriolé, & la nécessité pour y parvenir d'employer l'acide marin dans cet état de concentration; mais il me restoit encore des doutes, que je ne pouvois lever que par une nouvelle expérience : c'étoit de m'assurer si l'acide vitriolique, ainsi adhérent à ces cristaux, provenoit ou de celui qui résultoit de la décomposition du tartre vitriolé, ou de celui qui auroit pu s'élever avec l'acide marin lui-même, préparé à la manière de Glauber; pour m'en convaincre, je fis l'expérience suivante.

Je fis évaporer dans une capsule de verre au bain de sable, une once d'acide marin fumant; lorsqu'une bonne partie de l'acide fut dissipée, & que la liqueur qui restoit cessa de donner des vapeurs, je la saturai avec des cristaux de soude, j'obtins par ce moyen du sel marin, avec lequel se trouvoit beaucoup de sel de Glauber: cette preuve n'étoit pas équivoque, & me confirma dans l'idée où j'étois, que si ce sel avoit conservé si opiniâtrément son acidité, cela ne pouvoit dépendre que de l'acide vitriolique, que l'acide marin qui avoit été fait à la manière de Glauber, avoit enlevé pendant la distillation, & qui ne se trouvant combiné avec aucune base, décomposoit le sel fébrifuge de Sylvius à mesure qu'il se formoit.

Je sentis dès-lors la nécessité de ne plus employer pour toutes mes expériences, que de l'acide marin qui auroit été distillé sur de nouveau sel marin purifié & décrépit: persuadé qu'en employant cet acide dans cet état de pureté, la décomposition du tartre vitriolé seroit plus facile & moins équivoque. Je mis dans un matras une demi-once de tartre vitriolé en poudre, sur lequel je versai une once & demie de cet acide marin, ainsi purifié & dégagé de toutes matières étrangères; je procédai de la même manière que je l'avois fait pour les expériences précédentes; le tartre vitriolé fut entièrement décomposé par cette opération, & converti en sel

fébrifuge de Sylvius\*. Une seule dissolution de ce sel dans l'eau distillée, suffit pour lui enlever la portion d'acide qui se trouvoit encore engagée dans les cristaux, & le rendit parfaitement neutre.

Toutes les expériences suivantes ont été variées avec le même acide marin, employé dans différens états; mais n'ayant pu obtenir aucune décomposition complète avec cet acide ainsi affoibli, je me bornerai à ne rapporter par la suite que celle que je me suis procuré avec l'acide marin fumant & pur, comme dans l'expérience précédente, afin d'éviter les répétitions inutiles.

*Décomposition du SEL DE GLAUBER par l'Acide marin.*

L'acide marin agit d'une manière plus marquée sur ce sel que sur le tartre vitriolé : l'analogie qu'il conserve pour sa base est d'autant plus sensible que la décomposition en est plus facile, présente moins de difficultés, & exige une quantité beaucoup moindre d'acide.

Je mis dans un matras une demi-once de sel de Glauber en cristaux : je versai par-dessus six gros d'acide marin fumant; il s'excita dans l'instant du mélange assez de froid pour faire descendre le thermomètre de 6 degrés, la température étant à 15; quoique cependant il n'y eût qu'une partie de ce sel qui pût se dissoudre, je fis bouillir pendant quelque temps cet acide, j'étendis cette dissolution dans une demi-once d'eau distillée, & j'obtins par le refroidissement de la liqueur, un sel en petits cristaux très-jaunes, mais qui perdit entièrement sa couleur & son acidité, après avoir été égoutté sur le papier gris : c'étoient autant de petits cubes parfaits que je ne pouvois méconnoître pour du sel marin; il en avoit d'ailleurs la saveur & toutes les propriétés.

Cette décomposition, comme on le voit, est très-prompte & très-facile, mais on pourroit m'objecter qu'elle ne peut

---

\* L'acide marin dont je me suis servi pesoit, dans une bouteille qui contenoit juste une once d'eau distillée, neuf gros trente grains.

point servir à démontrer, comme je l'ai avancé, l'analogie que l'acide marin conserve pour sa base, puisque, pourra-t-on me dire, la quantité d'acide que j'ai employée pour la décomposition de ce sel, respectivement à l'eau de cristallisation qu'il contient, est au moins égale à celle que j'ai employée pour la décomposition du tartre vitriolé : pour prévenir cette objection, je fis l'expérience suivante.

Je mis dans un matras une demi-once de sel de Glauber, que j'avois fait tomber en efflorescence avec la même quantité d'acide marin que pour l'expérience précédente ; j'observai qu'il s'excita moins de froid, mais la décomposition eut également lieu.

Cette dernière expérience, en démontrant de plus en plus l'analogie que l'acide marin conserve pour sa base, prouve encore que la décomposition de ce sel peut se faire également avec de l'acide plus foible, puisque dans la première expérience, où je me suis servi du sel de Glauber en cristaux : cet acide devoit essentiellement se charger de l'eau de cristallisation de ce sel, & avoit néanmoins opéré la décomposition, ce qui prouve, comme l'a remarqué le savant auteur du Dictionnaire de Chimie, que plus les sels contiennent d'eau de cristallisation, & moins ils contractent d'union intime avec les acides auxquels ils sont combinés, & c'est ce qui fait que la décomposition du sel de Glauber s'opère plus facilement que celle du tartre vitriolé.

Je ferai observer qu'il arrive pour la décomposition de ces sels par l'acide marin, ce qui se passe pour celle du tartre vitriolé par l'acide nitreux ; que si après avoir retiré un certain nombre de cristaux, on continue à faire évaporer l'eau-mère, on n'obtient plus le même sel ; l'acide vitriolique libre, contenu dans cette liqueur, reprend, selon la remarque de M. Baumé, tous ses droits, réagit sur ces nouveaux sels, & les décompose.

*Décomposition du nitre & du nitre quadrangulaire par l'acide marin.*

Ces deux expériences ont été faites en même temps, &

sur les mêmes quantités de sels de nitre & de nitre quadrangulaire; la décomposition du nitre s'est faite plus difficilement, & a exigé une plus grande quantité d'acide marin que celle du nitre quadrangulaire : les phénomènes qui se sont passés pendant leurs dissolutions, ont été bien différens de ceux des opérations précédentes.

Je mis une demi-once de chacun de ces sels réduits en poudre dans deux petits matras; je versai dans celui où étoit contenu le nitre, une once d'acide marin fumant, & dans celui où étoit le nitre quadrangulaire, six gros de cet acide seulement : ce mélange se fit sans aucun mouvement sensible, mais quelque temps après il s'excita assez de froid pour faire descendre le thermomètre de plusieurs degrés; pour le nitre, le froid fut de 3 degrés; pour le nitre quadrangulaire, le froid fut de 6 : la température étant ce jour-là à 15 degrés au-dessus de la glace.

Je plaçai ces deux matras sur un bain de sable que j'échauffai par degrés; avant même que la liqueur commençât à entrer en ébullition, il s'excita dans chacun de ces vaisseaux un mouvement d'effervescence très-sensible; les vapeurs qui se répandirent étoient rousses, pénétrantes & très-nauséabondes; elles avoient absolument l'odeur de celles de l'eau régale. Je fis bouillir pendant quelque temps cet acide sur ces sels, j'ajoutai sur chacun de ces mélanges, une demi-once d'eau distillée, & lorsqu'ils furent entièrement dissous, je retirai les vaisseaux du feu; je laissai ensuite refroidir les liqueurs, pour observer l'ordre de la cristallisation; le nitre me fournit une assez bonne quantité de petits cristaux cubiques, parmi lesquels il y en avoit encore quelques-uns qui étoient disposés en petites aiguilles, que je reconnus pour de vrai nitre qui n'avoit souffert aucune altération.

Le nitre quadrangulaire fut décomposé en entier avec cette quantité d'acide; les cristaux que j'obtins étoient autant de cubes parfaits absolument semblables au sel marin, ce qui prouve encore, comme je l'ai remarqué pour le sel de Glauber, l'analogie que cet acide conserve pour sa base.

Je reverfai de nouveau fur les petits criftaux nitreux deux gros du même acide marin; la diffolution fe fit de la même manière que je viens de le décrire: ce fel, par cette feconde opération, fut décomposé entièrement, & les criftaux que j'obtins étoient abfolument femblables aux premiers.

Je les fis diffoudre néanmoins chacun féparément dans l'eau diftillée, afin de leur enlever une petite portion d'acide qui mouilloit encore les criftaux, & qui les coloroit; après avoir filtré & fait évaporer les liqueurs jufqu'au point de criftallifation, j'en obtins par le refroidiffement deux fels très-blancs abfolument neutres, & qui ne différoient les uns des autres que par leurs bafes: au lieu de fufer fur les charbons ardens, ils décrépitoient; l'acide vitriolique concentré en dégageoit beaucoup de vapeurs blanches d'acide marin, & les diffolutions d'argent & de mercure, faites l'une & l'autre par l'acide nitreux, étoient précipitées fous forme de caillé.

Les deux efèces d'eau-mères qui me reftoient étoient d'une couleur jaune citrine, & fournisfoient encore deux nouvelles preuves de la parfaite décomposition de ces fels; elles avoient toutes deux les propriétés d'une eau régale dans un état bien marqué; car je parvins à diffoudre en très-peu de temps, & même à froid, dans ces deux liqueurs, une afsez bonne quantité de feuilles d'or: ces diffolutions étoient très-claires, & elles m'ont fourni, par les expériences auxquelles je les ai foumifes, les mêmes réfultats, toutes chofes d'ailleurs égales, qu'une diffolution d'or ordinaire, ce qui fait un moyen peu connu pour faire de l'eau régale \*; moyen qui, quelqu'embarraffant qu'il foit, peut toujours ferver dans des cas où, faute d'acide nitreux avec de l'acide marin & du nitre, on feroit obligé de fe paffer d'eau régale.

Mais on trouve dans la Chimie de Boërhaave, *page 440*, qu'en foumettant à la diftillation deux parties d'acide marin fumant, fur une de nitre, on obtient une très-bonne eau

---

\* Roth, dans fa Chimie, dit d'une manière vague & générale, qu'avec l'acide marin & le nitre, on peut faire de l'eau régale,

régale;

régale : il paroît néanmoins que ce savant Chimiste n'avoit aperçu ce phénomène qu'à demi, puisqu'il dit ensuite que la matière saline restée dans la cornue, étoit un vrai nitre qui n'avoit souffert aucune altération ; ce qui ne peut pas être, d'après les expériences dont je viens de rendre compte, attendu que l'acide marin distillé avec le nitre, ne peut point former d'eau régale, sans qu'au préalable il y ait une portion de nitre qui soit décomposée.

*Décomposition des Sels ammoniacaux vitrioliques & nitreux par l'acide marin.*

Après avoir examiné l'action de l'acide marin sur le tartre vitriolé, le sel de Glauber, le nitre & le nitre quadrangulaire, je crus qu'il étoit essentiel, & même indispensable pour étendre davantage ce travail, de suivre le même objet sur les sels ammoniacaux vitrioliques & nitreux ; on verra, par les expériences dont je vais rendre compte, que cet acide agit d'une manière plus marquée sur ces sels à base d'alkali volatil, que sur ceux à base d'alkali fixe végétal, puisque les décompositions qu'il opère sur eux sont plus promptes & plus faciles.

Je mis dans deux matras une demi-once de chacun de ces sels ammoniacaux que j'avois préparés moi-même, & qui étoient parfaitement neutres ; je versai dans chaque matras, six gros du même acide marin fumant : après avoir agité ces mélanges pendant quelque temps, je m'aperçus que le froid qui s'excitoit étoit assez sensible ; je plongeai deux thermomètres dans ces deux matras, la dissolution du sel ammoniacal vitriolique occasionna 4 degrés de froid, & celle du sel ammoniacal nitreux m'en donna 5, la température étant ce jour-là à 10 degrés au-dessus de la glace ; j'exposai les vaisseaux, comme je l'ai fait pour les expériences précédentes, à une chaleur capable de faire bouillir les liqueurs qu'ils contenoient ; ce degré de chaleur n'excita aucun mouvement sensible sur le sel ammoniacal vitriolique, mais j'observai avant même que l'acide entrât en ébullition sur le sel ammoniacal



nitreux, que l'effervescence étoit plus considérable, & que les vapeurs qui s'élevoient étoient plus vives, plus pénétrantes que celles que j'avois aperçues pendant la décomposition des sels de nitre & de nitre quadrangulaire; j'ajoutai après quelques minutes d'ébullition, dans chaque matras, une demi-once d'eau distillée pour que ces sels, qui n'étoient pas encore parfaitement dissous, le fussent plus exactement; je versai les liqueurs dans des capsules de verre, & elles me fournirent toutes deux, par le refroidissement, une infinité de cristaux disposés par petites aiguilles réunies en forme de barbe de plumes: ils étoient absolument semblables à ceux du sel ammoniac; ces deux sels étoient très-colorés, mais celui résultant de la décomposition du sel ammoniacal nitreux, l'étoit beaucoup plus que le premier; il étoit rouge & brillant comme le rubis: cette différence de couleur m'a paru ne devoir être attribuée qu'au phlogistique, dont le sel ammoniacal nitreux est si abondamment pourvu. Ces deux sels, égouttés sur le papier gris, perdirent presque entièrement leur acidité, mais conservèrent, à peu de chose près, leurs couleurs, ils avoient en cet état toutes les propriétés du sel ammoniac ordinaire: ce dont je me suis assuré facilement par l'expérience.

Je fis dissoudre ces sels séparément dans une suffisante quantité d'eau distillée, dans le dessein de leur enlever cette matière colorante; mais je ne fus pas long-temps à m'apercevoir que cette nouvelle dissolution dans l'eau ne produiroit pas l'effet que j'avois attendu; car les liqueurs, après avoir été filtrées & évaporées, ne me fournirent encore que des sels très-jaunes, quoique je les eusse fait long-temps égoutter sur le papier gris.

Je présimai que le meilleur moyen pour parvenir à détruire cette couleur étoit la voie de la sublimation: je crus pour cet effet devoir me servir d'un intermède qui, n'ayant aucune action sur ces sels, pût seulement se charger de la partie colorante; ce fut la terre blanche d'alun bien pur, que j'avois édulcorée à plusieurs reprises dans de l'eau bouillante, dont je fis usage.

Je mêlai ces sels séparément dans deux petits matras ou fioles ordinaires, avec une pareille quantité de cet intermédiaire; j'entourai ces vaisseaux dans le sable, & je procédai ensuite à la sublimation, en donnant au commencement une chaleur assez douce & que j'augmentai par degrés, jusqu'à ce que tout fût sublimé & attaché au haut de la fiole. Après la rupture des vaisseaux, je trouvai deux petits pains de sel très-blanc & très-compact, disposés par petits filets, appliqués dans leur longueur parallèlement les uns aux autres: c'étoit de vrai sel ammoniac décomposable par la chaux qui en dégageoit l'alkali volatil; & par toutes les expériences auxquelles je l'ai soumis, je lui ai toujours reconnu tous les caractères qui le distinguent.

L'eau-mère restée de la décomposition du sel ammoniacal nitreux, étoit une très-bonne eau régale, bien supérieure à celle obtenue de la décomposition du nitre & du nitre quadrangulaire; elle dissolvoit l'or beaucoup plus promptement & en plus grande quantité: cette dissolution d'or ne différoit en rien de celle formée par le concours de l'acide nitreux & du sel ammoniac, puisque l'or précipité de cette dissolution, soit avec l'alkali fixe, soit avec l'alkali volatil, étoit également fulminant, au lieu que celui précipité des deux autres espèces d'eaux régales, ne fulminoit que par l'alkali volatil seulement; ce qui prouve que ces eaux régales, résultant des décompositions du nitre, du nitre quadrangulaire & du sel ammoniacal nitreux, ne diffèrent en rien, & produisent, comme je viens de le faire remarquer, les mêmes effets que celles qui sont faites par les mélanges d'acides nitreux, d'acide ou de sel marin & de sel ammoniac.

Je ne m'étendrai pas davantage sur les remarques que présentent naturellement mes expériences: je me bornerai seulement à conclure, d'après les faits que je viens de rapporter, que quoique l'acide marin soit de tous les acides minéraux le plus foible, & celui que l'on a toujours regardé comme le moins susceptible de contracter de fortes adhérences avec les bases alkalines, il est néanmoins très-positif

que cet acide, selon l'état de concentration dans lequel on l'emploie, est capable de décomposer tous les sels neutres résultans de l'union des acides vitrioliques & nitreux avec des bases alkalines quelconques: je ferai observer en même temps que ces expériences qui semblent faire autant d'exceptions à la Table d'affinités, prouvent, comme l'ont déjà remarqué plusieurs habiles Chimistes, la nécessité qu'il y auroit de faire quelques changemens à cette Table, en la présentant sous un point de vue moins général.

Il me reste encore à examiner l'action comparée de l'acide marin & de l'acide nitreux, sur diverses autres substances salines: ce qui sera l'objet de plusieurs Mémoires, que j'aurai l'honneur de présenter successivement à l'Académie.



*OBSERVATION  
DE L'ÉCLIPSE DE SOLEIL,  
DU 24 JUIN 1778,  
Fait à Sainte-Geneviève.*

Par M. PINGRÉ.

J'AVOIS disposé un Télescope Grégorien de 6 pieds, pour observer le commencement de cette Éclipse ; mais un mal douloureux, dont j'étois atteint, ne me permit pas de manier cet instrument ; je fus forcé de me contenter de la lunette de mon quart-de-cercle, qui n'a que 2 pieds de longueur, mais qui est très-bonne.

4 Juillet  
1778.

Commencement de l'Éclipse à  $3^h 53' 18''$  temps vrai, bonne observation ; mais vu la petitesse de la lunette, il seroit très-possible que l'Éclipse eût commencé quelques secondes plus tôt.

J'ai ensuite observé plusieurs passages des cornes par le fil vertical de la lunette ; mais ces observations sont si incertaines, que je ne crois pas devoir les rapporter : le ciel, très-beau les jours précédens & les jours suivans, s'est couvert peu avant le commencement de l'Éclipse ; le Soleil n'a paru d'abord que dans de légers éclaircis, durant un desquels il m'a été permis d'observer avec assez de précision le commencement de l'Éclipse : vers 4 heures & demie le Soleil s'est absolument caché, & n'a plus reparu.



**O B S E R V A T I O N**  
**SUR L'ÉCLIPSE DE SOLEIL,**  
**DU 24 JUIN 1778.**

Par M. L E M O N N I E R.

Lû  
le 27 Juin  
1778.

J'AUROIS bien désiré que quelqu'Observateur connu, & dont l'exactitude ne fût nullement suspecte dans ces sortes d'observations, eût mesuré, soit aux Açores, soit à la côte d'Afrique, les diamètres du Soleil & de la Lune aux instans qui répondoient au milieu de l'Éclipse; on eût décidé par-là, la juste quantité dont le Soleil auroit paru grossi par les réfractions, si foibles qu'elles puissent être, quoique sensibles dans l'atmosphère de la Lune. Képler & Grégori en ayant averti, il étoit nécessaire de s'assurer d'abord du diamètre apparent de la Lune dans les Éclipses annulaires, & c'est ce qui a été vérifié soigneusement en 1748 & en 1764.

Le ciel n'a pas été favorable à Paris pendant la durée entière de cette Éclipse, & je n'ai pu mesurer que quelques phases dans le lieu où je demeure, sous la latitude de  $48^{\text{d}} 52' 07'' \frac{1}{2}$ : le Soleil étant sorti d'un nuage  $15''$  avant  $3^{\text{h}} 57'$ , commencement de l'Éclipse, publié dans le Livre de la *Conn. des Temps*; j'ai jugé, par la phase observée, que le commencement auroit été vu vers  $3^{\text{h}} 54'$  de temps vrai: les phases qui suivent sont des plus exactes, ayant été mesurées par un temps fort serein, & avec ma lunette de 8 à 9 pieds, garnie de son micromètre.

*Distances des pointes des Cornes.*

$\lambda$ $4^{\text{h}} 07' 5$ à $6''$ .....	$19' 50'' \frac{2}{3}$ .
4. 17. 10.....	24. 01.
4. 28. $52 \frac{1}{2}$ .....	27. 05.

Et à ce dernier instant, la partie lumineuse qui restoit du Soleil, a été vue d'environ 15 minutes, par où j'ai jugé que

L'Éclipse auroit excédé 6 doigts  $\frac{2}{3}$ , si le ciel ne s'étoit pas couvert de nuages.

**M.** D'ULLOA, qui m'a envoyé son observation de l'Éclipse totale, vue à la mer par une latitude de  $37^{\text{d}} 14'$  à cent lieues ou environ, à l'Ouest du cap Saint-Vincent, auroit bien désiré qu'on en eût conclu la longitude géographique de ce Cap, lequel est déjà bien mieux placé sur la Carte de M. Pingré, que sur celle du Neptune oriental. A  $4^{\text{h}} 48'$ , fin de l'Éclipse, & le milieu à  $3^{\text{h}} 50'$ .

Quand on aura reçu tous les détails circonstanciés pour l'observation de l'Éclipse, faite par les Officiers Espagnols, on fera peut-être en état de traiter cette matière avec tout le soin que cette discussion géographique semble exiger; en attendant, nous n'avons pu faire usage que des connoissances acquises sur les Cartes hydrographiques, & de l'Observation astronomique de la durée de l'obscurité totale, savoir  $0^{\text{h}} 4'$ , dont on ne tardera pas à rendre un compte fort étendu.

Une autre observation de la même Éclipse totale, faite à Salé par M. Desoteux, se trouveroit dans le même cas, si ce n'est qu'il s'agit moins de la position géographique de Salé, que de se proposer ici la recherche de la trace absolue du centre de l'ombre aux côtes occidentales de l'Afrique, telle qu'il la faut déduire des observations immédiates.

Il est dit, dans le Mémoire envoyé au Ministre de la Marine & à l'Académie, qu'à  $4^{\text{h}} 25' 07''$  l'Éclipse fut totale, & qu'à  $4^{\text{h}} 22'$ , il ne restoit guère qu'un demi-doigt; que sa durée a été de  $3' 51''$ .

Il suit de-là, qu'à  $4^{\text{h}} 27' 2''\frac{1}{2}$ , ce fut à Salé le milieu de l'Éclipse: la latitude de Salé sur le Neptune oriental est  $34^{\text{d}} 3'$ , & sa longitude  $8^{\text{d}} 42'$  à l'Ouest de Paris. M. Pingré m'a donné le nouveau Salé  $34^{\text{d}} 5'$ ; sa longitude,  $9^{\text{d}} 3' 30''$  à l'Occident du Méridien de Paris, ou bien  $0^{\text{h}} 36' 14''$ : ainsi il étoit alors à Paris, de temps vrai,  $5^{\text{h}} 3' 16''\frac{1}{2}$ , ou de temps moyen,  $5^{\text{h}} 5' 12''\frac{1}{2}$ .

A Cadix, il n'est resté que  $2' 22''\frac{1}{2}$  de la partie claire du

# 64 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Soleil, vers le milieu de l'Éclipse, parce qu'en ce moment, il étoit de temps vrai,  $4^h 25' 41''$ , ou  $3' 2''$  plus tard que lorsqu'on ajoute la demi-durée,  $1^h 3' 46''\frac{1}{2}$ , à l'heure du commencement de l'Éclipse, qui étoit  $3^h 18' 53''$ .

On pourroit donc conjecturer que la phase a été prise trop tard à Cadiz, & qu'il seroit nécessaire de la mieux conclure des phases correspondantes, avant & après cet instant requis.

Par les phases du commencement  $0^d 26' 30''\frac{1}{2}$  &  $27' 33''\frac{1}{2}$ , observées à  $4^h 16' 34''$ ,  $4^h 18' 44''$ , on peut conclure proportionnellement, qu'à  $4^h 17' 30''\frac{1}{2}$  la phase auroit été de  $26' 57''\frac{3}{4}$ .

Or la même phase de  $26' 57''\frac{3}{4}$  a été observée, lors de la diminution de l'Éclipse, à  $4^h 33' 31''$ .

Ces deux correspondantes,  $4^h 17' 30''\frac{1}{2}$  &  $4^h 33' 31''$ , donneroient ainsi le milieu de l'Éclipse à  $4^h 25' 30''\frac{2}{3}$ .

Je supposerai d'abord le milieu, à Cadiz, à  $4^h 25' 0''$  de temps vrai, ou bien en réduisant au Méridien de Paris,  $4^h 59' 25''$ , c'est-à-dire de temps moyen, à  $5^h 01' 23''$ , la latitude du lieu étant  $36^d 31' 07''$ .

Ce milieu diffère à peine, comme l'on voit, de  $0^h 3' 50''$  de celui qui a été conclu pour Salé, par la demi-durée de l'obscurité totale & par l'immersion du Soleil sous le disque opaque de la Lune, c'est-à-dire dans un lieu plus occidental de  $0^h 1' 49''$  que Cadiz. L'erreur des Tables des Institutions, que j'ai calculée avec beaucoup de soin pour l'instant du commencement & de la fin de l'Éclipse, vue à Gréénwich, est —  $3' 16''\frac{1}{2}$  ou négative: je n'ai pas trouvé la même erreur par les phases du commencement & de la fin, quoique calculées en toute rigueur; bien plus, le commencement, vu à Paris à  $3^h 52' 18''$ , ne donne l'erreur des Tables que —  $3' 23''$ , au lieu que celui de Londres donne —  $3' 42''$ : ces variétés peuvent provenir, il est vrai, de plus d'une cause, mais les erreurs dans l'observation du commencement y concourent assurément.

Supposant donc l'erreur des Tables tant soit peu plus grande

grande ou de 3 minutes  $\frac{1}{2}$ , négative; je trouve à Salé la distance apparente de la Lune au Soleil  $0^d 0' 10''$ , à l'instant observé du milieu de l'obscurité totale : ainsi il s'en manquoit fort peu que la Lune n'eût atteint le Soleil, selon la correction qu'on a supposée tant aux Tables qu'à la position géographique du lieu.

Mais puisque l'observation paroît fort exacte, quant à la longitude de la Lune, elle doit donc nous éclairer sur le lieu de la Terre, où s'est fait le passage du centre de l'ombre, & sur la correction qu'il faut faire à la latitude de la Lune, tirée des mêmes Tables.

Pour plus d'éclaircissemens, au cas que la description du pays se perfectionne à l'avenir, j'ajouterai, selon la relation & les détails envoyés depuis, qu'à la Marmora, l'anneau pâle & lumineux étoit par-tout d'égale largeur au temps du milieu de l'Éclipse : cette petite ville est située sur la côte, à six lieues de Salé.

Mais vingt-cinq lieues plus au Nord que Salé, à Larache, le Soleil n'y a pas été totalement éclipsé.

A Tanger, il en est resté plus d'un doigt de lumineux. Enfin un Chrétien qui revenoit de Maroc à Salé, a dit qu'à sept lieues dans les terres où il se trouvoit, elle ne lui avoit pas paru totale avec obscurité absolue.





# CONSTRUCTION

## DE LA BOUSSOLE,

*Dont on a commencé à se servir en Août 1777.*

Par M. LE MONNIER.

I. **S**OIT la boîte de bois  $ABCD$  représentant l'ancienne Boussole avec son limbe intérieur sous  $AB$ , & un autre limbe qui lui est opposé, & qui a même centre  $O$  en-dedans du rebord  $CD$  de la même boîte de bois : ce bois est sec, fort ancien, & depuis long-temps il a fait son plus grand effet ; malgré cela on a rendu le pivot  $O$  mobile, lorsque le cas le réquiert, par un châssis quarré de cuivre & mobile.

On y a adapté, avec quatre vis à tête perdue, le châssis de cuivre rouge  $DFGE$ , garni de ses deux traverses  $IH$ ,  $np$ , en sorte que les grosses vis à tête perdue  $m$ ,  $n$ ,  $o$ ,  $p$ , le fixent en-dessous à la boîte, & à angles droits avec les côtés latéraux de la même boîte.

On aura soin que les bouts de règles  $D$ ,  $F$ ,  $E$ ,  $G$  soient dressés & parallèles, étant les extrémités d'ailleurs de règles planes, dressées & égales entr'elles.

La lunette garnie de fils à son foyer, fera mobile & pourra se fixer sous un angle invariable de 21 degrés, & comme l'objectif a 13 pouces de foyer, on aura pour base de l'arc du secteur ou inclinaison  $kl$ , précisément 5 pouces, ou plutôt  $4^p,99$ .

Que si le foyer de l'objectif n'avoit qu'un pied ou 12 pouces, la base seroit  $4^p,606$ , ce qui suffit pour l'Artiste.

II. En  $O$ , centre de la boîte, on placera deux sortes d'aiguilles, & la première à chape d'agate amovible, afin qu'on puisse renverser l'aiguille, en sorte qu'on ne trouve dans l'épaisseur de l'aiguille d'acier ou règle oblongue, que l'épaisseur suffisante à l'ouverture du milieu, pour y tenir à frottement & s'y maintenir parfaitement, ou plutôt à l'aide d'un écrou

inférieur, pendant les diverses opérations & expériences qu'il s'agira d'y faire durant le cours de chaque année; on fera en sorte que les arcs-de-cercle soient aperçus par une loupe fixe, & perpendiculairement placés au-dessus du 0 degré de chaque division opposée de ces arcs.

On n'oubliera pas de s'assurer, autant qu'il sera possible, si les extrémités ou lignes tracées sur une lame de cuivre rouge ou d'argent, à chaque milieu des deux bouts de l'aiguille, se trouvent en ligne droite avec le centre de rotation ou style, où pose la chape d'agate de l'aiguille aimantée; autrement, on y arrangera le centre ou style à l'aide de ses écrous inférieurs.

Que si le Lapidaire ne sauroit vérifier absolument son cône creux dans l'agate, ni avec précision, on le travaillera de rechef sur le tour des Horlogers; car il est visible que si l'acier de l'aiguille est homogène, & si le centre magnétique se trouve à distances égales des extrémités, l'aiguille étant d'ailleurs équilibrée par un coulant ou anneau plat qui glisse vers l'extrémité du Sud; en ce cas, chaque pointe doit indiquer les mêmes divisions sur les arcs opposés; autrement la différence sera partagée, à moins qu'on ne veuille s'en tenir uniquement à la pointe du Nord.

Le sieur Lennel a exécuté cette première partie de la Boussole, & a centré la lunette par le renversement: l'aiguille pèse 2 onces 42 grains, ou 1446 grains, ayant 15 pouces de long sur un peu plus de 4 lignes de largeur: on en construit une autre qui aura la moitié du poids.

Comme nous sommes fort éloignés des pôles terrestres de l'aimant, on n'a pas hésité à percer l'aiguille d'un trou suffisant dans son milieu, pour y introduire la chape d'agate, & il est aisé de concevoir, & même d'apprécier l'affoiblissement de l'aiguille par cette opération; puisqu'il s'y conserve encore assez de force magnétique pour la ramener lorsqu'elle oscille à sa véritable direction: elle achève ses vibrations en 10 secondes  $\frac{1}{2}$  de temps, ou du moins telle est la quantité moyenne que nous avons conclue en Septembre sur un plus

grand nombre de vibrations , ce qui suffiroit pour en déduire la force horizontale magnétique , le frottement étant connu.

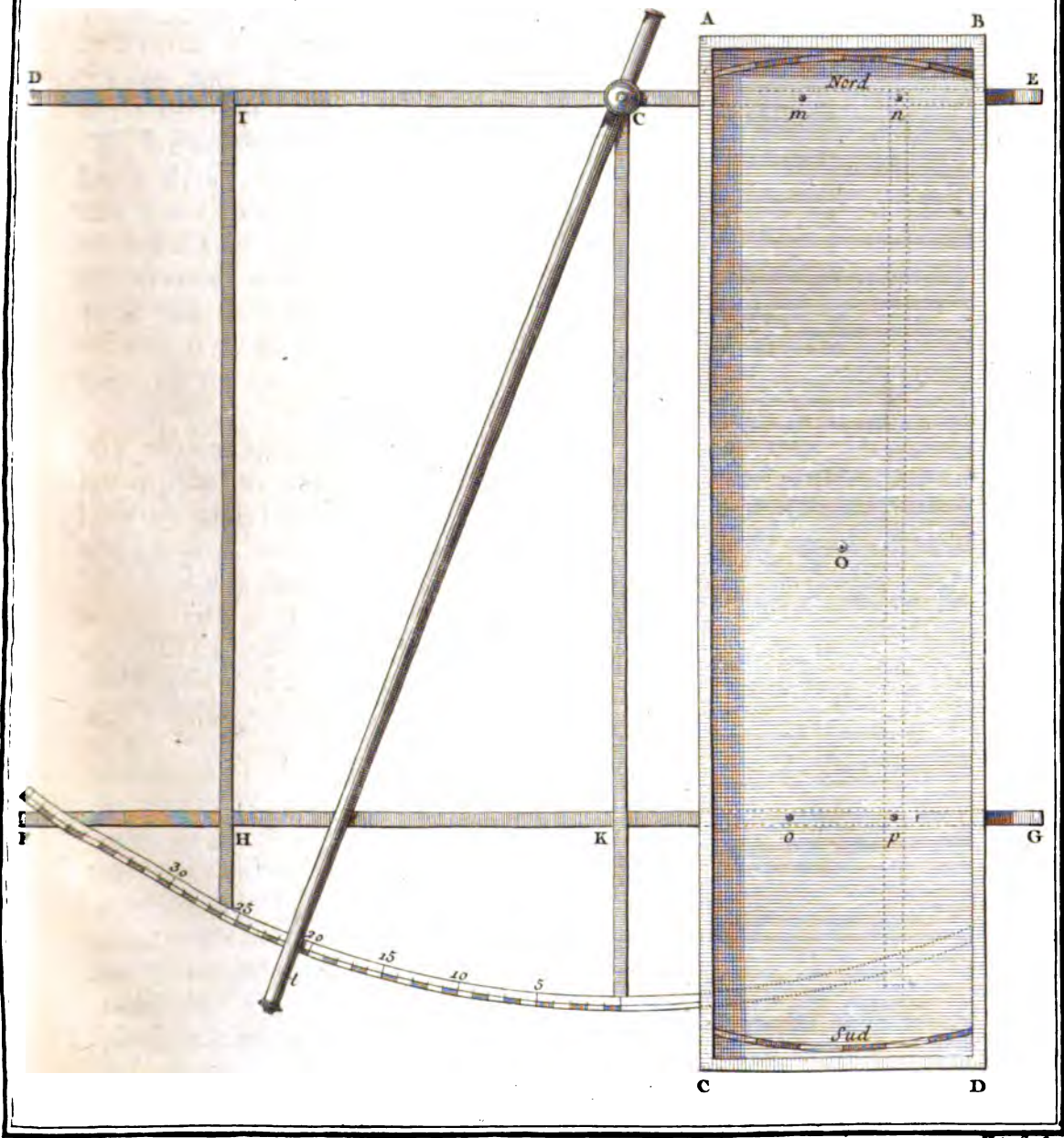
On est étonné que dans toutes les Pièces qui ont concouru aux Prix proposés jusqu'ici, pas un seul Auteur n'ait donné la variation actuelle ou déclinaison de l'aiguille aimantée : nous l'avons trouvée, M. l'Abbé Rochon & moi, le 17 Septembre 1777, à 2 heures  $\frac{1}{2}$  après midi, le Soleil étant fort chaud & le ciel fort serein, de  $20^{\circ} 25' 48''$  ou  $25' \frac{5}{6}$ .

Nous l'avions posée à l'Observatoire royal, sur le pied ou colonne, avec son socle qu'on y avoit transporté, dès le Printemps, du jardin du Temple, & que M. Cassini le fils y avoit fait placer solidement au Sud du bâtiment, à  $27^{\circ} 45'$  du Sud à l'Ouest de la face méridionale, & à distance de 227 pieds : nous pointions le fil de la lunette au troisième moulin de Montmartre, qui décline du vrai Nord à l'Ouest de  $30' 19''$  à  $20''$ .

J'ai trouvé cette année, à 5 heures  $\frac{1}{2}$  après midi le 17 Décembre,  $20^{\circ} 35' \frac{1}{5}$ ; nous pointons pour cet effet à un objet dont la déclinaison, quoique connue à l'égard du vrai Nord, sera recherchée plus exactement dans la suite, & même jusqu'à la précision des secondes, ainsi que la déclinaison orientale de la pyramide, à l'égard de la Méridienne qu'on a été obligé de supposer de 12 secondes à l'Est, ou bien  $0^{\circ} 20' 36''$  à l'égard de notre colonne, jusqu'à ce qu'elle ait été vérifiée avec un instrument des passages aux mêmes stations, ou du moins à l'une des deux.



NOUVELLE BOUSSOLE  
DE DÉCLINAISON



L. G. Sc.



## ANALYSE

### DE L'EAU DU LAC ASPHALTITE.

Par M.<sup>rs</sup> MACQUER, LAVOISIER & SAGE.

LE lac Asphaltite est situé dans la Judée, sur les confins de l'Arabie pétrée; il est connu sous le nom de Mer-morte; il est appelé dans la Bible, *Mer de sel*, *Mare salis*, *Mare salifissimum*. Cette dernière épithète annonce que les Anciens avoient reconnu que l'eau de ce lac étoit plus salée que celle de la mer.

Lu  
le 23 Juillet  
1778.

L'eau du lac Asphaltite, que l'Académie nous a chargé d'examiner, a été envoyée à M. Guettard, par M. le Chevalier Tolès, dans des bouteilles de verre bien bouchées; elle étoit limpide, inodore, d'une saveur âcre, piquante & amère, & il s'est trouvé dans la plus petite des deux bouteilles qui la contenoient, un groupe de sel marin, en cristaux réguliers qui s'étoient formés d'eux-mêmes, ce qui annonce que cette eau est saturée de sel marin.

Notre première expérience a été d'en déterminer la pesanteur spécifique; nous nous sommes servi à cet effet d'un grand pèse-liqueur de Fahrenheit, qui déplaçoit près de 4 livres  $\frac{1}{2}$  d'eau distillée, & dont la tige étoit formée par un fil de cuivre d'une ligne environ de diamètre, circonstance qui le rendoit très-sensible: la pesanteur de cette eau, déterminée avec cet instrument, s'est trouvée par comparaison avec celle de l'eau distillée, dans le rapport de 1240619 à 1000000, c'est-à-dire à très-peu près comme 5 est à 4, pesanteur spécifique très-extraordinaire dont nous ne connoissons point jusques ici d'exemple dans le règne minéral, & en vertu de laquelle le bitume de Judée nage sur cette eau, tandis qu'il se précipite au fond de l'eau de la mer, qui est beaucoup moins pesante.

Après cette expérience préliminaire, nous avons mis 5 livres de cette eau à évaporer au bain de sable dans une capsule de verre; nous avons obtenu d'abord au degré de l'évaporation moyenne, 5 onces de sel marin cristallisé en cubes & en trémuies, mais qui, malgré la lenteur de l'évaporation, contenoit une quantité notable de sel marin à base terreuse tellement combiné, qu'il nous a paru impossible de l'en séparer entièrement par voie de cristallisation: nous nous sommes assurés de ce mélange de sel marin à base terreuse, en dissolvant le sel marin cristallisé que nous avons obtenu dans de l'eau distillée, & en y versant goutte à goutte de l'alkali fixe; l'acide s'est uni de préférence à l'alkali, & la terre, devenue libre, s'est précipitée en assez grande abondance: par une suite de cette même circonstance, ce sel marin attire plus l'humidité de l'air que le sel marin ordinaire.

En poussant plus loin l'évaporation, il n'a plus paru de cristaux d'aucune espèce; mais peu-à-peu la liqueur s'est épaissie, & en la laissant refroidir, elle s'est congelée en une belle substance blanche, à peu-près semblable à de la cire fondue qui se fige.

Cette substance pesée chaude, s'est trouvée de 1 livre 14 onces 4 gros; elle étoit extrêmement déliquescente, & se résolvoit promptement en liqueur à l'air; de l'acide vitriolique ou de l'acide nitreux versé dessus en dégageoit de l'esprit de sel en grande abondance, d'où nous avons conclu que l'acide marin entroit dans sa composition: pour nous en convaincre davantage, nous avons fait dissoudre dans de l'eau distillée 5 onces de ce sel, & nous avons versé peu-à-peu dans la dissolution de l'alkali fixe très-pur en liqueur; il s'est fait d'abord une espèce de coagulum qui occupoit toute la liqueur; mais peu-à-peu le précipité s'est rapproché & a gagné le fond du vase, & l'eau surnageante évaporée nous a donné 3 onces 4 gros de sel fébrifuge de Silvius très-pur.

Le précipité bien édulcoré & séché, s'est trouvé du poids de 2 onces 4 gros 3 6 grains; il consistoit en une terre très-

blanche qui a pris les caractères de chaux vive, par la calcination qu'en a faite l'un de nous.

Nous avons pris 5 gros de cette terre bien séchée, nous l'avons délayée dans de l'eau distillée, & nous y avons ajouté goutte à goutte de l'huile de vitriol concentrée ; il y a eu une vive effervescence, pendant laquelle une partie de la terre a été dissoute dans l'eau, tandis que l'autre a été précipitée sous la forme de sélénite. La quantité d'huile de vitriol employée s'est trouvée de 3 gros 25 grains ; d'une part, la sélénite édulcorée & séchée s'est trouvée peser 2 gros 58 grains ; de l'autre, l'eau surnageante évaporée a donné 5 gros 60 grains de vrai sel d'Epsom ou de sel de Sedlitz ; surquoi il est à observer que la sélénite ne contenant qu'à peine un quart de son poids d'eau de cristallisation, tandis que le sel d'Epsom en contient au moins moitié, la quantité effective de ces deux sels est environ dans le rapport de 4 à 3 ; d'où l'on peut conclure que le sel marin à base terreuse contenu dans l'eau du lac Asphaltite, est composée à peu-près de quatre parties de sel marin à base de magnésie du sel d'Epsom, & de trois parties de sel marin à base terreuse calcaire ordinaire. On ne doit pas au surplus regarder ces rapports comme rigoureusement exacts, 1.<sup>o</sup> à cause de la propriété reconnue au sel d'Epsom, par M. Lavoisier, l'un de nous, de s'évaporer en partie avec l'eau qui le tient en dissolution ; 2.<sup>o</sup> parce que les expériences faites sur les deux bouteilles envoyées par M. le Chevalier Tolès, n'ont pas donné à cet égard des résultats entièrement semblables.

En résumant ces expériences, on voit que l'eau du lac Asphaltite contient

	Par livre.			Par quintal.	
1. <sup>o</sup> Sel marin ordinaire mêlé d'un peu de sel marin à base terreuse. . . .	1 once	0 gros	0 grains . . .	6 liv.	4 onces
2. <sup>o</sup> Sel marin à base terreuse composé d'environ quatre parties de sel marin à base de magnésie du sel d'Epsom, & de trois parties de sel marin à base terreuse ordinaire. . .	6.	0.	57 $\frac{3}{4}$ . . .	38.	2.
	7.	0.	57 $\frac{3}{4}$ . . .	44.	6.



Nous terminerons cette analyse en observant que l'eau du lac Asphaltite ne contient pas un atome de substance bitumineuse : c'est donc sans aucun fondement que quelques Auteurs ont attribué au bitume le goût amer & désagréable, soit de l'eau de la mer, soit de quelques eaux analogues ; cette amertume est propre au sel marin à base calcaire & surtout à celui à base de magnésie ou de terre du sel d'Epsom.



## NOUVELLES MÉTHODES ANALYTIQUES

POUR RÉSOUDRE

DIFFÉRENTES QUESTIONS ASTRONOMIQUES.

## TREIZIÈME MÉMOIRE,

*Dans lequel on applique les Latitudes corrigées, à la solution de plusieurs Problèmes géodésiques, & particulièrement au calcul de la perpendiculaire à la Méridienne, & des loxodromiques, dans l'hypothèse de la Terre elliptique.*

Par M. DIONIS DU SÉJOUR.

## PREMIÈRE SECTION.

*Exposition du Sujet.*

(1.) JE me propose dans ce Mémoire, d'appliquer la théorie des latitudes corrigées, à plusieurs Problèmes géodésiques; & particulièrement au calcul de la perpendiculaire à la Méridienne, & des loxodromiques, dans l'hypothèse de la Terre elliptique. On n'a point oublié ce que j'entends par la latitude corrigée d'un point de la Terre; c'est une fonction de la latitude vraie de ce point, & qui sert également à déterminer sa position relativement à l'Équateur. Je n'entrerai dans aucun détail à ce sujet; on peut se rappeler ce que j'ai dit dans mes précédens Mémoires, & les simplifications de calcul qui en ont résultées: je passe à l'exposition du Problème que je me propose de traiter particulièrement.

(2.) Dans nos Mémoires de 1733, M. Clairaut a fait voir que si par un point quelconque d'un Méridien terrestre,  
*Mém. 1778.* K

on mène un plan perpendiculaire à ce Méridien, & que l'on nomme *premier vertical*, l'intersection de ce plan & de notre globe formera un ovale. Le plan de cet ovale ne sera perpendiculaire à la surface de la Terre, qu'au point de départ; dans tout autre point, le plan en question ne sera pas perpendiculaire à la surface de notre globe; de sorte que, par exemple, si l'on plantoit une suite de piquets, avec la condition qu'ils s'effaçassent tous, ces piquets finiroient par être inclinés à la direction de la pesanteur.

La raison est facile à sentir; en effet, la pesanteur n'étant pas dirigée vers un même point dans la supposition de la Terre elliptique, comme dans la supposition de la Terre sphérique, & ces directions étant dans des plans différens à mesure que l'on change de Méridien, il est impossible de faire passer un plan par toutes ces directions. Donc une suite de piquets qui seroient dans un même plan, doivent nécessairement faire à la fin un angle sensible avec la direction de la pesanteur, quand même ils auroient d'abord été posés dans la direction de la pesanteur.

(3.) M. Clairaut a de plus démontré que si l'on soumet aux calculs, les opérations géodésiques que M. Cassini a employées pour tracer la courbe qu'il a définie *perpendiculaire à la Méridienne*, cette courbe n'est pas celle dans laquelle une suite de jallons s'effaceroient les uns les autres, & qui par conséquent seroit toute dans un même plan; mais une courbe dont les différens côtés successifs forment avec le prolongement du côté précédent, un plan toujours perpendiculaire à la surface de la Terre. Et comme cette propriété convient à la ligne la plus courte que l'on puisse mener d'un point donné d'un sphéroïde à un autre point, il en a conclu que la propriété caractéristique de la *perpendiculaire à la Méridienne*, tracée par les opérations géodésiques de M. Cassini, est d'être *la plus courte entre tous ses points*.

Je n'entrerai pas ici dans les détails de sa démonstration. Il suffira de remarquer que la propriété de la *perpendiculaire*

à la *Méridienne*, d'être le chemin le plus court entre tous les points, se tire de la condition que les différens côtés successifs forment avec le prolongement du côté précédent, un plan toujours perpendiculaire à la Terre.

(4.) Je pourrois, dans ce travail, partir de l'équation que M. Clairaut a démontrée, & renvoyer pour la démonstration, à son Mémoire; j'ai cru cependant que l'on verroit avec plaisir l'analyse du Problème. J'emprunterai de M. Clairaut, la propriété caractéristique de la courbe, d'être la plus courte entre tous les points, & je ferai usage des méthodes de M. Euler, pour résoudre ces sortes de questions.

(5.) En 1739, M. Clairaut a donné dans un supplément à son premier Mémoire, des méthodes pour calculer la *perpendiculaire à la Méridienne*; il est arrivé à des formules assez simples. Sous ce point de vue la matière paroît épuisée; j'ai cru cependant, en rendant hommage à ses travaux, pouvoir présenter de nouvelles réflexions sur ce sujet. La simplification que les *latitudes corrigées* ont apportée dans les calculs astronomiques, m'a fait croire qu'on pourroit espérer une simplification analogue, en les introduisant dans les opérations géodésiques: tel est le but de mon travail.

Au reste, l'on a cherché à résoudre la même question par d'autres considérations, soit en confondant la *perpendiculaire à la Méridienne*, avec la section elliptique du sphéroïde & du premier vertical, soit en calculant des moyens parallèles, soit en regardant la Terre comme sphérique, & en lui supposant par-tout la courbure particulière qui convient à l'étendue que l'on considère. Sans prétendre critiquer ces procédés, qui peuvent être bons pour de petites distances, je laisse aux Lecteurs à prononcer sur le mérite particulier de ma méthode.

76 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
SECONDE SECTION.

*Détermination de la courbe qui a la propriété d'être la ligne la plus courte que l'on puisse mener d'un point de la surface d'un sphéroïde à un autre point pris sur la même surface; ou, ce qui revient au même, détermination de la perpendiculaire à la Méridienne.*

Fig. 1. (6.) Soit  $PAGDF$  un sphéroïde formé par la révolution d'une courbe quelconque  $PAG$  autour d'un axe  $PC$  de révolution.

Nommons

$X$  l'abscisse  
 $Y$  l'ordonnée

aux différens points de la courbe dont la révolution engendre le sphéroïde. Je suppose que l'origine des coordonnées est en  $C$ , que les abscisses  $X$  sont comptées sur l'axe de rotation  $CP$ , les ordonnées  $Y$  sur la perpendiculaire  $CG$  à l'axe  $CP$  de rotation; je suppose de plus que l'on connoît la relation entre  $X$  &  $Y$ .

$r$  la distance  $CP$  du point  $C$  au pôle  $P$ ; nous supposons d'ailleurs cette distance égale au rayon des Tables.

$\alpha$  l'angle des différens Méridiens du sphéroïde, avec un premier Méridien donné de position; nous supposons que cet angle est mesuré sur un cercle dont le rayon égale  $r$ .

Il est évident que si d'un point quelconque du sphéroïde, l'on mène à un autre point infiniment proche du même sphéroïde une ligne quelconque suivant une loi quelconque, cette ligne sera telle que si l'on nomme

$P$  le périmètre de la ligne tracée sur le sphéroïde,

$dP$  l'élément du périmètre,

on aura

$$(1) \quad dP = \frac{\sqrt{Y^2 d\alpha^2 + r^2 (dX^2 + dY^2)}}{r}.$$

Soit en effet  $GAP$  le premier Méridien donné de position;  $DMP$  un Méridien qui fait un angle infiniment petit avec

le premier Méridien  $GAP$ ;  $AM$  l'élément de la courbe. Du point  $A$  & du rayon  $AK$ , menons l'arc  $AR$  qui se termine au Méridien  $DMP$ ; du point  $M$ , abaissons sur l'axe  $PC$  de rotation, la perpendiculaire  $MH$ ; & du point  $R$ , abaissons sur  $MH$  la perpendiculaire  $Rn$ ; il est évident que l'on aura

$$AM = \sqrt{AR^2 + RM^2};$$

mais

$$RM^2 = Rn^2 + Mn^2;$$

de plus,

$$Rn = dX, \quad Mn = dY,$$

$$AR = \frac{Ydu}{r}, \text{ \& } AM = dP; \text{ donc, \&c.}$$

(7.) Quant à l'équation particulière de cette ligne, elle dépend 1.<sup>o</sup> de la relation entre les coordonnées  $X$  &  $Y$  de la courbe génératrice, que nous supposons connue; 2.<sup>o</sup> de la loi, entre  $u$ ,  $X$  &  $Y$ , qui dépend elle-même de la condition particulière que l'on impose à la courbe tracée sur le sphéroïde.

(8.) Si l'on suppose maintenant que l'on impose à la courbe en question, la condition d'être la plus courte que l'on puisse mener d'un point donné de la surface du sphéroïde, à un autre point de la surface du même sphéroïde, il faut que  $P$  ou son égal  $\frac{\int \sqrt{Y^2 du^2 + r^2 dX^2 + r^2 dY^2}}{r}$  soit un *minimum*; il s'agit donc de déterminer, par les méthodes de M. Euler, la relation entre  $X$ ,  $Y$  &  $u$  qui rend la fonction précédente un *minimum*.

(9.) Pour y parvenir, je remarque d'abord que puisque par la supposition, on a la relation entre  $X$  &  $Y$  coordonnées de la courbe de révolution, on peut concevoir qu'au moyen de cette relation, on a substitué à  $dX$  la valeur en  $Y$  &  $dY$ ; de sorte que l'on ait  $r^2 dX^2 + r^2 dY^2 = Y'' dY^2$ ,  $Y''$  étant une fonction de  $Y$  & de connues; la fonction

$\int \sqrt{Y^2 du^2 + r^2 dX^2 + r^2 dY^2}$ , peut donc être mise sous la forme suivante,  $\int \sqrt{Y^2 du^2 + Y'' dY^2}$ . On a donc pour condition du Problème, d'après les méthodes de M. Euler,

$$(1) Y^2 du = A \sqrt{Y^2 du^2 + r^2 dX^2 + r^2 dY^2}.$$

Voici au surplus à quoi se réduit la méthode de M. Euler, dont on peut voir la démonstration dans son Traité qui a pour titre: *Methodus inveniendi curvas maximi minimi vè proprietate gaudentes*. Soit

$Z dY$  une quantité quelconque, dans laquelle  $Z$  est une fonction de

$$Y, u, \frac{du}{dY}, \frac{d^2 u}{dY^2}, \&c. \& \text{ de constante.}$$

Si l'on veut déterminer en général la courbe dans laquelle  $\int Z dY$  est un *maximum*, il faut différencier la quantité  $Z$  par rapport à  $Y, u, \frac{du}{dY}, \frac{d^2 u}{dY^2}$  &c. en regardant toujours  $dY$  comme constant. Soit

$$dZ = M dY + N du + P \frac{du}{dY} + Q \frac{d^2 u}{dY^2} + R \frac{d^3 u}{dY^3} + \&c.$$

on aura pour équation de la courbe,

$$N - \frac{dP}{dY} + \frac{d^2 Q}{dY^2} - \frac{d^3 R}{dY^3} + \&c. = 0.$$

Appliquons ces principes au cas dont il s'agit; il est aisé de voir que  $\int \sqrt{Y^2 du^2 + Y'' dY^2}$ , peut se mettre sous la forme suivante,  $\int dY \sqrt{(\frac{Y du^2}{dY^2} + Y'')}$ ; donc  $Z = \sqrt{(\frac{Y du^2}{dY^2} + Y'')}$ ;

$$dZ = \frac{(\frac{Y du^2}{dY^2} + Y'') dY}{\sqrt{(\frac{Y du^2}{dY^2} + Y'')}} + \frac{Y du}{dY \sqrt{(\frac{Y du^2}{dY^2} + Y'')}} \times \frac{d^2 u}{dY^2},$$

$Y'''$  étant une fonction de  $Y''$  &c de constante; donc, dans le cas dont il s'agit,  $N = 0$ ;  $P = \frac{Y du}{dY \sqrt{(\frac{Y du^2}{dY^2} + Y'')}} \&$

& l'équation qui satisfait au Problème est —  $dP = 0$ ,  
ou en intégrant —  $P + \text{constante} = 0$ ; donc, &c.

(10.) Pour déterminer la constante  $A$ , je remarque que Fig. 1.  
dans le triangle  $AMR$ , rectangle en  $R$ , on a en général  
 $AM : AR :: r : \sin. (\text{angle } AMR)$ ; mais l'angle  $AMR$   
est l'angle de la courbe avec les différens Méridiens. De plus,

$$AM = \frac{\sqrt{Y^2 du^2 + r^2 dX^2 + r^2 dY^2}}{r}, \text{ \& } AR = \frac{Y du}{r}; \text{ donc}$$

$$\sqrt{Y^2 du^2 + r^2 dX^2 + r^2 dY^2} = \frac{r Y du}{\sin. (\text{angle de la courbe avec les diff. MÉR.})}$$

Si l'on compare cette valeur de  $\sqrt{Y^2 du^2 + r^2 dX^2 + r^2 dY^2}$   
avec celle tirée de l'équation (1) du §. 9, on aura

$$(1) Y \sin. (\text{angle de la courbe avec les différens Méridiens}) = Ar.$$

On connoîtra donc la valeur de  $A$  lorsque l'on connoîtra  
l'angle particulier de la courbe avec le Méridien correspon-  
dant à une certaine valeur particulière de  $Y$ .

(11.) Dans le cas de la perpendiculaire à la Méridienne,  
l'angle de la courbe avec le Méridien  $= 90^\circ$  au point où  
la courbe coupe cette Méridienne; donc  $\sin. (\text{angle de la courbe}$   
 $\text{avec la Méridienne}) = r$ ,  $Y'$  étant d'ailleurs l'ordonnée à l'ellipse  
correspondante au point où la courbe est perpendiculaire à  
la Méridienne; on a donc

$$(1) A = Y'.$$

L'équation (1) du §. 9, devient

$$(2) Y^2 du - Y' \sqrt{Y^2 du^2 + r^2 dX^2 + r^2 dY^2} = 0.$$

Et l'on a pour exprimer l'angle de la courbe avec les diffé-  
rens Méridiens qu'elle rencontre,

$$(3) Y \sin. (\text{angle de la courbe avec les différens Méridiens}) = Y' r.$$

(12.) Dans le cas où l'on ne supposeroit pas la courbe  
perpendiculaire à la Méridienne, au point où elle la coupe,  
l'on auroit, par une analyse entièrement semblable à celle



des §. 10 & 11, en nommant

$D$  l'angle de la courbe avec la Méridienne à ce point.

$$(1) A = \frac{Y' \sin. D}{r}.$$

L'équation (1) du §. 9, deviendrait

$$(2) r Y^2 du = Y' \sqrt{(Y^2 du^2 + r^2 dX^2 + r^2 dY^2)} \sin. D.$$

Et l'on auroit pour exprimer l'angle de la courbe avec le différens Méridiens qu'elle rencontre,

$$(3) Y \sin. (\text{angle de la courbe avec les différens Méridiens}) = Y' \sin. D$$

(13.) Il n'est plus question maintenant, pour réduire la courbe à ne renfermer que deux variables  $u$  &  $X$  ou  $u$  &  $Y$  que d'éliminer une des variables & sa différentielle, par le moyen de l'équation à la courbe génératrice.

Si l'on suppose, par exemple, que la courbe génératrice est une ellipse, que

$r$  = le demi-petit axe de l'ellipse génératrice,

$\rho$  = le demi-grand axe;

& que l'origine des coordonnées  $X$  &  $Y$  soit au centre de l'ellipse, on aura

$$(1) \rho^2 X^2 + r^2 Y^2 - r^2 \rho^2 = 0;$$

d'où l'on tire [§. 9, équat. (1)],

$$(2) du = \pm \frac{Ar \sqrt{(r^2 Y^2 - \rho^2 Y^2 + \rho^4)}}{\rho Y \sqrt{[(\rho^2 - Y^2) \times (Y^2 - A^2)]}} dY.$$

$$(3) du = \mp \frac{Ar \sqrt{[r^2 + (\rho^2 - r^2) X^2]}}{\rho (r^2 - X^2) \times \sqrt{(\rho^2 r^2 - \rho^2 X^2 - A^2 r^2)}} dX.$$

(14.) Puisque (§. 6)

$$r dP = \sqrt{[Y^2 du^2 + r^2 (dX^2 + dY^2)]};$$

si l'on substitue dans cette équation à  $du$  la valeur tirée du paragraphe précédent, l'on aura

$$(1) dP = \pm \frac{Y \sqrt{[(r^2 - \rho^2) Y^2 + \rho^4]}}{\rho \sqrt{[(\rho^2 - Y^2) \times (Y^2 - A^2)]}} dY,$$

$$(2) dP = \mp \frac{\rho \sqrt{[r^2 + (\rho^2 - r^2) X^2]}}{r \sqrt{(\rho^2 r^2 - \rho^2 X^2 - A^2 r^2)}} dX.$$

(15.)

(15.) Si l'on intégroit chacune des équations précédentes, on pourroit résoudre les deux questions suivantes.

## PREMIÈRE QUESTION.

*Étant donnée la distance FM' à la Méridienne MM'P d'un Fig. 2.  
lieu quelconque F, prise sur une perpendiculaire M'F à cette  
Méridienne; & la distance d'un autre lieu M situé sous ce Méridien,  
au point M' où cette perpendiculaire coupe la Méridienne;  
déterminer la latitude du lieu F, & sa différence en longitude  
d'avec le lieu M.*

## SECONDE QUESTION.

*Étant données la latitude & la longitude du lieu F, ainsi  
que la latitude du lieu M; déterminer la distance du lieu F à  
la Méridienne du lieu M, prise sur la perpendiculaire M'F à  
cette Méridienne passant par le lieu F; ainsi que la distance  
du lieu M au point M', où la perpendiculaire M'F rencontre  
la Méridienne MM'P.*

Dans le premier cas, les équations (1) & (2) du §. 14, que je suppose intégrées, feroient connoître la latitude du lieu F. En effet, on en concluroit les valeurs de  $X$  & de  $Y$  correspondantes à la valeur  $P$  donnée; mais en vertu d'une propriété de l'ellipse par rapport au centre, l'on a la proportion suivante,

$Y : X :: r : \text{tang. (angle du diamètre de l'ellipsoïde passant par le lieu F, avec le grand axe de l'ellipse);}$

donc

(1)  $\text{Tang. (angle du diamètre de l'ellipsoïde passant par le lieu F, avec le grand axe de l'ellipse)} = \frac{rX}{Y}.$

De plus, en vertu d'une autre propriété de l'ellipse,

$\rho^2 : r^2 :: \text{tang. (latitude vraie) : tang. (angle du diamètre de l'ellipsoïde avec le grand axe de l'ellipse);}$

donc

(2)  $\text{Tang. (latitude vraie)} = \frac{\rho^2 X}{rY}.$

Mém. 1778.

L

## 82 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

On connoîtroit enfin la différence en longitude des lieux  $F$  &  $M$ , au moyen d'une des deux équations (2) ou (3) du §. 13, que je suppose pareillement intégrées.

Dans le second cas, l'équation (2) du présent paragraphe, combinée avec l'équation (1) du §. 13, feroit connoître la valeur de  $X$  ou de  $Y$ ; on concluroit ensuite la valeur de  $A$  au moyen des équations (2) ou (3) du même paragraphe, que je suppose intégrées; l'équation (1) ou (2) du §. 14 feroit connoître la valeur de la perpendiculaire: l'on connoîtroit enfin la valeur de  $Y'$ , & par conséquent, la position du point  $M'$  où la perpendiculaire rencontre la Méridienne, au moyen des équations (1) des §. 11 ou 12.

Telle est à peu-près la manière dont le Problème a été résolu par M. Clairaut. On ne peut rien ajouter à l'élégance avec laquelle ce Géomètre intègre, par approximation, les différentes équations qui conduisent à la solution dont il s'agit; j'ai cru cependant qu'il m'étoit permis de présenter encore quelques réflexions sur le même sujet. La route que je me propose de suivre est absolument différente de celles que l'on a suivies jusqu'ici.

## TROISIÈME SECTION.

### *Développement du principe qui servira à résoudre le Problème proposé.*

(16.) Dans les Mémoires précédens, j'ai fait voir que la manière de simplifier les Questions astronomiques que j'ai traitées, consiste principalement à représenter chaque lieu de la Terre, non par sa latitude vraie, ainsi qu'on l'avoit toujours pratiqué, mais par une fonction de cette latitude qui sert également à désigner le lieu, & que j'ai appelée *latitude corrigée*: j'emploierai le même artifice, & je désignerai chaque lieu par sa latitude corrigée. Au reste, j'entends par la latitude corrigée d'un lieu, une fonction de la latitude vraie, telle

que si l'on nomme

$r$  le demi-petit axe de la Terre,

$\rho$  le demi-grand axe,

l'on a

(1)  $r$  tangente latitude vraie  $= \rho$  tangente latitude corrigée.

Comme dans la suite de ce Mémoire, je parlerai souvent de la projection des différens points & des différentes courbes tracées sur le sphéroïde; pour éviter toute équivoque à ce sujet, on n'oubliera pas que si d'un point  $M$  quelconque du Fig. 2. sphéroïde l'on abaisse une perpendiculaire  $MH$  sur le petit axe  $CP$  du sphéroïde, j'appellerai projection du point  $M$  du sphéroïde, le point  $m$  où la perpendiculaire dont je viens de parler, rencontre la sphère inscrite.

Par la même raison, j'appellerai projection d'une courbe quelconque tracée sur le sphéroïde, la suite des points déterminés sur la sphère inscrite suivant la loi précédente. Ainsi, par exemple, relativement à un lieu  $M$  placé sur le sphéroïde, j'appellerai projection du Méridien  $MM'P$  de ce lieu, le grand cercle  $mm'P$  de la sphère inscrite, où cette sphère est rencontrée par la suite des perpendiculaires abaissées des différens points du Méridien sur le petit axe du sphéroïde.

J'appellerai projection du parallèle du lieu  $M$ , le cercle de la sphère inscrite, où cette sphère est rencontrée par la suite des perpendiculaires abaissées suivant la loi dont on vient de parler, des différens points du parallèle du lieu  $M$  sur le sphéroïde.

D'après ces notions préliminaires, il est évident que si l'on considère sur le sphéroïde, un lieu  $M$ ; le Méridien  $MM'P$  du lieu  $M$ ; la perpendiculaire  $M'F$  à ce Méridien qui coupe ce Méridien en un point  $M'$ ; un autre lieu  $F$  pris sur cette perpendiculaire; que l'on considère de plus, sur la sphère inscrite, la projection  $m$  du lieu  $M$ , la projection  $mm'P$  de son Méridien, & que par la projection  $m'$  du

## 84 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Fig. 2. point  $M'$ , l'on suppose mené perpendiculairement à la projection  $m'P$  du Méridien du lieu  $M$ , un grand cercle  $m'F'$  de la sphère inscrite, qui coupe successivement sur cette sphère, la projection des parallèles que rencontre sur le sphéroïde, la véritable perpendiculaire  $M'F$  à la Méridienne du lieu  $M$  passant par le lieu  $F$ , on aura sur la sphère inscrite, un triangle sphérique rectangle dont les côtés seront

- 1.<sup>o</sup> l'arc  $m'P$  de la sphère inscrite compris entre le pôle & la projection  $m'$  du point  $M'$ , intersection du Méridien du point  $M$ , & de la perpendiculaire à ce Méridien.
- 2.<sup>o</sup> l'arc  $m'F'$  du grand cercle de la sphère inscrite, dont je viens de parler, & qui se termine au point où ce grand cercle rencontre la projection du parallèle du lieu  $F$ .
- 3.<sup>o</sup> l'arc  $F'P$  compris entre le pôle & le point du parallèle dont il vient d'être question.

J'appellerai désormais

*Arc  $m'P$ , le premier des arcs dont je viens de parler.*

*Perpendiculaire corrigée à la Méridienne, le second arc que je viens de déterminer.*

*Complément de la Latitude corrigée du lieu  $F$ , le troisième arc que j'ai considéré.*

*Longitude corrigée du lieu  $F$ , l'angle au pôle  $m'PF'$  du triangle sphérique dont est question.*

Il ne s'agit maintenant que de déterminer la relation entre ces différentes quantités & les quantités analogues tracées sur le sphéroïde.

(17.) Dans la suite de ce Mémoire, je considérerai particulièrement la perpendiculaire corrigée à la Méridienne; il faut donc avant tout déterminer l'équation à cette perpendiculaire corrigée, pour en conclure les rapports avec la vraie perpendiculaire tracée sur le sphéroïde.

Pour y parvenir, soit

$r$  le rayon de la sphère.

$x$  les abscisses } du cercle générateur de la sphère inscrite; je suppose  
 $y$  les ordonnées } que l'origine des coordonnées est au centre du cercle.

$y'$  l'ordonnée particulière du cercle, au point où commence l'arc  $m'F'$  dont il s'agit, c'est-à-dire l'ordonnée au point  $m'$  où l'arc  $m'F'$  coupe la Méridienne corrigée du lieu  $M$ . Fig. 2.

l'angle des différens Méridiens de la sphère inscrite, correspondans aux différens points de l'arc  $m'F'$ , avec la Méridienne corrigée du lieu  $M$ .

Il est évident que si l'on suppose la perpendiculaire corrigée tracée sur la sphère inscrite, elle formera avec l'arc  $m'P$  & avec les différens Méridiens successifs de la sphère inscrite, correspondans aux différens points de cette perpendiculaire corrigée, un triangle sphérique rectangle dont un des côtés sera, ainsi que je l'ai déjà dit, l'arc  $m'P$  compris entre le pôle & la projection  $m'$  de l'intersection du Méridien elliptique du lieu  $M$  & de la perpendiculaire à ce Méridien; le second côté sera l'arc de la perpendiculaire corrigée dont est question; & le troisième côté, ou l'hypothénuse  $F'P$  du triangle, sera l'arc compris entre le pôle & le point  $F'$  de la perpendiculaire corrigée. On aura donc (*Trigon. sphérique*); le sinus total est au sinus de l'hypothénuse du triangle sphérique, comme le sinus de l'angle compris entre le second côté & l'hypothénuse du triangle est au sinus du premier côté. Mais le sinus de l'hypothénuse du triangle sphérique est évidemment la quantité que nous avons nommée  $y$ ; le sinus du côté  $m'P$  est la quantité que nous avons nommée  $y'$ ; & l'angle compris entre la perpendiculaire corrigée & l'hypothénuse du triangle sphérique est l'angle de la perpendiculaire corrigée avec les Méridiens successifs; donc

$$(1) \sin. (\text{angle de la perpendiculaire corrigée avec les Méridiens}) = \frac{y'}{y}.$$

Maintenant, si l'on nomme

$p$  la perpendiculaire corrigée,

l'on aura, d'après les constructions du §. 6.

$$(2) dp = \frac{\sqrt{y^2 du + r^2 l^2 + dny^2}}{r}.$$

D'ailleurs, on démontreroit facilement, par une analyse

semblable à celle développée dans le §. 10, que

$$(2) \sin. (\text{angle de la perpendiculaire corr. avec les Mérid.}) = \frac{r y d v}{\sqrt{y^2 d v^2 + r^2 (d x^2 + d y^2)}} ;$$

donc

$$(4) y^2 d v - y \sqrt{y^2 d v^2 + r^2 (d x^2 + d y^2)} = 0.$$

Telle est l'équation à la perpendiculaire corrigée.

(18.) On résoudroit de même la question, si au lieu de considérer la perpendiculaire à la Méridienne du lieu  $M$ , on avoit à calculer une ligne qui feroit un angle quelconque avec cette Méridienne au point de départ; il faudroit alors considérer sur la sphère inscrite, un arc de grand cercle qui feroit avec la Méridienne corrigée, un angle égal à celui formé sur le sphéroïde par la droite dont il s'agit, & par le Méridien du lieu  $M$ .

Nous avons déterminé (§. 12), l'équation à cette droite sur le sphéroïde; & nous avons nommé

$D$  l'angle que fait cette courbe avec le Méridien au point de départ.

Il faut avoir maintenant l'équation à l'arc de grand cercle correspondant sur la sphère inscrite.

L'équation à cet arc de grand cercle est facile à déterminer; en effet, les équations (2) & (3) du §. 17 subsistent, mais au lieu de l'équation (1), l'on a

$$(1) \sin. (\text{angle compris entre le second & le troisième côté}) = \frac{y \sin. D}{y} ;$$

& l'équation (4) du même paragraphe, devient

$$(2) r y^2 d v - y \sqrt{y^2 d v^2 + r^2 d x^2 + r^2 d y^2} \sin. D = 0.$$

Telle est l'équation à la ligne demandée.

Il est aisé de voir que l'on n'a plus alors un triangle sphérique rectangle à résoudre, mais un triangle oblique-angle formé par la Méridienne corrigée du lieu  $M$ , par l'arc de cercle dont nous venons de donner l'équation, & par les différens Méridiens successifs correspondans aux différens points de cet arc.

Passons à l'examen de quelques questions préliminaires à la solution des Problèmes dont il s'agit.

#### QUATRIÈME SECTION.

*De la relation entre la Latitude vraie & la Latitude corrigée d'un lieu.*

(19.) Si l'on nomme

$r$  le demi-petit axe de la Terre,

$p$  le demi-grand axe;

nous avons démontré que

$$(1) \text{ tangente latitude vraie} = \frac{p}{r} \text{ tangente latitude corrigée,}$$

$$(2) \text{ tang. latitude corrigée} = \frac{r}{p} \text{ tangente latitude vraie.}$$

On pourra donc facilement conclure la latitude corrigée de la latitude vraie, & réciproquement.

Dans l'usage des formules précédentes, l'on n'oubliera pas que si l'on suppose les axes de la Terre dans le rapport de 177 à 178,

$$\log. \frac{p}{r} = 0,0024467; \quad \log. \frac{r}{p} = - 0,0024467.$$

Si l'on suppose les axes de la Terre dans le rapport de 200 à 201,

$$\log. \frac{p}{r} = 0,0021661; \quad \log. \frac{r}{p} = - 0,0021661.$$

Si l'on suppose les axes de la Terre dans le rapport de 229 à 230,

$$\log. \frac{p}{r} = 0,0018923; \quad \log. \frac{r}{p} = - 0,0018923.$$

Si l'on suppose les axes de la Terre dans le rapport de 299 à 300,

$$\log. \frac{p}{r} = 0,0014501; \quad \log. \frac{r}{p} = - 0,0014501.$$

(20.) Quels que simples que soient ces calculs, voici des Tables qui pourront en dispenser.



*TABLE de la différence des Latitudes vraies & corrigées, en supposant les axes de la Terre dans le rapport de 177 à 178.*

LATITUDES.		DIFFÉRENCES.	LATITUDES.		DIFFÉRENCES.
D.	M.	M. S.	D.	M.	M. S.
40.	0	9. 32,0	47.	0	9. 40,0
40.	15	9. 32,8	47.	15	9. 39,6
40.	30	9. 33,6	47.	30	9. 39,1
40.	45	9. 34,4	47.	45	9. 38,6
41.	0	9. 35,2	48.	0	9. 38,0
41.	15	9. 35,9	48.	15	9. 37,3
41.	30	9. 36,6	48.	30	9. 36,6
41.	45	9. 37,3	48.	45	9. 35,9
42.	0	9. 38,0	49.	0	9. 35,2
42.	15	9. 38,6	49.	15	9. 34,4
42.	30	9. 39,1	49.	30	9. 33,6
42.	45	9. 39,6	49.	45	9. 32,8
43.	0	9. 40,0	50.	0	9. 32,0
43.	15	9. 40,4	50.	15	9. 31,1
43.	30	9. 40,7	50.	30	8. 30,1
43.	45	9. 40,9	50.	45	9. 29,1
44.	0	9. 41,0	51.	0	9. 28,0
44.	15	9. 41,0	51.	15	9. 26,8
44.	30	9. 41,0	51.	30	9. 25,6
44.	45	9. 41,0	51.	45	9. 24,4
45.	0	9. 41,0	52.	0	9. 23,2
45.	15	9. 41,0	52.	15	9. 21,9
45.	30	9. 41,0	52.	30	9. 20,6
45.	45	9. 41,0	52.	45	9. 19,3
46.	0	9. 41,0	53.	0	9. 18,0
46.	15	9. 40,9	53.	15	9. 16,7
46.	30	9. 40,7	53.	30	9. 15,4
46.	45	9. 40,4	53.	45	9. 14,1
47.	0	9. 40,0	54.	0	9. 12,8

TABLE

*TABLE de la différence des Latitudes vraies & corrigées, en supposant les axes de la Terre dans le rapport de 200 à 201.*

LATITUDES.		DIFFÉRENCES.		LATITUDES.		DIFFÉRENCES.	
D.	M.	M.	S.	D.	M.	M.	S.
40.	0	8.	27,6	47.	0	8.	34,3
40.	15	8.	28,3	47.	15	8.	34,0
40.	30	8.	29,0	47.	30	8.	33,6
40.	45	8.	29,6	47.	45	8.	33,1
41.	0	8.	30,2	48.	0	8.	32,6
41.	15	8.	30,8	48.	15	8.	32,0
41.	30	8.	31,4	48.	30	8.	31,4
41.	45	8.	32,0	48.	45	8.	30,8
42.	0	8.	32,6	49.	0	8.	30,2
42.	15	8.	33,2	49.	15	8.	29,6
42.	30	8.	33,6	49.	30	8.	29,0
42.	45	8.	34,0	49.	45	8.	28,3
43.	0	8.	34,3	50.	0	8.	27,6
43.	15	8.	34,6	50.	15	8.	26,8
43.	30	8.	34,8	50.	30	8.	25,9
43.	45	8.	34,9	50.	45	8.	24,9
44.	0	8.	35,0	51.	0	8.	23,8
44.	15	8.	35,0	51.	15	8.	22,7
44.	30	8.	35,0	51.	30	8.	21,6
44.	45	8.	35,0	51.	45	8.	20,5
45.	0	8.	35,0	52.	0	8.	19,4
45.	15	8.	35,0	52.	15	8.	18,3
45.	30	8.	35,0	52.	30	8.	17,2
45.	45	8.	35,0	52.	45	8.	16,1
46.	0	8.	35,0	53.	0	8.	15,0
46.	15	8.	34,9	53.	15	8.	13,8
46.	30	8.	34,8	53.	30	8.	12,6
46.	45	8.	34,6	53.	45	8.	11,3
47.	0	8.	34,3	54.	0	8.	10,0

*TABLE de la différence des Latitudes vraies & corrigées,  
supposant les axes de la Terre dans le rapport de 229 à 231*

LATITUDES		DIFFÉRENCES.	LATITUDES.		DIFFÉRENCES.
D.	M.		D.	M.	
40.	0	7. 21,9	47.	0	7. 28,4
40.	15	7. 22,6	47.	15	7. 28,1
40.	30	7. 23,3	47.	30	7. 27,7
40.	45	7. 24,0	47.	45	7. 27,3
41.	0	7. 24,6	48.	0	7. 26,8
41.	15	7. 25,2	48.	15	7. 26,3
41.	30	7. 25,8	48.	30	7. 25,8
41.	45	7. 26,3	48.	45	7. 25,2
42.	0	7. 26,8	49.	0	7. 24,6
42.	15	7. 27,3	49.	15	7. 24,0
42.	30	7. 27,7	49.	30	7. 23,3
42.	45	7. 28,1	49.	45	7. 22,6
43.	0	7. 28,4	50.	0	7. 21,9
43.	15	7. 28,7	50.	15	7. 21,1
43.	30	7. 28,9	50.	30	7. 20,3
43.	45	7. 29,0	50.	45	7. 19,5
44.	0	7. 29,0	51.	0	7. 18,7
44.	15	7. 29,0	51.	15	7. 17,8
44.	30	7. 29,0	51.	30	7. 16,9
44.	45	7. 29,0	51.	45	7. 16,0
45.	0	7. 29,0	52.	0	7. 15,1
45.	15	7. 29,0	52.	15	7. 14,1
45.	30	7. 29,0	52.	30	7. 13,1
45.	45	7. 29,0	52.	45	7. 12,1
46.	0	7. 29,0	53.	0	7. 11,1
46.	15	7. 29,0	53.	15	7. 10,1
46.	30	7. 28,9	53.	30	7. 9,0
46.	45	7. 28,7	53.	45	7. 7,9
47.	0	7. 28,4	54.	0	7. 6,8

*TABLE de la différence des Latitudes vraies & corrigées, en supposant les axes de la Terre dans le rapport de 299 à 300.*

LATITUDES.		DIFFÉRENCES.		LATITUDES.		DIFFÉRENCES.	
D.	M.	M.	S.	D.	M.	M.	S.
40.	0	5.	39,0	47.	0	5.	43,4
40.	15	5.	39,5	47.	15	5.	43,2
40.	30	5.	40,0	47.	30	5.	42,9
40.	45	5.	40,4	47.	45	5.	42,6
41.	0	5.	40,8	48.	0	5.	42,3
41.	15	5.	41,2	48.	15	5.	42,0
41.	30	5.	41,6	48.	30	5.	41,6
41.	45	5.	42,0	48.	45	5.	41,2
42.	0	5.	42,3	49.	0	5.	40,8
42.	15	5.	42,6	49.	15	5.	40,4
42.	30	5.	42,9	49.	30	5.	40,0
42.	45	5.	43,2	49.	45	5.	39,5
43.	0	5.	43,4	50.	0	5.	39,0
43.	15	5.	43,6	50.	15	5.	38,5
43.	30	5.	43,8	50.	30	5.	38,0
43.	45	5.	43,9	50.	45	5.	37,4
44.	0	5.	44,0	51.	0	5.	36,8
44.	15	5.	44,0	51.	15	5.	36,1
44.	30	5.	44,0	51.	30	5.	35,4
44.	45	5.	44,0	51.	45	5.	34,7
45.	0	5.	44,0	52.	0	5.	34,0
45.	15	5.	44,0	52.	15	5.	33,3
45.	30	5.	44,0	52.	30	5.	32,6
45.	45	5.	44,0	52.	45	5.	31,8
46.	0	5.	44,0	53.	0	5.	32,0
46.	15	5.	43,9	53.	15	5.	30,2
46.	30	5.	43,8	53.	30	5.	29,4
46.	45	5.	43,6	53.	45	5.	28,6
47.	0	5.	43,4	54.	0	5.	27,8

Je n'ai pas cru devoir étendre les calculs au-delà des parallèles de 40 degrés & de 54 degrés, attendu que la Méridienne de France, que j'ai principalement en vue, ne passe pas ces latitudes.

(21.) Au moyen des Tables précédentes, étant donnée la latitude vraie d'un lieu, on conclura aisément la latitude corrigée, & réciproquement. Si l'on veut conclure la latitude vraie de la latitude corrigée, l'on ajoutera à la latitude corrigée les différences données par les Tables précédentes, & l'on aura la latitude vraie. Il faudra soustraire ces différences, de la latitude vraie, si l'on veut conclure la latitude corrigée de la latitude vraie.

### CINQUIÈME SECTION.

*Détermination du nombre de toises contenues dans l'arc d'un degré de la sphère inscrite ; & de la relation entre la Méridienne corrigée du lieu M sur la sphère inscrite, & la véritable Méridienne sur le sphéroïde.*

(22.) Pour appliquer les principes de la troisième Section, au calcul de la perpendiculaire à la Méridienne, je dois résoudre les deux Questions suivantes.

Fig. 3. Soit  $CP$  le petit axe de la Terre ;  $CG$  le grand axe ;  $PM$  un Méridien terrestre ;  $Pm$  le Méridien correspondant de la sphère inscrite : je dois déterminer 1.<sup>o</sup> le nombre de toises contenues dans l'arc d'un degré de la sphère inscrite. 2.<sup>o</sup> Étant donnée la distance d'un point  $M'$  pris sur un Méridien terrestre, à un autre point  $M$  pris sur le même Méridien, je dois conclure l'arc  $m'P$  de la sphère inscrite, compris entre le pôle  $P$  & le point  $m'$  projection du point  $M'$ . Rien n'est plus simple que la solution de ces deux Questions ; je commence par la première.

*Du nombre de toises contenues dans l'arc d'un degré de la sphère inscrite.*

(23.) On sait que le degré du Méridien, en remontant de Paris vers le Nord, est de 57074 toises. Supposons que

On demande, d'après cette mesure, combien de toises contient l'arc d'un degré de la sphère inscrite: voici comment on peut raisonner. Soit  $M$  Paris;  $M'$  le lieu plus boréal d'un degré que Paris; l'arc  $MM'$  du Méridien elliptique est par conséquent de 57074 toises. Soit  $\lambda$  la latitude de Paris, & par conséquent  $\lambda + 1^d$  la latitude du lieu  $M'$ ; il suit de ce qui a été dit dans les précédens paragraphes, que la tangente de la latitude du point  $m$ , sur la sphère inscrite, a pour expression  $\frac{r}{\rho} \text{ tang. } \lambda$ ; & que la tangente de la latitude du point  $m'$

Fig. 3.

sur la sphère inscrite, a pour expression  $\frac{r}{\rho} \text{ tang. } (\lambda + 1^d)$ .

On aura donc facilement la valeur de l'arc  $mm'$  de la sphère inscrite, arc qui est la différence des deux latitudes corrigées trouvées précédemment. Par exemple, si l'on suppose que Paris soit situé sous le parallèle de  $48^d 50' 14''$ ; que par conséquent la latitude du lieu plus boréal d'un degré que Paris, soit de  $49^d 50' 14''$ ; que de plus, les axes de la Terre soient dans le rapport de 177 à 178; on aura pour latitudes corrigées correspondantes aux latitudes vraies,  $48^d 40' 38''$  &  $49^d 40' 41''$ . L'arc  $mm'$  de la sphère inscrite, correspondant à l'arc  $MM'$  du sphéroïde, sera donc  $1^d 0' 3''$ .

(24.) Pour trouver maintenant le nombre de toises que contient l'arc  $mm'$  de la sphère inscrite, je remarque que le Méridien elliptique  $PM'MG$  & le cercle inscrit  $Pm'mG'$  ont des abscisses communes  $CH, Ch$ ; & des ordonnées correspondantes  $HM, Hm, hM', hm'$ , qui sont entr'elles, dans le rapport des demi-axes de l'ellipse génératrice. Soit

$x$  les abscisses communes à l'ellipse & au cercle;

$Y$  l'ordonnée à l'ellipse;

$y$  l'ordonnée au cercle;

$r$  le demi-petit axe de la Terre;

$\rho$  le demi-grand axe;

$K$  l'arc  $MM'$  de l'ellipse;

$k$  l'arc  $mm'$  correspondant du cercle inscrit;

On aura d'abord en vertu des constructions précédentes ;

$$\begin{aligned} (1) \quad dK &= \sqrt{dx^2 + dY^2}; & (2) \quad dk &= \sqrt{dx^2 + dy^2}; \\ (3) \quad \rho y &= rY; & (4) \quad x^2 + y^2 - r^2 &= 0; \\ (5) \quad xdx + ydy &= 0; & (6) \quad \rho dy - r dY &= 0. \end{aligned}$$

Si dans l'équation (1) l'on substitue à  $dY$  la valeur tirée de l'équation (6), elle deviendra

$$(7) \quad dK = \frac{\sqrt{\rho^2 dy^2 + r^2 dx^2}}{r};$$

ou enfin, en supposant

$$(8) \quad \Delta^2 - \rho^2 + r^2 = 0,$$

on aura

$$(9) \quad dK = \sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{\Delta^2 dy^2}{r^2}}.$$

Dans cette dernière équation, je substitue à  $dx^2 + dy^2$  la valeur  $dk^2$ , & j'ai

$$(10) \quad K + \text{constante} = \int \sqrt{dk^2 + \frac{\Delta^2 dy^2}{r^2}}.$$

Je réduis cette expression en série, & j'ai

$$(11) \quad K + \text{constante} = k + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \int \frac{dy^2}{dk} - \frac{1}{8} \frac{\Delta^4}{r^4} \int \frac{dy^4}{dk^3} +$$

Mais à cause des équations (2) & (5),

$$dk = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{-r dy}{\sqrt{r^2 - y^2}};$$

$$\text{donc } \frac{dy}{dk} = \frac{-\sqrt{r^2 - y^2}}{r} = \frac{-x}{r};$$

$$\text{de plus, } dy = \frac{-x dx}{y} = \frac{-x dx}{\sqrt{r^2 - x^2}};$$

l'équation (11) devient donc

$$(12) \quad K + \text{constante} = k + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \int \frac{x^2 dx}{r \sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{1}{8} \frac{\Delta^4}{r^4} \int \frac{x^4 dx}{r^3 \sqrt{r^2 - x^2}} +$$

(25.) Soit un cercle dont le rayon  $= r$ ; l'abscisse quelconque  $= x$ , & nommons  $X$  l'arc correspondant à l'abscisse  $x$ ; l'analyse nous apprend que

$$\int \frac{x^2 dx}{r\sqrt{r^2-x^2}} = -\frac{1}{2} \frac{x\sqrt{r^2-x^2}}{r} + \frac{1}{2} X,$$

$$\int \frac{x^4 dx}{r^3\sqrt{r^2-x^2}} = -\frac{1}{4} \frac{x^3\sqrt{r^2-x^2}}{r^3} + \frac{3}{4} \left[ -\frac{1}{2} \frac{x\sqrt{r^2-x^2}}{r} + \frac{1}{2} X \right].$$

Donc si l'on néglige les termes multipliés par les valeurs de  $\Delta$ , élevées à une puissance supérieure à la seconde, on aura

$$(1) K + \text{constante} = k + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^3} \left[ \frac{1}{2} X - \frac{1}{2} \frac{x\sqrt{r^2-x^2}}{r} \right] = k + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^3} \left[ \frac{1}{2} r X - \frac{1}{2} x\sqrt{r^2-x^2} \right].$$

(26.) Il est évident, que si du point  $m'$  du cercle  $G'm'P$  l'on mène au centre  $C$ , le rayon  $m'C$ ;  $\frac{1}{2} r X$  sera l'expression du secteur  $G' Cm'$ ; d'ailleurs,  $\frac{1}{2} x\sqrt{r^2-x^2}$  est l'expression de la surface du triangle  $m'Ch$ . De plus, si du point  $m'$  l'on abaisse sur  $CG'$  la perpendiculaire  $m'R'$ , on aura surface  $m'CR' =$  surface  $m'Ch$ ; donc  $\frac{1}{2} r X - \frac{1}{2} x\sqrt{r^2-x^2}$  est l'expression de la surface  $G'm'R'$ .

Soit maintenant  $CH$  l'abscisse particulière correspondante au point  $m$  du cercle inscrit. Du point  $m$  abaissons sur  $G'C$  la perpendiculaire  $mR$ ; il est clair, que par rapport au point  $m$ ,  $\frac{1}{2} r X - \frac{1}{2} x\sqrt{r^2-x^2}$  sera l'expression de la surface  $G'mR$ . Et comme par la nature de la question,  $K$  &  $k$  doivent être à la fois égaux à zéro, lorsque  $x = CH$ , on aura

$$\text{constante} = \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^3} \times \text{surface } G'mR;$$

& l'équation (1) du *paragraphe précédent*, deviendra

$$(1) k - K + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^3} \text{surface } Rmm'R' = 0.$$

(27.) Puisque surface  $Rmm'R' =$  surface du secteur  $mCm'$  + surface du triangle  $mCR -$  surface du triangle  $m'CR$ , les constructions précédentes se réduisent à ceci,



Fig. 3. Soit

$s$  le sinus  
 $c$  le cosinus  
 $a$  l'arc

} de la latitude corrigée du lieu  $M$ .

$s'$  le sinus  
 $c'$  le cosinus  
 $a'$  l'arc

} de la latitude corrigée d'un lieu  $M'$ , pris sur le Méridien du lieu  $M$ , & dont on compare la position avec celle du lieu  $M$ .

On aura

$$(1) k - K + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \left( \frac{a' - a}{2} + \frac{sc - s'c'}{2r} \right) = 0.$$

ou à cause de  $\frac{sc - s'c'}{2r} = \frac{\cos. (a + a') \times \sin. (a - a')}{2r}$ ,

$$(2) k - K + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \left[ \frac{a' - a}{2} + \frac{\cos. (a + a') \times \sin. (a - a')}{2r} \right] = 0,$$

ou enfin, à cause de  $a' = a + k$ ,

$$(3) k - K + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \left[ \frac{k}{2} - \frac{\cos. (2a + k) \times \sin. k}{2r} \right] = 0.$$

(28.) Dans les formules du *paragraphe précédent*,  $k$ ,  $K$ ,  $a$ ,  $a'$ , sont exprimés en valeurs du rayon. Si l'on vouloit que  $k$ ,  $K$ ,  $a$ ,  $a'$ , fussent exprimés en secondes de degré, on auroit alors l'équation suivante,

$$(1) k - K + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \left[ \frac{a' - a}{2} + \frac{206265'' \times \cos. (a + a') \times \sin. (a - a')}{2r^2} \right] = 0,$$

ou enfin,

$$(2) k - K + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \left[ \frac{k}{2} - \frac{206265'' \cos. (2a + k) \times \sin. k}{2r^2} \right] = 0.$$

Comme dans les recherches que nous nous proposons de faire, nous ne considérerons que des points situés dans l'hémisphère boréal, nous remarquerons que  $a$  &  $a'$  ont leur origine à l'Équateur; que les quantités  $K$  &  $k$  ont respectivement leur origine aux points  $M$ ,  $m$ ; qu'elles sont positives en remontant vers le Nord, & négatives dans le cas opposé; que le signe de  $\cos. (a + a')$ , de

sin.

fin.  $(a - a')$ , de cos.  $(2a + k)$ , & de sin.  $k$ , dépend de la valeur de ces arcs.

(29.) Au moyen de l'équation du *paragraphe précédent*, nous pouvons déterminer combien de degrés de la sphère inscrite contient l'arc du sphéroïde compris entre le parallèle de  $48^d 50' 14''$  & le parallèle de  $49^d 50' 14''$ , en supposant le rapport des axes de la Terre comme 177 à 178. En effet, nous avons vu (f. 23) que dans cette supposition, l'arc  $k = 1^d 0' 3''$ , & que par conséquent  $\frac{k}{a} = 1801'',5$ ; d'ailleurs,  $\frac{\Delta^2}{2r} = 567$ ; de plus,  $2a + k = 98^d 21' 19''$ ;

$$\text{donc } \frac{206265'' \cos. (2a + k) \sin. k}{2r^2} = 262'';$$

$$\text{donc } \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \left[ \frac{k}{a} - \frac{206265'' \cos. (2a + k) \sin. k}{2r^2} \right] \\ = \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} (1801'',5 + 262'') = 11'',7;$$

$$\text{donc } K = 1^d 0' 3'' + 11'',7 = 1^d 0' 14'',7.$$

(30.) Nous avons vu précédemment que  $K$  égale 57074 toises; de plus  $K$  égale un arc de  $1^d 0' 14'',7$  de la sphère inscrite. Donc un arc de  $1^d 0' 14'',7$  de la sphère inscrite, contient 57074 toises; donc un arc d'un degré de cette même sphère contient 56837 toises.

(31.) Par de semblables calculs, on trouvera les valeurs suivantes, en supposant le degré entre Paris & Amiens de 57074 toises.

*Rapport des axes de la Terre, comme 177 à 178.*

$$r = 100000; \quad p = 100565;$$

$$\frac{\Delta^2}{2r} = 567; \quad \log. \frac{\Delta^2}{2r^2} = -2,2467265.$$

Un degré de la sphère inscrite contient 56837 toises.

*Mém. 1778.*

N

98 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

*Rapport des axes de la Terre, comme 200 à 201.*

$$r = 100000; \quad p = 100500;$$

$$\frac{\Delta^2}{2r} = 502; \quad \log. \frac{\Delta^2}{2r^2} = -2,2994693.$$

Un degré de la sphère inscrite contient 56863 toises.

*Rapport des axes de la Terre, comme 229 à 230.*

$$r = 100000; \quad p = 100438;$$

$$\frac{\Delta^2}{2r} = 439,5; \quad \log. \frac{\Delta^2}{2r^2} = -2,3570411.$$

Un degré de la sphère inscrite contient 56884 toises.

*Rapport des axes de la Terre, comme 299 à 300.*

$$r = 100000; \quad p = 100333;$$

$$\frac{\Delta^2}{2r} = 334; \quad \log. \frac{\Delta^2}{2r^2} = -2,4762535.$$

Un degré de la sphère inscrite contient 56932 toises.

*Rapport des axes de la Terre, comme 1 à 1.*

$$r = 100000; \quad p = 100000; \quad \Delta = 0.$$

Un degré de la sphère = 57074 toises.

*De la relation entre l'arc  $m'P$  de la sphère inscrite & l'arc  $MM'$  du sphéroïde.*

(32.) Je dois résoudre maintenant la seconde question proposée dans le §. 22; c'est-à-dire étant donnée la distance  
 Fig. 3. d'un point  $M'$  d'un Méridien elliptique, à un autre point  $M$  pris sur le même Méridien, je dois conclure l'arc  $m'P$  de la Méridienne corrigée, compris entre le pôle  $P$  & le point  $m'$  projection du point  $M'$ ; & réciproquement.

Pour y parvenir, soit

$\theta$  le nombre de toises que contient un degré de la sphère inscrite: cette quantité est connue par le §. 31.

$k$  l'arc  $m'm$  de la sphère inscrite compris entre le point  $m$  projection du point  $M$ , & le point  $m'$  projection du point  $M'$ : je suppose que cet arc est évalué en degrés, minutes & secondes.

$K$  l'arc correspondant  $MM'$  du sphéroïde, évalué pareillement en Fig. 3.  
degrés, minutes & secondes de la sphère inscrite.

$\iota$  le nombre de toises que contient l'arc  $m'm$ .

$T$  le nombre de toises que contient l'arc  $M'M$ .

Il est évident que l'on a les équations suivantes,

$$(1) \theta k - \iota \times 3600'' = 0; \quad (2) \theta K - T \times 3600'' = 0.$$

Au moyen de ces deux équations, lorsque l'on connoîtra les arcs  $k, K$  en degrés, on évaluera facilement le nombre de toises qu'ils contiennent; & réciproquement.

Si l'on suppose les axes de la Terre dans le rapport de 177 à 178, l'on aura

$$\theta = 56837 \text{ toises..... } \log. \frac{3600''}{\theta} = - 1,1983286.$$

Si l'on suppose les axes de la Terre dans le rapport de 200 à 201, l'on aura

$$\theta = 56863 \text{ toises..... } \log. \frac{3600''}{\theta} = - 1,1985273.$$

Si l'on suppose les axes de la Terre dans le rapport de 229 à 230, l'on aura

$$\theta = 56884 \text{ toises..... } \log. \frac{3600''}{\theta} = - 1,1986876.$$

Si l'on suppose les axes de la Terre dans le rapport de 299 à 300, l'on aura

$$\theta = 56932 \text{ toises..... } \log. \frac{3600''}{\theta} = - 1,1990589.$$

Si l'on suppose les axes de la Terre dans le rapport de 1 à 1, l'on aura

$$\theta = 57074 \text{ toises..... } \log. \frac{3600''}{\theta} = - 1,2001358.$$

(33.) Pour faciliter l'usage des équations (1) & (2) du *paragraphe précédent*, j'ai cru qu'il étoit à propos de joindre la Table suivante.

## 100 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

*TABLE du nombre de Secondes correspondantes aux différen-  
degrés, depuis 0 degré jusqu'à 29 degrés.*

Deg.	Min.	Sec.	Deg.	Min.	Sec.	Deg.	Min.	Sec.
0.	1.	60	2.	20.	8400	7.	30.	27000
0.	2.	120	2.	30.	9000	7.	40.	27600
0.	3.	180	2.	40.	9600	7.	50.	28200
0.	4.	240	2.	50.	10200	8.	0.	28800
0.	5.	300	3.	0.	10800	8.	10.	29400
0.	6.	360	3.	10.	11400	8.	20.	30000
0.	7.	420	3.	20.	12000	8.	30.	30600
0.	8.	480	3.	30.	12600	8.	40.	31200
0.	9.	540	3.	40.	13200	8.	50.	31800
0.	10.	600	3.	50.	13800	9.	0.	32400
0.	11.	660	4.	0.	14400	9.	10.	33000
0.	12.	720	4.	10.	15000	9.	20.	33600
0.	13.	780	4.	20.	15600	9.	30.	34200
0.	14.	840	4.	30.	16200	9.	40.	34800
0.	15.	900	4.	40.	16800	9.	50.	35400
0.	16.	960	4.	50.	17400	10.	0.	36000
0.	17.	1020	5.	0.	18000	10.	10.	36600
0.	18.	1080	5.	10.	18600	10.	20.	37200
0.	19.	1140	5.	20.	19200	10.	30.	37800
0.	20.	1200	5.	30.	19800	10.	40.	38400
0.	30.	1800	5.	40.	20400	10.	50.	39000
0.	40.	2400	5.	50.	21000	11.	0.	39600
0.	50.	3000	6.	0.	21600	11.	10.	40200
1.	0.	3600	6.	10.	22200	11.	20.	40800
1.	10.	4200	6.	20.	22800	11.	30.	41400
1.	20.	4800	6.	30.	23400	11.	40.	42000
1.	30.	5400	6.	40.	24000	11.	50.	42600
1.	40.	6000	6.	50.	24600	12.	0.	43200
1.	50.	6600	7.	0.	25200	12.	10.	43800
2.	0.	7200	7.	10.	25800	12.	20.	44400
2.	10.	7800	7.	20.	26400	12.	30.	45000

<i>Deg.</i>	<i>Min.</i>	<i>Sec.</i>	<i>Deg.</i>	<i>Min.</i>	<i>Sec.</i>	<i>Deg.</i>	<i>Min.</i>	<i>Sec.</i>
12.	40.	45600	18.	10.	65400	23.	40.	85200
12.	50.	46200	18.	20.	66000	23.	50.	85800
13.	0.	46800	18.	30.	66600	24.	0.	86400
13.	10.	47400	18.	40.	67200	24.	10.	87000
13.	20.	48000	18.	50.	67800	24.	20.	87600
13.	30.	48600	19.	0.	68400	24.	30.	88200
13.	40.	49200	19.	10.	69000	24.	40.	88800
13.	50.	49800	19.	20.	69600	24.	50.	89400
14.	0.	50400	19.	30.	70200	25.	0.	90000
14.	10.	51000	19.	40.	70800	25.	10.	90600
14.	20.	51600	19.	50.	71400	25.	20.	91200
14.	30.	52200	20.	0.	72000	25.	30.	91800
14.	40.	52800	20.	10.	72600	25.	40.	92400
14.	50.	53400	20.	20.	73200	25.	50.	93000
15.	0.	54000	20.	30.	73800	26.	0.	93600
15.	10.	54600	20.	40.	74400	26.	10.	94200
15.	20.	55200	20.	50.	75000	26.	20.	94800
15.	30.	55800	21.	0.	75600	26.	30.	95400
15.	40.	56400	21.	10.	76200	26.	40.	96000
15.	50.	57000	21.	20.	76800	26.	50.	96600
16.	0.	57600	21.	30.	77400	27.	0.	97200
16.	10.	58200	21.	40.	78000	27.	10.	97800
16.	20.	58800	21.	50.	78600	27.	20.	98400
16.	30.	59400	22.	0.	79200	27.	30.	99000
16.	40.	60000	22.	10.	79800	27.	40.	99600
16.	50.	60600	22.	20.	80400	27.	50.	100200
17.	0.	61200	22.	30.	81000	28.	0.	100800
17.	10.	61800	22.	40.	81600	28.	10.	101400
17.	20.	62400	22.	50.	82200	28.	20.	102000
17.	30.	63000	23.	0.	82800	28.	30.	102600
17.	40.	63600	23.	10.	83400	28.	40.	103200
17.	50.	64200	23.	20.	84000	28.	50.	103800
18.	0.	64800	23.	30.	84600	29.	0.	104400

Fig. 3. (34.) Nous observerons que l'arc  $m'P = mP - mm'$ ; l'arc  $mP$  est le complément de la latitude corrigée du lieu  $M$ ; & l'arc  $mm'$  est l'arc que nous avons nommé  $k$ : donc

$$(1) m'P = \text{complément (latitude corrigée du lieu } M) - k.$$

Cette dernière équation va servir à résoudre la question proposée. Nous remarquerons enfin que le complément de la latitude corrigée du lieu  $M$ , dépend du rapport des axes de la Terre.

Si l'on suppose les axes de la Terre dans le rapport de 177 à 178, & que l'on parte de l'Observatoire de Paris, l'on aura

$$\text{Complément (latitude corrigée du lieu } M) = 41^{\text{d}} 19' 22''.$$

Si l'on suppose les axes de la Terre dans le rapport de 200 à 201, l'on aura

$$\text{Complément (latitude corrigée du lieu } M) = 41^{\text{d}} 18' 17''.$$

Si l'on suppose les axes de la Terre dans le rapport de 229 à 230, l'on aura

$$\text{Complément (latitude corrigée du lieu } M) = 41^{\text{d}} 17' 11''.$$

Si l'on suppose les axes de la Terre dans le rapport de 299 à 300, l'on aura

$$\text{Complément (latitude corrigée du lieu } M) = 41^{\text{d}} 15' 27''.$$

Si l'on suppose les axes de la Terre dans le rapport d'égalité,

$$\text{Complément (latitude du lieu } M) \dots\dots = 41^{\text{d}} 9' 46''.$$

Nous pouvons maintenant résoudre la question proposée. Cette question se subdivise en deux autres. En effet, étant donné en degrés l'arc  $m'P$  de la sphère inscrite, on peut demander le nombre de toises que contient l'arc  $MM'$  sur le sphéroïde. Étant donné le nombre de toises que contient l'arc  $MM'$  sur le sphéroïde, on peut demander en degrés la valeur de l'arc  $m'P$  de la sphère inscrite,

*Étant donné en degrés l'arc  $m'P$  de la sphère inscrite; Fig. 3. déterminer en toises l'arc  $MM'$  du sphéroïde.*

(35.) Cette première question ne présente aucune difficulté; en effet, puisque l'on connoît la valeur de l'arc  $m'P$  en degrés, l'équation (1) du §. 34, donnera tout de suite la valeur de  $k$ ; on conclura ensuite la valeur de  $K$  en degrés de la sphère inscrite, au moyen de l'équation (2) du §. 28; on conclura enfin la valeur de  $K$  en toises, au moyen de l'équation (2) du §. 32. Je ne donnerai point d'exemple de ce calcul, qui ne présente aucune difficulté.

*Étant donné le nombre de toises que contient l'arc  $MM'$ ; déterminer l'arc  $m'P$  de la sphère inscrite.*

(36.) Cette seconde question, qui est celle dont on a le plus généralement besoin, présente plus de difficulté. En effet, lorsque l'on connoît le nombre  $T$  de toises que contient l'arc  $K$ , il est facile d'avoir l'expression de cet arc en degrés de la sphère inscrite, au moyen de l'équation (2) du §. 32; mais il n'est pas aussi facile de déduire la valeur de  $k$  de celle de  $K$ , au moyen de l'équation (2) du §. 28; car dans cette équation les sinus & cosinus de l'arc inconnu sont mêlés avec l'arc, d'une manière qu'il ne seroit peut-être pas aisé de démêler. Heureusement, les circonstances du Problème permettent d'employer une méthode simple, & aussi exacte dans la pratique, que la solution rigoureuse.

Pour me faire entendre, je remarque que dans l'équation (2) du §. 28, les quantités  $\frac{k}{2}$ ,  $\text{cof. } (2a + k)$   $\sin. k$ , sont multipliées par la fraction  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2}$ ; il n'est donc pas absolument nécessaire de connoître ces quantités avec la dernière exactitude, pour avoir avec précision la correction donnée par le terme  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \left[ \frac{k}{2} - \frac{206265'' \text{ cof. } (2a + k) \sin. k}{2r^2} \right]$ ; il suffit d'avoir une connoissance approchée de la valeur de  $k$ ;



Fig. 3. & l'on peut supposer dans ce terme  $k = K$ . L'équation (2) du §. 28 deviendra alors

$$(1) k = K - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \left[ \frac{K}{2} - \frac{206265'' \cos. (2a + K) \times \sin. K}{2r^2} \right],$$

& cette équation sera vraie aux quantités près de l'ordre  $\frac{\Delta^2}{r^2}$ .

(37.) Nous remarquerons ici que l'arc  $m'P$  est le complément de la latitude corrigée du point  $M'$  du Méridien elliptique, où ce Méridien est coupé par la perpendiculaire à la Méridienne. Si donc on vouloit conclure la latitude vraie de cette intersection, d'après la connoissance de l'arc  $MM'$  en toises; on déterminera d'abord l'arc  $m'P$ , comme il a été dit ci-dessus; on connoîtra alors la latitude corrigée du point  $m'$ , d'où l'on conclura la latitude vraie, au moyen des Tables du §. 20. Passons à un Exemple.

#### E X E M P L E.

(38.) On suppose qu'une perpendiculaire à la Méridienne, rencontre le Méridien de Paris, en un point  $M'$ , éloigné du point  $M$  qui représente Paris, de 14823 toises du côté du Midi; on demande l'arc  $m'P$  de la sphère inscrite, compris entre le pôle  $P$  & le point  $m'$ , projection du point  $M'$ , en supposant d'ailleurs les axes de la Terre dans le rapport de 177, à 178.

SOLUTION. Puisque le point  $M'$  est plus méridional que Paris,  $K$  est négatif; d'ailleurs, dans l'équation (2) du §. 32,  $T = 14823$  toises, &  $\theta = 56837$  toises; donc  $K = -15' 39''$ ; de plus  $a = 48^d 40' 38''$ ; donc

$$\frac{K}{2} = -469'',5; \quad 2a + K = 97^d 5' 37'';$$

$$-\frac{206265'' \cos. (2a + K) \times \sin. K}{2r^2} = -58'';$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \left[ \frac{K}{2} - \frac{206265'' \cos. (2a + K) \times \sin. K}{2r^2} \right] = -\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} (-469'',5 - 58'') = 3''.$$

$$\text{Donc } k = -15' 39'' + 3'' = -15' 36'';$$

$$\text{donc } m'P = 41^d 19' 22'' + 15' 36'' = 41^d 34' 58''.$$

On peut

On peut conclure de ces calculs, conformément à la remarque du §. 37, que la latitude corrigée du point  $m'$  est de  $48^{\text{d}} 25' 2''$ , & que par conséquent la perpendiculaire dont il s'agit, coupe la Méridienne de Paris, sous le parallèle vrai de  $48^{\text{d}} 34' 39''$ .

(39.) Par de semblables calculs, on trouvera les valeurs suivantes pour le cas particulier dont il s'agit.

*Rapport des axes de la Terre, comme 177 à 178.*

$$m'P = 41^{\text{d}} 34' 58''.$$

*Rapport des axes de la Terre, comme 200 à 201.*

$$m'P = 41^{\text{d}} 33' 52''.$$

*Rapport des axes de la Terre, comme 229 à 230.*

$$m'P = 41^{\text{d}} 32' 46''.$$

*Rapport des axes de la Terre, comme 299 à 300.*

$$m'P = 41^{\text{d}} 31' 1''.$$

*Rapport des axes de la Terre, comme 1 à 1.*

$$m'P = 41^{\text{d}} 25' 21''.$$

(40.) Quelque facile qu'il soit d'exécuter dans tous les cas, les calculs prescrits, il est cependant possible d'éviter cette première opération, au moyen des Tables par lesquelles je terminerai cette section. On aura par-là très-facilement, les valeurs de  $m'P$  correspondantes au nombre de toises comprises depuis l'Observatoire de Paris jusqu'au pied de la perpendiculaire dans le sphéroïde; mais je dois auparavant estimer l'erreur des termes négligés dans la formule du §. 28.

Cette recherche fera voir la précision de la formule, & combien peu de changement l'introduction des termes de l'ordre  $\frac{\Delta^+}{r^+}$  apporteroit dans les résultats.

*Mém. 1778.*

O

*Estimation de l'erreur des termes négligés dans les formules  
des §. 27 & 28.*

(41.) Il est facile d'apprécier l'erreur des formules des §. 27 & 28. Nous avons vu en effet, que si l'on vouloit pousser l'exactitude des calculs, à la précision des termes de l'ordre  $\frac{\Delta^4}{r^4}$ , l'équation (12) du §. 24 auroit la forme suivante,

$$(1) K + \text{const.} = k + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \int \frac{x^2 dx}{r\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{1}{8} \frac{\Delta^4}{r^4} \int \frac{x^4 dx}{r^3\sqrt{r^2 - x^2}},$$

Nous avons vu également (§. 25) que

$$\int \frac{x^2 dx}{r\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{1}{2} X - \frac{1}{2} \frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{r};$$

$$\int \frac{x^4 dx}{r^3\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{3}{4} \int \frac{x^2 dx}{r\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{1}{4} \frac{x^3\sqrt{r^2 - x^2}}{r^3}.$$

De plus,

$$\frac{1}{2} \frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{r} = \frac{1}{4} \sin. 2 X;$$

$$\frac{1}{4} \frac{x^3\sqrt{r^2 - x^2}}{r^3} = \frac{1}{16} \sin. 2 X - \frac{1}{32} \sin. 4 X.$$

Si donc l'on ajoute convenablement la constante, ainsi qu'il a été pratiqué dans les §. 27 & 28, & que l'on conserve toutes les dénominations de ces paragraphes, l'on aura

$$(2) k - K + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \left[ \frac{k}{2} - \frac{206265'' \cos. (2a + k) \sin. k}{2r^2} \right]$$

$$- \frac{1}{32} \frac{\Delta^4}{r^4} \left[ \frac{k}{2} - \frac{206265'' \cos. (2a + k) \sin. k}{2r^2} \right]$$

$$+ \frac{1}{32} \frac{\Delta^4}{r^4} \left\{ 206265'' \left[ \frac{(\cos. 2a + k) \sin. k}{2r^2} - \frac{1}{2} \cos. \frac{(4a + 2k) \sin. 2k}{2r^2} \right] \right\} = 0.$$

(42.) Dans les calculs des paragraphes précédens, nous avons négligé les termes multipliés par  $\frac{\Delta^4}{r^4}$ , c'est-à-dire,

la quantité

$$\frac{\Delta^2}{16r^2} \left[ -\frac{3}{4}k + 206265'' \frac{\text{cof.}(2a+k)\sin.k}{r^2} - 206265'' \frac{\text{cof.}(4a+2k)\sin.2k}{8r^2} \right].$$

Il sera donc toujours facile de déterminer l'erreur de la méthode; mais il est évident que cette erreur ne peut être qu'infiniment petite. Si l'on supposoit, par exemple,  $k = 360^d$ ; à cause de  $k = 360^d$ ,  $\sin.k = 0$ ,  $\sin.2k = 0$ , on aura pour expression de l'erreur,  $\frac{3}{4} \frac{\Delta^2}{r^2} \text{arc } 22^d 30' = 7''.7$ .

(43.) Puisque l'erreur sur un arc de  $360^d$  n'est que d'environ  $8''$ , & que cette erreur est à peu-près proportionnelle à la grandeur de l'arc, on voit que pour un arc de  $90^d$ , l'erreur ne seroit que de  $2''$ . Nous avons donc eu raison d'avancer que cette erreur peut être négligée dans tous les calculs.

Au reste, si l'on vouloit avoir les circonstances précises où la quantité que l'on néglige, est la plus grande, on différencieroit l'expression du §. 42, & l'on auroit pour condition

$$(1) - \frac{3}{4}r + \text{cof.}(2a+2k) - \frac{3}{4}\text{cof.}(4a+4k) = 0.$$

*Construction des TABLES annoncées dans le §. 40.*

(44.) Ces Tables contiendront pour chacune des hypothèses d'excentricité de la Terre, les valeurs de l'arc  $m'P$  correspondantes au nombre de toises comprises depuis Paris, jusqu'au pied de la perpendiculaire à la Méridienne sur le sphéroïde. Ces Tables seront calculées de 10 en 10 minutes, en commençant au  $34.^e$  degré de latitude, & en finissant au  $53.^e$  degré 30 minutes. On n'oubliera pas que par l'arc  $m'P$  nous entendons l'arc compris sur la sphère inscrite, entre le pôle & la projection de l'intersection de la Méridienne de Paris, & de la perpendiculaire à cette Méridienne.

## 108 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

TABLE des valeurs de  $m'P$ , correspondantes au nombre de toises comprises depuis Paris jusqu'au pied de la perpendiculaire à la Méridienne, passant par le lieu pour lequel on calcule.

(On suppose le rapport des axes de la Terre, comme 177 à 178.)

VALEURS de $m'P$ .	DISTANCES sur la Méridienne.	DIFFÉR. pour 10' de variation de $m'P$ .	VALEURS de $m'P$ .	DISTANCES sur la Méridienne.	DIFFÉR. pour 10' de variation de $m'P$ .
D. M.	Toises.	Toises.	D. M.	Toises.	Toises.
36. 30	275051	9507	41 <sup>d</sup> 19' 22"	0	9503
36. 40	265544		41. 20	602	
36. 50	256037		41. 30	10105	
37. 0	246530	9507	41. 40	19608	9502
37. 10	237023		41. 50	29111	
37. 20	227516		42. 0	38613	
37. 30	218009		42. 10	48115	
37. 40	208502		42. 20	57617	
37. 50	198995		42. 30	67119	
38. 0	189489	9506	42. 40	76621	9501
38. 10	179983		42. 50	86123	
38. 20	170478		43. 0	95625	
38. 30	160973		43. 10	105127	
38. 40	151468		43. 20	114629	
38. 50	141963		43. 30	124130	
39. 0	132458	9505	43. 40	133631	9500
39. 10	122953		43. 50	143132	
39. 20	113448		44. 0	152633	
39. 30	103943		44. 10	162133	
39. 40	94438		44. 20	171633	
39. 50	84933		44. 30	181133	
40. 0	75428	9504	44. 40	190633	9499
40. 10	65924		44. 50	200133	
40. 20	56420		45. 0	209633	
40. 30	46916		45. 10	219133	
40. 40	37412		45. 20	228632	
40. 50	27908		45. 30	238131	
41. 0	18404	9503	45. 40	247630	
41. 10	8900		45. 50	257129	
41 <sup>d</sup> 19' 22"	0				

VALEURS de <i>m'P</i>	DISTANCES sur la Mérienne.	DIFFÉR. pour 10' de variation de <i>m'P</i> .	VALEURS de <i>m'P</i> .	DISTANCES sur la Mérienne.	DIFFÉR. pour 10' de variation de <i>m'P</i> .
<i>D.</i> <i>M.</i>	<i>Toises.</i>	<i>Toises.</i>	<i>D.</i> <i>M.</i>	<i>Toises.</i>	<i>Toises.</i>
46. 0	266628	9498	51. 0	551516	9493
46. 10	276126		51. 10	561009	
46. 20	285624		51. 20	570502	
46. 30	295122		51. 30	579995	
46. 40	304620		51. 40	589488	
46. 50	314118		51. 50	598981	
47. 0	323616	9497	52. 0	608474	9493
47. 10	333114		52. 10	617967	
47. 20	342612		52. 20	627460	
47. 30	352109		52. 30	636953	
47. 40	361606		52. 40	646446	
47. 50	371103		52. 50	655939	
48. 0	380600	9496	53. 0	665432	9492
48. 10	390097		53. 10	674924	
48. 20	399594		53. 20	684416	
48. 30	409090		53. 30	693908	
48. 40	418586		53. 40	703400	
48. 50	428082		53. 50	712892	
49. 0	437578	9495	54. 0	722384	9492
49. 10	447074		54. 10	731876	
49. 20	456570		54. 20	741368	
49. 30	466066		54. 30	750860	
49. 40	475562		54. 40	760351	
49. 50	485057		54. 50	769842	
50. 0	494552	9494	55. 0	779333	9491
50. 10	504046		55. 10	788824	
50. 20	513540		55. 20	798315	
50. 30	523034		55. 30	807806	
50. 40	532528		55. 40	817296	
50. 50	542022		55. 50	826786	
			56. 0	836276	

110 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

TABLE des valeurs de m'P, correspondantes au nombre de toises comprises depuis Paris jusqu'au pied de la perpendiculaire à la Méridienne, passant par le lieu pour lequel on calcule.

( On suppose le rapport des axes de la Terre, comme 200 à 201. )

VALEURS de m'P.		DISTANCES sur la Méridienne.	DIFFÉR. pour 10' de variation de m'P.	VALEURS de m'P.		DISTANCES sur la Méridienne.	DIFFÉR. pour 10' de variation de m'P.
D.	M.	Toises.	Toises.	D.	M.	Toises.	Toises.
36.	30	274037	9507	41 <sup>d</sup> 18' 17"		0	9504
36.	40	264530		41.	20	1632	
36.	50	255023		41.	30	11136	
37.	0	245516	9507	41.	40	20640	
37.	10	236009		41.	50	30144	9503
37.	20	226502		42.	0	39647	
37.	30	216995		42.	10	49150	
37.	40	207488		42.	20	58653	
37.	50	197982		42.	30	68156	
38.	0	188476	9506	42.	40	77659	9502
38.	10	178970		42.	50	87162	
38.	20	169464		43.	0	96665	
38.	30	159958		43.	10	106167	
38.	40	150452		43.	20	115669	
38.	50	140946		43.	30	125171	
39.	0	131440	9506	43.	40	134673	9502
39.	10	121934		43.	50	144175	
39.	20	112428		44.	0	153677	9502
39.	30	102922		44.	10	163179	
39.	40	93416		44.	20	172681	
39.	50	83910		44.	30	182183	
40.	0	74404	9505	44.	40	191685	
40.	10	64899		44.	50	201186	
40.	20	55394		45.	0	210687	9501
40.	30	45889		45.	10	220188	
40.	40	36384		45.	20	229689	
40.	50	26880		45.	30	239190	
41.	0	17376	9504	45.	40	248691	
41.	10	78722		45.	50	258192	
41 <sup>d</sup> 18' 17"		0					

VALEURS de <i>m'P.</i>		DISTANCES sur la Mérienne.	DIFFÉR. pour 10' de variation de <i>m'P.</i>	VALEURS de <i>m'P.</i>		DISTANCES sur la Mérienne.	DIFFÉR. pour 10' de variation de <i>m'P.</i>
<i>D.</i>	<i>M.</i>	<i>Toises.</i>	<i>Toises.</i>	<i>D.</i>	<i>M.</i>	<i>Toises.</i>	<i>Toises.</i>
46.	0	267692	9500	51.	0	552630	9496
46.	10	277192		51.	10	562126	
46.	20	286692		51.	20	571622	
46.	30	296192		51.	30	581118	
46.	40	305692		51.	40	590613	
46.	50	315191		51.	50	600108	
47.	0	324690	9499	52.	0	609603	9495
47.	10	334189		52.	10	619098	
47.	20	343688		52.	20	628593	
47.	30	353187		52.	30	638088	
47.	40	362686		52.	40	647583	
47.	50	372185		52.	50	657078	
48.	0	381684	9498	53.	0	666573	9494
48.	10	391182		53.	10	676068	
48.	20	400680		53.	20	685563	
48.	30	410178		53.	30	695057	
48.	40	419676		53.	40	704551	
48.	50	429174		53.	50	714045	
49.	0	438672	9497	54.	0	723539	9493
49.	10	448169		54.	10	733033	
49.	20	457666		54.	20	742526	
49.	30	467163		54.	30	752020	
49.	40	476660		54.	40	761513	
49.	50	486157		54.	50	771006	
50.	0	495654	9496	55.	0	780499	9492
50.	10	505150		55.	10	789992	
50.	20	514646		55.	20	799485	
50.	30	524142		55.	30	808977	
50.	40	533638		55.	40	818469	
50.	50	543134		55.	50	827961	
				56.	0	837453	



114 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

TABLE des valeurs de m'P, correspondantes au nombre de toises comprises depuis Paris jusqu'au pied de la perpendiculaire à la Méridienne, passant par le lieu pour lequel on calcule.

( On suppose le rapport des axes de la Terre, comme 299 à 300. )

VALEURS de m'P.	DISTANCES sur la Méridienne.	DIFFÉR. pour 10' de variation de m'P.	VALEURS de m'P.	DISTANCES sur la Méridienne.	DIFFÉR. pour 10' de variation de m'P.
D. M.	Toises.	Toises.	D. M.	Toises.	Toises.
36. 30	271406	9509	41 <sup>d</sup> 15' 27"	0	9507
36. 40	261897		41. 20	4326	
36. 50	252388		41. 30	13833	
37. 0	242879	9509	41. 40	23339	
37. 10	233370		41. 50	32845	9506
37. 20	223861		42. 0	42351	
37. 30	214352		42. 10	51857	
37. 40	204843		42. 20	61363	
37. 50	195334		42. 30	70869	
38. 0	185825	9508	42. 40	80375	9506
38. 10	176317		42. 50	89881	
38. 20	166809		43. 0	99387	
38. 30	157301		43. 10	108893	
38. 40	147793		43. 20	118399	
38. 50	138285		43. 30	127905	
39. 0	128777	9508	43. 40	137411	9505
39. 10	119269		43. 50	146916	
39. 20	109761		44. 0	156421	
39. 30	100253		44. 10	165926	
39. 40	90745		44. 20	175431	
39. 50	81237		44. 30	184936	
40. 0	71729	9507	44. 40	194441	9505
40. 10	62222		44. 50	203946	
40. 20	52715		45. 0	213451	
40. 30	43209		45. 10	222956	
40. 40	33702		45. 20	232461	
40. 50	24195		45. 30	241965	
41. 0	14688	9507	45. 40	251469	9505
41. 10	5181		45. 50	260973	
41 <sup>d</sup> 15' 27"	0				

VALEURS de $m/P$ .		DISTANCES sur la Mérienne.	DIFFÉR. pour 10' de variation de $m/P$ .	VALEURS de $m/P$ .		DISTANCES sur la Mérienne.	DIFFÉR. pour 10' de variation de $m/P$ .
D.	M.	Telser.	Telser.	D.	M.	Telser.	Telser.
46.	0	270477	9504	51.	0	555559	9501
46.	10	279981		51.	10	565061	
46.	20	289485		51.	20	574563	
46.	30	298989		51.	30	584064	
46.	40	308493		51.	40	593565	
46.	50	317997		51.	50	603066	
47.	0	327500	9503	52.	0	612567	9501
47.	10	337003		52.	10	622068	
47.	20	346506		52.	20	631569	
47.	30	356009		52.	30	641070	
47.	40	365512		52.	40	650571	
47.	50	375015		52.	50	660072	
48.	0	384518	9503	53.	0	669573	9501
48.	10	394021		53.	10	679074	
48.	20	403524		53.	20	688575	
48.	30	413027		53.	30	698076	
48.	40	422530		53.	40	707577	
48.	50	432033		53.	50	717078	
49.	0	441535	9502	54.	0	726578	9500
49.	10	451037		54.	10	736078	
49.	20	460539		54.	20	745578	
49.	30	470041		54.	30	755078	
49.	40	479543		54.	40	764578	
49.	50	489045		54.	50	774078	
50.	0	498547	9502	55.	0	783578	9500
50.	10	508049		55.	10	793078	
50.	20	517551		55.	20	802578	
50.	30	527053		55.	30	812078	
50.	40	536555		55.	40	821578	
50.	50	546057		55.	50	831078	
				56.	0	840578	

116 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

TABLE des valeurs de m'P, correspondantes au nombre de toises comprises depuis Paris jusqu'au pied de la perpendiculaire à la Méridienne, passant par le lieu pour lequel on calcule.

( On suppose la Terre sphérique. )

VALEURS de m'P.		DISTANCES sur la Méridienne.	VALEURS de m'P.		DISTANCES sur la Méridienne.
D.	M.	Toises.	D.	M.	Toises.
36.	30	266123	41 <sup>d</sup> 9' 46"		0
36.	40	256611	41.	10	222
36.	50	247098	41.	20	9734
37.	0	237586	41.	30	19247
37.	10	228074	41.	40	28759
37.	20	218561	41.	50	38271
37.	30	209049	42.	0	47784
37.	40	199537	42.	10	57296
37.	50	190024	42.	20	66808
38.	0	180512	42.	30	76321
38.	10	171000	42.	40	85833
38.	20	161487	42.	50	95345
38.	30	151975	43.	0	104858
38.	40	142463	43.	10	114370
38.	50	132950	43.	20	123882
39.	0	123438	43.	30	133395
39.	10	113926	43.	40	142907
39.	20	104413	43.	50	152419
39.	30	94901	44.	0	161932
39.	40	85389	44.	10	171444
39.	50	75876	44.	20	180956
40.	0	66364	44.	30	190469
40.	10	56852	44.	40	199981
40.	20	47339	44.	50	209493
40.	30	37827	45.	0	219006
40.	40	28315	45.	10	228518
40.	50	18802	45.	20	238030
41.	0	9290	45.	30	247543
41 <sup>d</sup> 9' 46"		0	45.	40	257055
			45.	50	266567

VALEURS de $m'P$ .		DISTANCES sur la Mérienne.	VALEURS de $m'P$ .		DISTANCES sur la Mérienne.
D.	M.	Toises.	D.	M.	Toises.
46.	0	276080	51.	0	561450
46.	10	285592	51.	10	570962
46.	20	295104	51.	20	580474
46.	30	304617	51.	30	589986
46.	40	314129	51.	40	599499
46.	50	323640	51.	50	609011
47.	0	333154	52.	0	618524
47.	10	342666	52.	10	628036
47.	20	352178	52.	20	637548
47.	30	361691	52.	30	647060
47.	40	371203	52.	40	656573
47.	50	380715	52.	50	666085
48.	0	390228	53.	0	675598
48.	10	399740	53.	10	685110
48.	20	409252	53.	20	694622
48.	30	418765	53.	30	704134
48.	40	428277	53.	40	713647
48.	50	437789	53.	50	723159
49.	0	447302	54.	0	732672
49.	10	456814	54.	10	742184
49.	20	466326	54.	20	751696
49.	30	475839	54.	30	761208
49.	40	485351	54.	40	770721
49.	50	494863	54.	50	780233
50.	0	504376	55.	0	789746
50.	10	513888	55.	10	799258
50.	20	523400	55.	20	808770
50.	30	532912	55.	30	818283
50.	40	542425	55.	40	827795
50.	50	551937	55.	50	837307
			56.	0	846820

Dans cette Table, le nombre de toises correspondantes à 10' de variation de  $m'P$ , est constamment de 9512,3.

(45.) Au moyen des Tables précédentes, il est facile de déterminer la valeur de  $m'P$  correspondante à une distance donnée de l'Observatoire de Paris, au pied de la perpendiculaire à la Méridienne, passant par un lieu quelconque; & réciproquement. Prenons l'exemple du §. 38. Suivant la supposition, la distance sur la Méridienne est de 14823 toises du côté du Midi; je cherche dans la première Table du §. 44, la valeur de  $m'P$  correspondante à ce nombre de toises; je vois que cette valeur est entre  $41^d 30'$  &  $41^d 40'$ ; je vois de plus, que la différence de la distance sur la Méridienne, correspondante à 10 minutes de variation de  $m'P$ , est de 9503 toises entre  $41^d 30'$  &  $41^d 40'$ . Je prends la différence entre le nombre 14823 donné & le nombre 10105 qui répond à  $41^d 30'$ ; cette différence est de 4718 toises; je fais donc la proportion suivante; 9503 est à 600" comme 4718 est à un quatrième terme; c'est le nombre de secondes qu'il faut ajouter à  $41^d 30'$ , pour avoir la valeur de  $m'P$  cherchée; & j'ai  $m'P = 41^d 30' + 4' 58'' = 41^d 34' 58''$ , comme dans le §. 38.

## SIXIÈME SECTION.

*Détermination du rapport entre la perpendiculaire à la Méridienne sur le sphéroïde, & la perpendiculaire corrigée sur la sphère inscrite.*

(46.) Je dois maintenant, pour suivre l'ordre de mes recherches, déterminer la valeur de la perpendiculaire corrigée sur la sphère inscrite. On peut voir dans le §. 16, la définition de cette perpendiculaire, & l'influence qu'elle a sur la solution du Problème. Comme ce n'est pas cette quantité qui est donnée immédiatement par les mesures géodésiques, mais la perpendiculaire sur le sphéroïde, il s'agit de déterminer le rapport entre ces deux perpendiculaires.

(47.). Pour y parvenir, soit

$x$  l'abscisse commune à l'ellipse génératrice du sphéroïde & au cercle générateur de la sphère inscrite ;

$Y$  l'ordonnée à l'ellipse ;

$y$  l'ordonnée correspondante du cercle inscrit ;

je suppose que l'origine des coordonnées est au centre commun du cercle & de l'ellipse.

$r$  le demi-petit axe de la Terre ;

$\rho$  le demi-grand axe ;

$u$  l'angle des différens Méridiens du sphéroïde avec le Méridien du lieu  $M$  ;

$v$  l'angle des différens Méridiens de la sphère inscrite avec la Méridienne corrigée du lieu  $M$  ;

$Y'$  l'ordonnée particulière à l'ellipse, au point où la perpendiculaire à la Méridienne sur le sphéroïde rencontre le Méridien du lieu  $M$  ;

$y'$  l'ordonnée particulière du cercle inscrit, au point où la perpendiculaire corrigée rencontre le Méridien corrigé du lieu  $M$  ;

$x'$  l'abscisse du cercle inscrit correspondant au même point ;

$P$  le périmètre de la perpendiculaire à la Méridienne sur le sphéroïde ;

$p$  le périmètre de la perpendiculaire corrigée sur la sphère ;

$$\Delta^2 = \rho^2 - r^2.$$

Nous avons vu précédemment, que l'on avoit pour équation à la perpendiculaire à la Méridienne sur le sphéroïde,

$$(1) Y^2 du - Y' \sqrt{Y^2 du^2 + r^2 dx^2 + r^2 dY^2} = 0;$$

pour équation à la perpendiculaire corrigée sur la sphère inscrite,

$$(2) y^2 dv - y' \sqrt{y^2 dv^2 + r^2 dx^2 + r^2 dy^2} = 0;$$

pour équation à l'ellipse génératrice du sphéroïde,

$$(3) \rho^2 x^2 + r^2 Y^2 - r^2 \rho^2 = 0;$$

pour équation au cercle générateur de la sphère inscrite,

$$(4) x^2 + y^2 - r^2 = 0;$$

pour expression du périmètre de la perpendiculaire à la Méridienne sur le sphéroïde,

$$(5) dP = \frac{\sqrt{Y^2 du^2 + r^2 dx^2 + r^2 dY^2}}{r};$$

pour expression du périmètre de la perpendiculaire corrigée sur la sphère inscrite,

$$(6) \quad dp = \frac{\sqrt{(y^2 dx^2 + r^2 dx^2 + r^2 dy^2)}}{r}.$$

De plus, à cause des propriétés de l'ellipse & du cercle inscrit,

$$(7) \quad p y - r Y = 0;$$

$$(8) \quad p y' - r Y' = 0;$$

$$(9) \quad p dy - r dY = 0;$$

$$(10) \quad x dx + y dy = 0.$$

(48.) Si dans les équations (5) & (6) du *paragraphe précédent*, l'on substitue à  $Y^2 du^2$  & à  $y^2 dv^2$ , leurs valeurs tirées des équations (1) & (2), l'on aura

$$(1) \quad dP = - \frac{Y \sqrt{(dx^2 + dY^2)}}{\sqrt{(Y^2 - Y'^2)}};$$

$$(2) \quad dp = - \frac{y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{(y^2 - y'^2)}} = - \frac{y dk}{\sqrt{(y^2 - y'^2)}};$$

en supposant d'ailleurs,

$$(3) \quad dk = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}.$$

Dans les équations (1) & (2), nous avons donné à  $dP$  & à  $dp$  le signe *moins*, parce que, par la nature de la question, les périmètres des perpendiculaires à la Méridienne, soit sur le sphéroïde, soit sur la sphère inscrite, croissent à mesure que les arcs qui ont respectivement pour différentielles  $\sqrt{(dx^2 + dY^2)}$ ,  $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ , vont en décroissant.

Je remarque maintenant, qu'à cause des équations (7) & (8) du *paragraphe précédent*, l'équation (1) du présent *paragraphe* peut avoir la forme suivante,

$$(4) \quad dP = - \frac{y \sqrt{(dx^2 + \frac{p^2 dy^2}{r^2})}}{\sqrt{(y^2 - y'^2)}}.$$

ou à cause de  $p^2 = r^2 - \Delta^2$ ,

$$(5) \quad dP = - \frac{y \sqrt{(dx^2 + dy^2 + \frac{\Delta^2 dy^2}{r^2})}}{\sqrt{(y^2 - y'^2)}}.$$

ou enfin

ou enfin

$$(6) dP = - \frac{y}{\sqrt{(y^2 - y'^2)}} \sqrt{(dk^2 + \frac{\Delta^2}{r^2} dy^2)}.$$

Dans l'expression précédente, je réduis  $\sqrt{(dk^2 + \frac{\Delta^2}{r^2} dy^2)}$  en série, & j'ai

$$(7) dP = - \frac{y}{\sqrt{(y^2 - y'^2)}} (dk + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \frac{dy}{dk} dy - \frac{1}{8} \frac{\Delta^4}{r^4} \frac{dy^3}{dk^3} dy + \&c.).$$

Je remarque d'abord, que  $-\frac{y dk}{\sqrt{(y^2 - y'^2)}} = dp$ ; de plus,  $\frac{dy}{dk} = -\frac{x}{r}$ . L'équation (7) peut donc être mise sous la forme suivante,

$$(8) dP = dp + \frac{y dy}{\sqrt{(y^2 - y'^2)}} (\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \frac{x}{r} - \frac{1}{8} \frac{\Delta^4}{r^4} \frac{x^3}{r^3} + \&c.);$$

mais  $y dy = -x dx$ , & d'ailleurs,  $\sqrt{(y^2 - y'^2)} = \sqrt{(x'^2 - x^2)}$ ; donc

$$(9) dP = dp - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{x^2 dx}{r \sqrt{(x'^2 - x^2)}} + \frac{1}{8} \frac{\Delta^4}{r^4} \times \frac{x^4 dx}{r^3 \sqrt{(x'^2 - x^2)}} - \&c.$$

Donc, en intégrant

$$(10) P + \text{const.} = p - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \int \frac{x^2 dx}{r \sqrt{(x'^2 - x^2)}} + \frac{1}{8} \frac{\Delta^4}{r^4} \int \frac{x^4 dx}{r^3 \sqrt{(x'^2 - x^2)}} - \&c.,$$

ou enfin,

$$(11) P + \text{const.} = p - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2 x'}{r^3} \int \frac{x^2 dx}{x' \sqrt{(x'^2 - x^2)}} + \frac{1}{8} \frac{\Delta^4 x'^3}{r^7} \int \frac{x^4 dx}{x'^3 \sqrt{(x'^2 - x^2)}} - \&c.$$

(49.) Soit un cercle dont le rayon  $= x'$ ; prenons dans ce cercle une abscisse  $= x$ , & nommons  $X$  l'arc correspondant à l'abscisse  $x$ ; l'analyse nous apprend que

$$\int \frac{x^2 dx}{x' \sqrt{(x'^2 - x^2)}} = -\frac{1}{2} \frac{x \sqrt{(x'^2 - x^2)}}{x'} + \frac{1}{2} X;$$

$$\int \frac{x^4 dx}{x'^3 \sqrt{(x'^2 - x^2)}} = -\frac{1}{4} \frac{x^3 \sqrt{(x'^2 - x^2)}}{x'^3} + \frac{3}{4} \left[ -\frac{1}{2} \frac{x \sqrt{(x'^2 - x^2)}}{x'} + \frac{1}{2} X \right].$$



Donc, si l'on néglige les termes multipliés par les valeurs de  $\Delta$ , élevées à une puissance supérieure à la seconde, on aura

$$(1) P + \text{constante} = p - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2 x'}{r^3} \left[ \frac{1}{2} X - \frac{1}{2} x \frac{\sqrt{x'^2 - x^2}}{x'} \right].$$

(50.) Dans l'équation (1) du *paragraphe précédent*,  $x$  est le sinus de l'arc  $X$ . Mais cet arc & ce sinus ne doivent point être évalués dans le cercle qui a  $r$  pour rayon; ils doivent au contraire être évalués dans un cercle dont le rayon  $= x'$ . Si donc on veut rapporter la quantité  $\frac{1}{2} X - \frac{1}{2} x \frac{\sqrt{x'^2 - x^2}}{x'}$  au cercle dont le rayon  $= r$ , il faudra multiplier chacune des quantités qui la composent, par  $\frac{r}{x'}$ ; elle deviendra

$$\frac{1}{2} \frac{r}{x'} X - \frac{1}{2} \frac{r x}{x'} \times \frac{\sqrt{r^2 - \frac{r^2 x^2}{x'^2}}}{r}; \text{ \& pour ne pas trou-}$$

bler l'équation, on multipliera le coefficient  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2 x'}{r^3}$  par  $\frac{x'}{r}$ .

On aura alors

$$(1) P + \text{constante} = p - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2 x'^2}{r^4} \left[ \frac{1}{2} \frac{r X}{x'} - \frac{\frac{r x}{x'} \sqrt{r^2 - \frac{r^2 x^2}{x'^2}}}{2r} \right].$$

Et toutes les quantités seront évaluées dans le cercle dont le rayon  $= r$ ; c'est-à-dire dans le cercle générateur de la sphère inscrite. Nous remarquerons que  $\frac{r}{x'} X$  est l'arc dont  $\frac{r x}{x'}$  est le sinus, & dont  $\sqrt{r^2 - \frac{r^2 x^2}{x'^2}}$  est le cosinus.

(51.) Si l'on jette les yeux sur les principes développés dans le §. 16, on se convaincra facilement que  $x$  est le sinus de la latitude corrigée du lieu  $F$ , & que  $x'$  est le cosinus de l'arc  $m'P$ . Soit donc  $A$  un angle que l'on déterminera de la

manière suivante,

$$(1) \sin. A = \frac{r \sin. (\text{latitude corrigée du lieu } F)}{\cosinus m'P};$$

on aura

$$(2) P + \text{constante} = p - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\cosin.^2 m'P}{r^2} \left( \frac{1}{2} A - \frac{1}{2} \frac{\sin. A \cos. A}{r} \right),$$

$$\text{ou à cause de } \frac{1}{2} \frac{\sin. A \cos. A}{r} = \frac{1}{4} \sin. 2A,$$

$$(3) P + \text{constante} = p - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\cosin.^2 m'P}{r^2} \left( \frac{1}{2} A - \frac{1}{4} \sin. 2A \right).$$

Nous observerons que, par la nature de la question,  $P$  &  $p$  doivent être à la fois égaux à zéro, lorsque  $\sin. (\text{latitude corrigée du lieu } F) = \cosin. m'P$ ; & par conséquent lorsque  $A = 90^\text{d}$ ;  $\sin. 2A = \sin. 180^\text{d} = 0$ ; on a donc  $\text{constante} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\cosin.^2 m'P}{r^2} \frac{\text{arc } 90^\text{d}}{2}$ ; l'équation (3) devient par-là

$$(4) P - p - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\cosin.^2 m'P}{r^2} \left( \frac{\text{arc } 90^\text{d} - A}{2} + \frac{1}{4} \sin. 2A \right) = 0.$$

(52.) Dans la formule précédente,  $P$ ,  $p$ ,  $\text{arc } 90^\text{d}$ ,  $A$  sont exprimés en valeurs du rayon; si l'on vouloit que ces quantités fussent exprimées en degrés, minutes & secondes, on auroit

$$(1) P - p - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\cosin.^2 m'P}{r^2} \left( \frac{90^\text{d} - A}{2} + \frac{206265'' \sin. 2A}{4r} \right) = 0.$$

Nous remarquerons enfin que si l'on nomme

$\theta$  le nombre de toises que contient un degré de la sphère inscrite;  
nous avons évalué cette quantité dans le §. 32;

$\tau$  le nombre de toises que contient  $p$ ;

$T$  le nombre de toises que contient  $P$ ;

On aura les équations

$$(2) \theta p - 3600'' \times \tau = 0;$$

$$(3) \theta P - 3600'' \times T = 0.$$

Q ij

## 124 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Au moyen de ces deux équations, lorsque l'on connoîtra  $p$  &  $P$  en degrés, on évaluera facilement le nombre de toises qu'ils contiennent; & réciproquement.

(53.) Nous pouvons maintenant résoudre les deux questions suivantes.

### PREMIÈRE QUESTION.

*Étant donné l'arc  $m'P$  de la sphère inscrite (nous avons vu dans la section précédente comment cet arc se déduisoit de la distance en toises des points  $M, M'$  sur le Méridien elliptique) ainsi que la latitude du lieu  $F$ ; on demande le nombre de toises que contient la perpendiculaire menée du lieu  $F$  à la Méridienne du lieu  $M$  sur le sphéroïde?*

### SECONDE QUESTION.

*Étant donné l'arc  $m'P$  de la sphère inscrite, & le nombre de toises que contient la perpendiculaire menée du lieu  $F$  à la Méridienne du lieu  $M$  sur le sphéroïde; on demande la latitude du lieu  $F$ ?*

### Solution de la première Question.

(54.) La première question ne présente aucune difficulté. En effet, puisque l'on connoît l'arc  $m'P$  de la sphère inscrite & la latitude du lieu  $F$ , on connoîtra la latitude corrigée de ce dernier lieu; on aura donc sur la sphère inscrite un triangle sphérique  $m'PF'$  rectangle en  $m'$ , dans lequel on connoîtra le côté  $m'P$ , & le côté  $PF'$  complément de la latitude corrigée du lieu  $F$ ; on conclura le côté  $m'F'$  ou la quantité  $p$  qui lui est égale, au moyen de l'équation suivante,

$$(1) \cosinus p = \frac{r \sin. (latitude corrigée du lieu F)}{\cosin. m'P}$$

On connoîtra donc la valeur de  $p$  qu'il faut substituer dans l'équation (1) du §. 52; on évaluera ensuite l'angle  $A$  du §. 51; & l'on aura l'expression de  $P$  en degrés, minutes.

& secondes. On réduira cette valeur en toises, au moyen Fig. 2. de l'équation (3) du §. 52, & le Problème sera résolu.

Nous remarquerons qu'il suit des équations (1), (1) des §. 51 & 54, que dans le cas dont il s'agit, l'angle  $A$  est le complément de l'arc  $p$ .

*Solution de la seconde Question.*

(55.) La seconde question, qui est celle dont on a le plus généralement besoin, présente plus de difficulté. En effet, lorsque l'on connoît le nombre  $T$  de toises que contient l'arc  $P$ , il est facile d'avoir l'expression de cet arc en degrés, minutes & secondes, au moyen de l'équation (3) du §. 52; mais il n'est pas aussi facile de déduire la valeur de  $p$  de celle de  $P$ , au moyen de l'équation (1) du §. 52; car la latitude inconnue du lieu  $F$ , entre dans l'expression de  $P$ . Heureusement les circonstances du Problème permettent d'employer une méthode simple & très-exacte dans la pratique.

Pour me faire entendre, je remarque que dans l'équation (1) du §. 52, la quantité  $\frac{90^\circ - A}{2} + \frac{206265'' \sin. 2A}{4r}$  est multipliée par la fraction très-petite  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\cos. m'P}{r}$ ; il n'est donc pas absolument nécessaire de connoître l'angle  $A$  avec la dernière exactitude, pour avoir avec précision, la correction donnée par le terme  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\cos. m'P}{r} \left( \frac{90^\circ - A}{2} + \frac{206265'' \sin. 2A}{4r} \right)$ ; il suffit d'avoir une connoissance approchée de la latitude corrigée du lieu  $F$ . On considérera donc un triangle sphérique rectangle  $m'PF'$  dont on connoîtra le côté  $m'P$ , & dans lequel on emploiera pour côté  $m'F'$ , l'arc  $P$  du sphéroïde réduit en degrés, minutes & secondes; on conclura par-là l'expression approchée de la latitude corrigée du lieu  $F$ , au moyen de l'équation

$$(1) \sin. (\text{latitude corrigée du lieu } F) = \frac{\cos. m'P \times \cos. P}{2}$$

128 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

C'est la valeur qu'il faut employer dans la détermination de l'angle  $A$ .

Nous remarquerons que si dans l'expression de  $\sin. A$  du §. 51, l'on substitue à  $\sin.$  (latitude corrigée du lieu  $F$ ) l'expression tirée de l'équation précédente, on aura

$$(2) \sin. A = \cos. P.$$

L'angle  $A$  est donc le complément de l'arc  $P$  du sphéroïde; & les résultats seront exacts, aux termes près de l'ordre  $\frac{\Delta^2}{r^2}$ .

E X E M P L E.

Fig. 2. (56.) Je suppose un lieu situé à la distance de 52902 toises de la Méridienne de Paris, prise sur une perpendiculaire à cette Méridienne, du côté de l'Orient; je suppose de plus, que la perpendiculaire qui passe par ce lieu rencontre la Méridienne de Paris, à la distance de 14823 toises du côté du Midi; on demande la valeur de la perpendiculaire corrigée, correspondante à ce lieu!

SOLUTION. Nous avons vu qu'en supposant le rapport des axes de la Terre comme 177 à 178, on a  $m'P = 41^d 34' 58''$ ; donc,  $\log. \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\cos. m'P}{r^2} = -2,4989335$ .

D'ailleurs, puisque  $P = 52902$  toises, & que  $\theta = 56837$  toises, on aura [§. 52, équation (3)]  $P = 0^d 55' 51''$ ;  $A = 89^d 4' 9''$ ;  $2A = 178^d 8' 18''$ ;  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\cos. m'P}{r^2} \left( \frac{90^d - A}{2} + \frac{206265'' \sin. 2A}{4r} \right) = 10'',6$ ; donc [§. 52, équation (1)]

$$p = 55' 51'' - 10'',6 = 55' 40'',4$$

(57.) Lorsque l'on connoitra par les calculs précédens, les valeurs de l'arc  $m'P$  & de  $p$ , on conclura facilement la

latitude corrigée du lieu  $F$ , en remarquant que le complément de cette latitude est l'hypothénuse du triangle rectangle  $m'PF'$ , dans lequel on connoît le côté  $m'P$ , & le côté  $m'F'$  qui est égal à  $p$ ; on aura donc

$$(1) \sin. (\text{latitude corrigée du lieu } F) = \frac{\cos. m'P \times \cos. p}{r}.$$

Dans le cas dont il s'agit, cette latitude sera de  $48^{\text{d}} 24' 30''$ , & par conséquent (5. 20) la latitude vraie sera de  $48^{\text{d}} 34' 7''$ .

(58.) On conclura pareillement la longitude corrigée du lieu  $F$ , en remarquant que cette longitude est égale à l'angle  $P$  du triangle rectangle  $m'PF'$ ; on aura donc

$$(1) \text{tangente (longitude corrigée du lieu } F) = r \times \frac{\text{tang. } p}{\sin. m'P}.$$

Dans le cas dont il s'agit, cette longitude sera de  $1^{\text{d}} 23' 52''$ .

Par de semblables calculs, on trouvera les valeurs suivantes.

*Rapport des axes de la Terre, comme 177 à 178.*

$m'P = 41^{\text{d}} 34' 58''$ ;  $\cos. m'P = \sin. 48^{\text{d}} 25' 2''$ ;  $P = 0^{\text{d}} 55' 51''$ ;  
 $A = 89. 4. 9$ ;  $2A = 178. 8. 18$ ;  $p = 0. 55. 40$ ;  
 Latitude corrigée du lieu  $F$ ..... =  $48^{\text{d}} 24' 30''$ ;  
 Latitude vraie..... =  $48. 34. 7$ .  
 Longitude corrigée..... =  $1. 23. 52$ .

*Rapport des axes de la Terre, comme 200 à 201.*

$m'P = 41^{\text{d}} 33' 52''$ ;  $\cos. m'P = \sin. 48^{\text{d}} 26' 8''$ ;  $P = 0^{\text{d}} 55' 49''$ ;  
 $A = 89. 4. 11$ ;  $2A = 178. 8. 22$ ;  $p = 0. 55. 40$ ;  
 Latitude corrigée du lieu  $F$ ..... =  $48^{\text{d}} 25' 38''$ ;  
 Latitude vraie..... =  $48. 34. 8$ .  
 Longitude corrigée..... =  $1. 23. 54$ .

*Rapport des axes de la Terre, comme 229 à 230.*

$m'P = 41^{\text{d}} 32' 46''$ ;  $\cos. m'P = \sin. 48^{\text{d}} 27' 14''$ ;  $P = 0^{\text{d}} 55' 48''$ ;  
 $A = 89. 4. 12$ ;  $2A = 178. 8. 24$ ;  $p = 0. 55. 39$ ;  
 Latitude corrigée du lieu  $F$ ..... =  $48^{\text{d}} 26' 43''$ ;  
 Latitude vraie..... =  $48. 34. 8$ .  
 Longitude corrigée..... =  $1. 23. 56$ .

*Rapport des axes de la Terre, comme 299 à 300.*

$m'P = 41^{\circ} 31' 1''$ ;  $\cos. m'P = \sin. 48^{\circ} 28' 59''$ ;  $P = 0^{\circ} 55' 46''$ ;  
 $A = 89. 4. 14$ ;  $2A = 178. 8. 28$ ;  $p = 0. 55. 39$ ;  
 Latitude corrigée du lieu  $F. \dots\dots\dots = 48^{\circ} 28' 28''$ ;  
 Latitude vraie  $\dots\dots\dots = 48. 34. 10.$   
 Longitude corrigée  $\dots\dots\dots = 1. 24. 2.$

*Rapport des axes de la Terre, comme 1 à 1.*

$m'P = 41^{\circ} 25' 21''$ ;  $P = p = 0^{\circ} 55' 37''$ ;  
 Latitude du lieu  $F. \dots\dots\dots = 48^{\circ} 34' 10''$ ;  
 Longitude du lieu  $F. \dots\dots\dots = 1. 24. 5.$

Quelque facile qu'il soit d'exécuter dans tous les cas, les calculs prescrits, il est cependant possible de diminuer ce travail, au moyen des Tables par lesquelles je terminerai cette section. On parviendra par-là, presque sans calcul, aux résultats cherchés; mais je dois auparavant estimer l'erreur des termes négligés dans la formule du §. 52.

*Estimation de l'erreur du terme négligé dans la formule du §. 52.*

(59.) Il est facile d'apprécier l'erreur de la formule du §. 52; en effet, il est aisé de voir que nous avons négligé le terme  $\frac{1}{8} \frac{\Delta^4 x^3}{r^7} \int \frac{x^4 dx}{x^3 \sqrt{(x'^2 - x^2)}}$ , qui, en conservant la définition de  $X$  du §. 49, a pour intégrale

$$\frac{1}{8} \frac{\Delta^4 x^3}{r^7} \left\{ -\frac{1}{4} \frac{x^3 \sqrt{(x'^2 - x^2)}}{x'} + \frac{3}{4} \left[ -\frac{1}{2} \frac{x \sqrt{(x'^2 - x^2)}}{x'} + \frac{1}{2} X \right] - \text{const.} \right\},$$

ou plutôt, en faisant usage des remarques des §. 50, 51, 52, &c en ajoutant convenablement la constante,

$$= \frac{1}{32} \frac{\Delta^4}{r^4} \times \frac{\cos. m'P}{r^4} \left[ \frac{1}{2} (90^{\circ} - A) + \frac{206265'' \sin. 2A}{r} - \frac{206265'' \sin. 4A}{8r} \right].$$

Mais le terme précédent n'étant que le développement de la quantité  $\frac{1}{8} \frac{\Delta^4 x^3}{r^7} \int \frac{x^4 dx}{x^3 \sqrt{(x'^2 - x^2)}}$ , la supposition qui donne

donne le *maximum* du terme, sera évidemment  $x = 0$ . Mais (S. 51)  $x = \sin. (\text{latitude corrigée du lieu } F)$ ; de plus,  $\sin. A = \frac{r \sin. (\text{latitude corrigée du lieu } F)}{\cosinus m'P}$ ; donc le *maximum* de l'erreur de la méthode a lieu lorsque  $A = 0$ , &  $\sin. A = 0$ . L'expression du terme négligé se réduit alors à  $\frac{3}{64} \frac{\Delta^2}{r^2} \frac{\cosinus^2 m'P}{r^2} \text{ arc } 90^d$ ; ou enfin, à  $\frac{3}{64} \frac{\Delta^2}{r^2} \times \text{arc } 90^d$ , dans le cas où  $\cosinus m'P$  auroit la plus grande valeur. Si l'on substitue des nombres dans cette dernière expression, on aura 2 secondes pour le *maximum* d'erreur de la méthode; le terme en question peut donc toujours être négligé.

Il est aisé de voir que l'expression du *maximum* de l'erreur de la méthode, est précisément la même que celle que nous avons trouvée (S. 43) pour l'erreur sur l'arc de  $90^d$  du cercle inscrit; la raison en est simple; lorsque  $\cosinus m'P = r$ , la perpendiculaire sur le sphéroïde est évidemment un des Méridiens du sphéroïde, & la perpendiculaire corrigée est le cercle inscrit; ces deux Problèmes sont donc alors identiques. Passons à la construction des Tables.

### Construction des TABLES.

(60.) Ces Tables seront de deux espèces; j'évaluerai d'abord, pour chacune des hypothèses d'excentricité de la Terre que j'ai considérées, & pour chacune des valeurs de  $m'P$ , depuis  $36^d$  jusqu'à  $50^d$ , les valeurs correspondantes de  $\log. \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\cosinus^2 m'P}{r^2}$ ; ces valeurs seront données de demi-degré en demi-degré. Je donnerai ensuite une autre Table qui contiendra les valeurs de  $\frac{90^d - A}{2} + \frac{206265'' \sin. A}{47}$ , en supposant que  $A$  varie depuis  $90^d$  jusqu'à  $80^d$ . Ces suppositions sont plus que suffisantes pour résoudre les Problèmes que nous considérerons.

Mém. 1778.

R



TABLE des Logarithmes de  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\cosin.^2 m'P}{r^2}$  pour les quatre hypothèses de rappor des axes de la Terre.

VALEURS de $m'P$ .	Logarithmes de $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\cosin.^2 m'P}{r^2}$ .			
	RAPPORT des AXES comme 177 à 178.	RAPPORT des AXES comme 200 à 201.	RAPPORT des AXES comme 229 à 230.	RAPPORT des AXES comme 299 à 300.
36. 0'	— 2,4308000	— 2,4836000	— 2,5411000	— 2,6603000
36. 20	— 2,4345000	— 2,4873000	— 2,5448000	— 2,6640000
36. 40	— 2,4382000	— 2,4910000	— 2,5485000	— 2,6678000
37. 0	— 2,4420000	— 2,4948000	— 2,5523000	— 2,6716000
37. 20	— 2,4459000	— 2,4986000	— 2,5561000	— 2,6754000
37. 40	— 2,4498000	— 2,5025000	— 2,5600000	— 2,6793000
38. 0	— 2,4537000	— 2,5064000	— 2,5640000	— 2,6832000
38. 20	— 2,4577000	— 2,5104000	— 2,5680000	— 2,6872000
38. 40	— 2,4617000	— 2,5144000	— 2,5720000	— 2,6912000
39. 0	— 2,4657000	— 2,5184000	— 2,5760000	— 2,6952000
39. 20	— 2,4698000	— 2,5226000	— 2,5801000	— 2,6993000
39. 40	— 2,4740000	— 2,5268000	— 2,5843000	— 2,7035000
40. 0	— 2,4782000	— 2,5310000	— 2,5885000	— 2,7077000
40. 20	— 2,4825000	— 2,5353000	— 2,5928000	— 2,7120000
40. 40	— 2,4868000	— 2,5396000	— 2,5971000	— 2,7163000
41. 0	— 2,4912000	— 2,5439000	— 2,6015000	— 2,7207000
41. 20	— 2,4957000	— 2,5483000	— 2,6059000	— 2,7251000
41. 40	— 2,5002000	— 2,5528000	— 2,6104000	— 2,7296000
42. 0	— 2,5046000	— 2,5573000	— 2,6149000	— 2,7341000
42. 20	— 2,5092000	— 2,5619000	— 2,6195000	— 2,7387000
42. 40	— 2,5138000	— 2,5665000	— 2,6241000	— 2,7433000
43. 0	— 2,5185000	— 2,5712000	— 2,6288000	— 2,7480000
43. 20	— 2,5233000	— 2,5760000	— 2,6335000	— 2,7528000
43. 40	— 2,5281000	— 2,5808000	— 2,6383000	— 2,7576000
44. 0	— 2,5329000	— 2,5856000	— 2,6431000	— 2,7624000
44. 20	— 2,5379000	— 2,5905000	— 2,6481000	— 2,7673000
44. 40	— 2,5429000	— 2,5955000	— 2,6531000	— 2,7723000
45. 0	— 2,5479000	— 2,6005000	— 2,6581000	— 2,7773000
45. 20	— 2,5530000	— 2,6056000	— 2,6632000	— 2,7824000
45. 40	— 2,5581000	— 2,6107000	— 2,6683000	— 2,7875000
46. 0	— 2,5633000	— 2,6159000	— 2,6735000	— 2,7927000
46. 20	— 2,5685000	— 2,6212000	— 2,6788000	— 2,7980000
46. 40	— 2,5738000	— 2,6265000	— 2,6841000	— 2,8033000
47. 0	— 2,5792000	— 2,6319000	— 2,6895000	— 2,8087000
47. 20	— 2,5847000	— 2,6374000	— 2,6950000	— 2,8142000
47. 40	— 2,5902000	— 2,6429000	— 2,7005000	— 2,8197000
48. 0	— 2,5958000	— 2,6484000	— 2,7060000	— 2,8252000
48. 20	— 2,6014000	— 2,6540000	— 2,7117000	— 2,8309000
48. 40	— 2,6071000	— 2,6598000	— 2,7174000	— 2,8366000
49. 0	— 2,6128000	— 2,6656000	— 2,7232000	— 2,8424000
49. 20	— 2,6187000	— 2,6715000	— 2,7291000	— 2,8483000
49. 40	— 2,6246000	— 2,6774000	— 2,7350000	— 2,8542000
50. 0	— 2,6306000	— 2,6833000	— 2,7409000	— 2,8601000

TABLE des valeurs de  $\frac{90^\circ - A}{2} + \frac{206265'' \sin. 2A}{4}$   
correspondantes aux différentes valeurs de A.

VALEURS de A.	VALEURS correspondantes.	VALEURS de A.	VALEURS correspond.	VALEURS de A.	VALEURS correspond.
90 <sup>d</sup> 0'	0"	86 <sup>d</sup> 40'	11985"	83 <sup>d</sup> 20'	23892"
89. 55	300	86. 35	12284	83. 15	24188
89. 50	600	86. 30	12583	83. 10	24484
89. 45	900	86. 25	12882	83. 5	24780
89. 40	1200	86. 20	13181	83. 0	25075
89. 35	1500	86. 15	13480	82. 55	25370
89. 30	1800	86. 10	13779	82. 50	25665
89. 25	2100	86. 5	14078	82. 45	25960
89. 20	2400	86. 0	14377	82. 40	26255
89. 15	2700	85. 55	14676	82. 35	26550
89. 10	3000	85. 50	14974	82. 30	26845
89. 5	3300	85. 45	15272	82. 25	27140
89. 0	3600	85. 40	15570	82. 20	27435
88. 55	3900	85. 35	15868	82. 15	27730
88. 50	4200	85. 30	16166	82. 10	28025
88. 45	4500	85. 25	16464	82. 5	28320
88. 40	4799	85. 20	16763	82. 0	28615
88. 35	5099	85. 15	17061	81. 55	28909
88. 30	5399	85. 10	17359	81. 50	29203
88. 25	5699	85. 5	17657	81. 45	29497
88. 20	5998	85. 0	17955	81. 40	29790
88. 15	6298	84. 55	18253	81. 35	30083
88. 10	6598	84. 50	18551	81. 30	30376
88. 5	6898	84. 45	18849	81. 25	30669
88. 0	7197	84. 40	19146	81. 20	30962
87. 55	7497	84. 35	19444	81. 15	31255
87. 50	7796	84. 30	19741	81. 10	31548
87. 45	8096	84. 25	20038	81. 5	31841
87. 40	8395	84. 20	20335	81. 0	32134
87. 35	8695	84. 15	20632	80. 55	32426
87. 30	8994	84. 10	20929	80. 50	32718
87. 25	9294	84. 5	21226	80. 45	33010
87. 20	9593	84. 0	21522	80. 40	33302
87. 15	9893	83. 55	21819	80. 35	33594
87. 10	10192	83. 50	22116	80. 30	33886
87. 5	10491	83. 45	22412	80. 25	34178
87. 0	10790	83. 40	22708	80. 20	34470
86. 55	11089	83. 35	23004	80. 15	34762
86. 50	11388	83. 30	23300	80. 10	35053
86. 45	11686	83. 25	23596	80. 5	35344
86. 40	11985	83. 20	23892	80. 0	35635

On remarquera, que pour avoir les valeurs intermédiaires de  $\frac{90^\circ - A}{2} + \frac{206265'' \sin. 2A}{4r}$ , correspondantes aux angles  $A$  qui ne se trouvent pas précisément dans la Table, on soustraira autant de secondes du résultat, que le véritable angle  $A$  pour lequel on calculera, surpassera l'angle  $A$  dont on aura pris la valeur correspondante dans la Table.

(61.) L'usage des Tables précédentes est facile à concevoir. Supposons, par exemple, que par une suite de calculs on trouve pour valeur de  $A$ ,  $A = 86^\circ 51' 10''$ ; je cherche dans la Table, la valeur de  $\frac{90^\circ - A}{2} + \frac{206265'' \sin. 2A}{4r}$ , correspondante à la valeur de  $A = 86^\circ 51' 10''$ ; je ne trouve pas exactement cette valeur, mais je vois que celle qui répond à  $86^\circ 50'$  est de  $11388''$ ; je soustrais  $70''$  de cette valeur, conformément à la remarque du *paragraphe précédent*; & j'ai pour la valeur cherchée  $11318''$ ; j'écris le logarithme de cette quantité; j'en soustrais le logarithme de  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\cosin. 2P}{r^2}$  qui convient au Problème; j'ai alors le nombre de secondes qu'il faut soustraire de l'arc  $P$  pour en conclure l'arc  $p$ ; ou qu'il faut ajouter à l'arc  $p$ , pour en conclure l'arc  $P$ .

*Nouvelle forme que l'on peut donner à la formule du §. 52, & aux Tables du §. 60.*

(62.) Quoique la formule du §. 52 & les Tables du §. 60, aient toute la généralité & toute la simplicité dont elles sont susceptibles, j'ai pensé cependant que le Lecteur verroit avec plaisir la nouvelle forme que l'on peut donner soit à cette formule, soit à ces Tables. Voici sur quoi sont fondées ces nouvelles considérations.

Fig. 4. Si l'on jette les yeux sur l'équation (1) du §. 52, on verra facilement que  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \left( \frac{90^\circ - A}{2} + \frac{206265'' \sin. 2A}{4r} \right)$  est la différence entre l'arc  $PM$  de l'ellipse & l'arc correspondant  $Pm$ .

du cercle inscrit. L'origine des deux arcs est au point,  $P$  Fig. 4. sommet du petit axe de l'ellipse; & j'entends par l'arc correspondant du cercle inscrit, celui qui est déterminé sur ce cercle, par l'intersection  $m$  du cercle, avec l'ordonnée  $HM$  menée par l'extrémité  $M$  de l'arc  $PM$  de l'ellipse.

Pour s'en convaincre, je reprends l'équation (2) du §. 28,

$$(1) k - K + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \left[ \frac{k}{2} - \frac{206265'' \cos.(2a+k) \sin.k}{2r^2} \right] = 0.$$

Dans cette équation,  $K$  est l'arc de l'ellipse;  $k$  est l'arc correspondant du cercle inscrit;  $a$  est la distance du point  $G'$  pris sur l'extrémité du grand axe, à l'origine des arcs  $k, K$ . Supposons que l'on veuille prendre le sommet  $P$  du petit axe de l'ellipse, pour cette origine; on aura  $a = 90^d$ ;  $2a + k = 180^d + k$ ;  $\cos.(2a + k) = \cos.(180^d + k) = -\cos.k$ ; donc  $\frac{\cos.(2a+k) \sin.k}{2r^2} = \frac{\cos.k \sin.k}{2r^2} = \frac{\sin.2k}{4r}$ ; & l'équation (1) deviendra

$$(2) k - K + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \left( \frac{k}{2} + \frac{206265'' \sin.2k}{4r} \right) = 0.$$

Maintenant, nommons  $A$  le complément de l'arc  $k$ ; l'équation (2) deviendra

$$(3) k - K + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \left[ \frac{90^d - A}{2} + \frac{206265'' \sin.(180^d - 2A)}{4r} \right] = 0;$$

ou à cause de  $\sin.(180^d - 2A) = \sin.2A$ ,

$$(4) k - K + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \left( \frac{90^d - A}{2} + \frac{206265'' \sin.2A}{4r} \right) = 0;$$

$$\text{donc } \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \left( \frac{90^d - A}{2} + \frac{206265'' \sin.2A}{4r} \right) = K - k.$$

Cette remarque fait voir que si l'on nomme

$\gamma$  l'excès de l'arc de l'ellipse sur l'arc correspondant du cercle inscrit, la formule (1) du §. 52 pourra être mise sous la forme suivante,

$$(5) P - p - \frac{\cosin.^2 m' P}{r^2} \gamma = 0.$$

Cette équation se résoudra avec la dernière facilité, au moyen des Tables que nous allons donner.

234 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

TABLE des Différences entre les arcs de l'Ellipse & les arcs correspondans du cercle inscrit, en supposant les axes de la Terre dans le rapport de 177 à 178.

ARCS.	DIFFÉRENCES.		ARCS.	DIFFÉRENCES.		ARCS.	DIFFÉRENCES.	
	1. <sup>re</sup>	2. <sup>e</sup>		1. <sup>re</sup>	2. <sup>e</sup>		1. <sup>re</sup>	2. <sup>e</sup>
0 <sup>d</sup> 0'	0"		30 <sup>d</sup> 0'	559 <sup>s</sup> ,0		60 <sup>d</sup> 0'	865 <sup>s</sup> ,1	
1. 0	20,4	20,4	31. 0	574,1	15,1	61. 0	870,2	5,1
2. 0	40,8	20,4	32. 0	588,9	14,8	62. 0	875,0	4,8
3. 0	61,2	20,4	33. 0	603,4	14,5	63. 0	879,4	4,4
4. 0	81,6	20,4	34. 0	617,6	14,2	64. 0	883,4	4,0
5. 0	101,9	20,3	35. 0	631,5	13,9	65. 0	887,0	3,6
6. 0	122,1	20,2	36. 0	645,1	13,6	66. 0	890,3	3,3
7. 0	142,2	20,1	37. 0	658,3	13,2	67. 0	893,3	3,0
8. 0	162,2	20,0	38. 0	671,1	12,8	68. 0	896,1	2,8
9. 0	182,1	19,9	39. 0	683,6	12,5	69. 0	898,7	2,6
10. 0	201,9	19,8	40. 0	695,7	12,1	70. 0	901,1	2,4
11. 0	221,6	19,7	41. 0	707,5	11,8	71. 0	903,3	2,2
12. 0	241,2	19,6	42. 0	718,9	11,4	72. 0	905,4	2,1
13. 0	260,7	19,5	43. 0	730,0	11,1	73. 0	907,4	2,0
14. 0	280,0	19,3	44. 0	740,7	10,7	74. 0	909,3	1,9
15. 0	299,1	19,1	45. 0	751,0	10,3	75. 0	911,0	1,7
16. 0	318,0	18,9	46. 0	761,0	10,0	76. 0	912,5	1,5
17. 0	336,7	18,7	47. 0	770,7	9,7	77. 0	913,8	1,3
18. 0	355,3	18,6	48. 0	780,1	9,4	78. 0	914,9	1,1
19. 0	373,7	18,4	49. 0	789,1	9,0	79. 0	915,8	0,9
20. 0	391,9	18,2	50. 0	797,7	8,6	80. 0	916,5	0,7
21. 0	409,9	18,0	51. 0	805,9	8,2	81. 0	917,0	0,5
22. 0	427,6	17,7	52. 0	813,8	7,9	82. 0	917,3	0,3
23. 0	445,0	17,4	53. 0	821,3	7,5	83. 0	917,5	0,2
24. 0	462,1	17,1	54. 0	828,4	7,1	84. 0	917,6	0,1
25. 0	478,9	16,8	55. 0	835,2	6,8	85. 0	917,7	0,1
26. 0	495,4	16,5	56. 0	841,7	6,5	86. 0	917,8	0,1
27. 0	511,7	16,3	57. 0	848,0	6,3	87. 0	917,9	0,1
28. 0	527,8	16,1	58. 0	854,0	6,0	88. 0	917,9	0,0
29. 0	543,6	15,8	59. 0	859,7	5,7	89. 0	917,9	0,0
30. 0	559,0	15,4	60. 0	865,1	5,4	90. 0	917,9	0,0

*TABLE des Différences entre les arcs de l'Ellipse & les arcs correspondans du cercle inscrit, en supposant les axes de la Terre dans le rapport de 200 à 201.*

ARCS.	DIFFÉRENCES.		ARCS.	DIFFÉRENCES.		ARCS.	DIFFÉRENCES.	
	1. <sup>tes</sup>	2. <sup>es</sup>		1. <sup>tes</sup>	2. <sup>es</sup>		1. <sup>tes</sup>	2. <sup>es</sup>
0 <sup>d</sup> 0'	0"		30 <sup>d</sup> 0'	495 <sup>u</sup> ,1		60 <sup>d</sup> 0'	766 <sup>u</sup> ,4	
1. 0	18,1	18 <sup>u</sup> ,1	31. 0	508,6	13 <sup>u</sup> ,5	61. 0	770,8	4 <sup>u</sup> ,4
2. 0	36,1	18 <sup>u</sup> ,0	32. 0	521,8	13 <sup>u</sup> ,2	62. 0	774,9	4 <sup>u</sup> ,1
3. 0	54,1	18 <sup>u</sup> ,0	33. 0	534,7	12 <sup>u</sup> ,9	63. 0	778,7	3 <sup>u</sup> ,8
4. 0	72,1	18 <sup>u</sup> ,0	34. 0	547,2	12 <sup>u</sup> ,5	64. 0	782,2	3 <sup>u</sup> ,5
5. 0	90,1	18 <sup>u</sup> ,0	35. 0	559,5	12 <sup>u</sup> ,2	65. 0	785,4	3 <sup>u</sup> ,2
6. 0	108,0	17 <sup>u</sup> ,9	36. 0	571,4	11 <sup>u</sup> ,9	66. 0	788,3	2 <sup>u</sup> ,9
7. 0	125,9	17 <sup>u</sup> ,9	37. 0	583,1	11 <sup>u</sup> ,7	67. 0	791,0	2 <sup>u</sup> ,7
8. 0	143,7	17 <sup>u</sup> ,8	38. 0	594,5	11 <sup>u</sup> ,4	68. 0	793,5	2 <sup>u</sup> ,5
9. 0	161,4	17 <sup>u</sup> ,7	39. 0	605,5	11 <sup>u</sup> ,0	69. 0	795,9	2 <sup>u</sup> ,4
10. 0	179,0	17 <sup>u</sup> ,6	40. 0	616,1	10 <sup>u</sup> ,6	70. 0	798,2	2 <sup>u</sup> ,3
11. 0	196,5	17 <sup>u</sup> ,5	41. 0	626,5	10 <sup>u</sup> ,4	71. 0	800,4	2 <sup>u</sup> ,2
12. 0	213,7	17 <sup>u</sup> ,2	42. 0	636,6	10 <sup>u</sup> ,1	72. 0	802,5	2 <sup>u</sup> ,1
13. 0	230,8	17 <sup>u</sup> ,1	43. 0	646,5	9 <sup>u</sup> ,9	73. 0	804,4	1 <sup>u</sup> ,9
14. 0	247,8	17 <sup>u</sup> ,0	44. 0	656,1	9 <sup>u</sup> ,6	74. 0	806,0	1 <sup>u</sup> ,6
15. 0	264,7	16 <sup>u</sup> ,9	45. 0	665,4	9 <sup>u</sup> ,3	75. 0	807,3	1 <sup>u</sup> ,3
16. 0	281,5	16 <sup>u</sup> ,8	46. 0	674,3	8 <sup>u</sup> ,9	76. 0	808,4	1 <sup>u</sup> ,1
17. 0	298,2	16 <sup>u</sup> ,7	47. 0	682,8	8 <sup>u</sup> ,5	77. 0	809,4	1 <sup>u</sup> ,0
18. 0	314,8	16 <sup>u</sup> ,6	48. 0	691,0	8 <sup>u</sup> ,2	78. 0	810,3	0 <sup>u</sup> ,9
19. 0	331,2	16 <sup>u</sup> ,4	49. 0	698,9	7 <sup>u</sup> ,9	79. 0	811,0	0 <sup>u</sup> ,7
20. 0	347,4	16 <sup>u</sup> ,2	50. 0	706,5	7 <sup>u</sup> ,6	80. 0	811,6	0 <sup>u</sup> ,6
21. 0	363,3	15 <sup>u</sup> ,9	51. 0	713,7	7 <sup>u</sup> ,2	81. 0	812,0	0 <sup>u</sup> ,4
22. 0	378,9	15 <sup>u</sup> ,6	52. 0	720,6	6 <sup>u</sup> ,9	82. 0	812,3	0 <sup>u</sup> ,3
23. 0	394,1	15 <sup>u</sup> ,2	53. 0	727,2	6 <sup>u</sup> ,6	83. 0	812,5	0 <sup>u</sup> ,2
24. 0	409,1	15 <sup>u</sup> ,0	54. 0	733,6	6 <sup>u</sup> ,4	84. 0	812,6	0 <sup>u</sup> ,1
25. 0	424,0	14 <sup>u</sup> ,9	55. 0	739,7	6 <sup>u</sup> ,1	85. 0	812,7	0 <sup>u</sup> ,1
26. 0	438,7	14 <sup>u</sup> ,7	56. 0	745,6	5 <sup>u</sup> ,9	86. 0	812,8	0 <sup>u</sup> ,1
27. 0	453,2	14 <sup>u</sup> ,5	57. 0	751,2	5 <sup>u</sup> ,6	87. 0	812,9	0 <sup>u</sup> ,1
28. 0	467,4	14 <sup>u</sup> ,2	58. 0	756,5	5 <sup>u</sup> ,3	88. 0	812,9	0 <sup>u</sup> ,0
29. 0	481,4	14 <sup>u</sup> ,0	59. 0	761,6	5 <sup>u</sup> ,1	89. 0	812,9	0 <sup>u</sup> ,0
30. 0	495,1	13 <sup>u</sup> ,7	60. 0	766,4	4 <sup>u</sup> ,8	90. 0	812,9	0 <sup>u</sup> ,0

TABLE des Différences entre les arcs de l'Ellipse & les arcs  
correspondans du cercle inscrit, en supposant les axes de la  
Terre dans le rapport de 229 à 230.

ARCS.	DIFFÉRENCES.		ARCS.	DIFFÉRENCES.		ARCS.	DIFFÉRENCES.	
	1. <sup>res</sup>	2. <sup>es</sup>		1. <sup>res</sup>	2. <sup>es</sup>		1. <sup>res</sup>	2. <sup>es</sup>
0 <sup>d</sup> 0'	0"	15,9	30 <sup>d</sup> 0'	433,7"	11,8	60 <sup>d</sup> 0'	671,3"	3,8
1. 0	15,9	15,9	31. 0	455,5	11,5	61. 0	675,1	3,6
2. 0	31,8	15,8	32. 0	457,0	11,3	62. 0	678,7	3,4
3. 0	47,6	15,8	33. 0	468,3	11,1	63. 0	682,1	3,1
4. 0	63,4	15,8	34. 0	479,4	10,8	64. 0	685,2	2,8
5. 0	79,2	15,7	35. 0	490,2	10,4	65. 0	688,0	2,6
6. 0	94,9	15,6	36. 0	500,6	10,0	66. 0	690,6	2,4
7. 0	110,5	15,5	37. 0	510,6	9,8	67. 0	693,0	2,3
8. 0	126,0	15,4	38. 0	520,4	9,6	68. 0	695,3	2,2
9. 0	141,4	15,3	39. 0	530,0	9,4	69. 0	697,5	2,0
10. 0	156,7	15,2	40. 0	539,4	9,2	70. 0	699,5	1,8
11. 0	171,9	15,0	41. 0	548,6	8,7	71. 0	701,3	1,6
12. 0	187,0	14,9	42. 0	557,6	8,4	72. 0	702,9	1,5
13. 0	202,0	14,9	43. 0	566,3	8,0	73. 0	704,4	1,3
14. 0	216,9	14,8	44. 0	574,7	7,6	74. 0	705,7	1,2
15. 0	231,8	14,7	45. 0	582,7	7,3	75. 0	706,9	1,0
16. 0	246,6	14,5	46. 0	590,3	7,1	76. 0	707,9	0,9
17. 0	261,3	14,2	47. 0	597,6	6,9	77. 0	708,8	0,7
18. 0	275,8	14,1	48. 0	604,7	6,6	78. 0	709,5	0,6
19. 0	290,0	13,9	49. 0	611,6	6,4	79. 0	710,1	0,5
20. 0	304,1	13,7	50. 0	618,2	6,1	80. 0	710,6	0,4
21. 0	318,0	13,5	51. 0	624,6	5,9	81. 0	711,0	0,3
22. 0	331,7	13,3	52. 0	630,7	5,7	82. 0	711,3	0,2
23. 0	345,2	13,1	53. 0	636,6	5,5	83. 0	711,5	0,2
24. 0	358,5	12,8	54. 0	642,3	5,3	84. 0	711,7	0,1
25. 0	371,6	12,6	55. 0	647,8	5,0	85. 0	711,8	0,1
26. 0	384,4	12,5	56. 0	653,1	4,7	86. 0	711,9	0,0
27. 0	397,0	12,2	57. 0	658,1	4,4	87. 0	712,0	0,0
28. 0	409,5	12,0	58. 0	662,8	4,1	88. 0	712,0	0,0
29. 0	421,7		59. 0	667,2		89. 0	712,0	0,0
30. 0	433,7		60. 0	671,3		90. 0	712,0	0,0

TABLE

TABLE des Différences entre les arcs de l'Ellipse & les arcs correspondans du cercle inscrit, en supposant les axes de la Terre dans le rapport de 299 à 300.

ARCS.	DIFFÉRENCES.		ARCS.	DIFFÉRENCES.		ARCS.	DIFFÉRENCES.	
	1. <sup>re</sup>	2. <sup>es</sup>		1. <sup>re</sup>	2. <sup>es</sup>		1. <sup>re</sup>	2. <sup>es</sup>
0 <sup>d</sup> 0'	0"		30 <sup>d</sup> 0'	329",7	8",9	60 <sup>d</sup> 0'	510",1	3",0
1. 0	12,0	12",0	31. 0	338,6	8,7	61. 0	513,1	2,8
2. 0	24,0	12,0	32. 0	347,3	8,5	62. 0	515,9	2,5
3. 0	36,0	12,0	33. 0	355,8	8,3	63. 0	518,4	2,3
4. 0	48,0	12,0	34. 0	364,1	8,1	64. 0	520,7	2,0
5. 0	60,0	12,0	35. 0	372,2	7,9	65. 0	522,7	1,9
6. 0	72,0	11,9	36. 0	380,1	7,7	66. 0	524,6	1,8
7. 0	83,9	11,8	37. 0	387,8	7,5	67. 0	526,4	1,7
8. 0	95,7	11,7	38. 0	395,3	7,4	68. 0	528,1	1,6
9. 0	107,4	11,6	39. 0	402,7	7,2	69. 0	529,7	1,5
10. 0	119,0	11,5	40. 0	409,9	7,0	70. 0	531,2	1,4
11. 0	130,6	11,4	41. 0	416,9	6,8	71. 0	532,6	1,3
12. 0	142,1	11,3	42. 0	423,7	6,6	72. 0	533,9	1,2
13. 0	153,6	11,2	43. 0	430,3	6,3	73. 0	535,1	1,1
14. 0	165,0	11,0	44. 0	436,6	6,1	74. 0	536,2	1,0
15. 0	176,3	10,9	45. 0	442,7	5,9	75. 0	537,2	0,9
16. 0	187,5	10,8	46. 0	448,6	5,7	76. 0	538,1	0,7
17. 0	198,5	10,7	47. 0	454,3	5,5	77. 0	538,8	0,6
18. 0	209,4	10,6	48. 0	459,8	5,3	78. 0	539,4	0,5
19. 0	220,2	10,5	49. 0	465,1	5,1	79. 0	539,9	0,4
20. 0	230,9	10,3	50. 0	470,2	4,9	80. 0	540,3	0,3
21. 0	241,5	10,1	51. 0	475,1	4,7	81. 0	540,6	0,2
22. 0	252,0	9,9	52. 0	479,8	4,5	82. 0	540,8	0,1
23. 0	262,3	9,8	53. 0	484,3	4,2	83. 0	540,9	0,1
24. 0	272,4	9,7	54. 0	488,5	4,0	84. 0	541,0	0,0
25. 0	282,3	9,5	55. 0	492,5	3,8	85. 0	541,0	0,0
26. 0	292,1	9,3	56. 0	496,3	3,7	86. 0	541,0	0,0
27. 0	301,8	9,1	57. 0	500,0	3,5	87. 0	541,0	0,0
28. 0	311,3	9,0	58. 0	503,5	3,4	88. 0	541,0	0,0
29. 0	320,6	8,9	59. 0	506,9	3,2	89. 0	541,0	0,0
30. 0	329,7		60. 0	510,1		90. 0	541,0	



Au moyen des Tables précédentes, étant donné l'arc de l'ellipse, on conclura facilement l'arc correspondant du cercle inscrit; & réciproquement. On remarquera que si l'arc de l'ellipse est donné, il faudra soustraire la différence calculée dans les Tables, pour avoir l'arc du cercle inscrit. Ce seroit le contraire si l'arc du cercle inscrit étoit donné.

Quoique les Tables précédentes ne donnent les différences entre les arcs de l'ellipse & les arcs correspondans du cercle inscrit, que de degrés en degrés, il est cependant facile d'en conclure les différences pour les quantités intermédiaires. Afin de faciliter cette opération, nous avons ajouté les différences secondes, qui ne sont autre chose que la variation des différences, correspondante à un degré. Au moyen de cette colonne, une simple proportion fera facilement connoître les quantités intermédiaires.

Fig. 4. (63.) Non-seulement on peut conclure de ces Tables, les différences entre les arcs  $PM$ ,  $pm$  de l'ellipse & du cercle inscrit, qui ont leur origine au sommet  $P$  du petit axe de l'ellipse; on peut avoir également la différence entre deux arcs correspondans quelconques  $MM'$ ,  $mm'$  de l'ellipse & du cercle inscrit, dont l'origine ne seroit pas au point  $P$ . Cette différence est égale à la différence des arcs  $PM'$ ,  $pm'$ , moins la différence des arcs  $PM$ ,  $pm$ . Ces remarques trouveront leur application dans la suite de cet Ouvrage.

*Application des principes précédens, à l'exemple du §. 56.*

(64.) Rien de plus simple que d'appliquer les Tables du §. 60, à l'exemple du §. 56: en effet, nous avons vu que dans ce cas,  $m'P = 41^d 34' 58''$ ;  $P = 0^d 55' 51''$ ;  $A = 89^d 4' 9''$ . Dans la seconde Table du §. 60, je vois que la valeur de  $\frac{90^d - A}{2} + \frac{206265'' \sin. 2A}{47}$  qui convient à  $89^d$  est de  $3600''$ . De cette quantité, je soustrais  $249''$ , conformément à la remarque qui est à la suite de ces Tables; j'ai

donc pour valeur cherchée  $3600'' - 249'' = 3351''$ . Je prends le logarithme de  $3351'' = 3,5251744$ ; je vois ensuite dans la première Table, que le logarithme correspondant à  $m'P$ , qui satisfait au Problème,  $= -2,5002000$  (car on peut se servir sans erreur appréciable du logarithme le plus prochain qui se trouve dans la Table); je soustrais ce logarithme de celui de  $3351''$ , & j'ai, comme dans l'exemple du §. 56,  $10'',6$ : c'est le nombre qu'il faut soustraire de  $P$  pour avoir  $p$ ; on aura donc  $p = 55' 51'' - 10'',6 = 55' 40'',4$ .

(65.) On pourroit appliquer au même exemple, les Tables du §. 62. Dans ce cas, on chercheroit dans la première Table, la différence entre l'arc de l'ellipse & l'arc du cercle inscrit qui répond (§. 55) à l'arc  $P$ ; c'est-à-dire à l'arc de  $55' 51''$ . Quoique cette différence ne se trouve pas précisément dans la Table; comme je vois que cette différence est de  $20'',4$  lorsque l'arc est de 1 degré, & que la variation est de  $20'',4$  pour 1 degré; j'en conclus que cette variation est d'environ  $0'',34$  pour une minute, & que par conséquent la différence qui répond à l'arc de  $55' 51''$ , est de  $20'',4 - 1'',36 = 19'',04$ ; je prends le logarithme de  $19'',04$ , j'ajoute le logarithme de  $\frac{\cos m'P}{r}$ , & j'ai, comme ci-dessus,  $p = 55' 51'' - 10'',6 = 55' 40'',4$ .

## SEPTIÈME SECTION.

*Des changemens qu'il faut faire à la solution précédente, lorsque la ligne que l'on considère n'est pas perpendiculaire à la Méridienne, au point de départ.*

(66.) Dans la solution précédente, nous avons supposé que la ligne dont il s'agit, étoit perpendiculaire à la Méridienne au point de départ; il est question maintenant de faire voir quel changement l'on doit faire à cette solution,

lorsque la ligne n'est pas perpendiculaire à la Méridienne, au point de départ.

Soit

$D$  l'angle que fait la ligne en question, avec la Méridienne, au point de départ,

& conservons toutes les définitions des §. 47 & suivans ; on aura pour équation à la droite dont il s'agit, sur le sphéroïde,

$$(1) Y^2 du - \sqrt{Y^2 du^2 + r^2 dx^2 + r^2 dY^2} \frac{Y' \sin. D}{r} = 0,$$

& pour équation au grand cercle correspondant sur la sphère inscrite,

$$(2) y^2 dv^2 - \sqrt{y^2 dv^2 + r^2 dx^2 + r^2 dy^2} \frac{y' \sin. D}{r}.$$

D'ailleurs, les équations (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9) & (10) ne changeront point; d'où l'on voit, que par une analyse entièrement semblable à celle que nous avons suivie dans le §. 48, au lieu des équations (10) & (11), de ce paragraphe, on parviendra aux équations suivantes,

$$(3) P + \text{constante} = p - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \int \frac{x^2 dx}{r \sqrt{r^2 - \frac{y'^2 \sin.^2 D}{r^2} - x^2}};$$

ou enfin

$$(4) P + \text{const.} = p - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \frac{\sqrt{r^2 - \frac{y'^2 \sin.^2 D}{r^2}}}{r} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{r^2 - \frac{y'^2 \sin.^2 D}{r^2}} \sqrt{r^2 - \frac{y'^2 \sin.^2 D}{r^2} - x^2}}.$$

Soit un cercle dont le rayon  $= r'$ ; nous supposons d'ailleurs, que

$$(5) r' = \sqrt{r^2 - \frac{y'^2 \sin.^2 D}{r^2}}.$$

L'équation (4) du paragraphe précédent, deviendra

$$(6) P + \text{constante} = p - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2 r'}{r^2} \frac{x^2 dx}{r' \sqrt{r'^2 - x^2}}.$$

Prenons sur ce cercle une abscisse  $x$ , & nommons  $X$  l'arc correspondant; l'analyse nous apprend que

$$\int \frac{x^2 dx}{r\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{1}{2} \frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{r} + \frac{1}{2} X;$$

donc

$$(7) P + \text{constante} = p - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2 r}{r^3} \left[ \frac{1}{2} X - \frac{1}{2} \frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \right].$$

(67.) Dans l'équation (7) du *paragraphe précédent*,  $x$  est le sinus de l'arc  $X$ ; mais cet arc & ce sinus ne doivent pas être évalués dans le cercle qui a  $r$  pour rayon; ils doivent au contraire être évalués dans un cercle dont le rayon  $= r'$ .

Si donc on veut rapporter la quantité  $\frac{1}{2} X - \frac{1}{2} \frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{r}$  au cercle dont le rayon  $= r$ , il faudra multiplier chacune des quantités qui la composent par  $\frac{r}{r'}$ ; elle deviendra

$\frac{1}{2} \frac{r}{r'} X - \frac{1}{2} \frac{r x}{r'} \frac{\sqrt{r^2 - \frac{r^2 x^2}{r'^2}}}{r}$ ; & pour ne pas troubler l'équation, on multipliera le coefficient  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2 r}{r^3}$  par  $\frac{r}{r'}$ ; on aura alors

$$(1) P + \text{const.} = p - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{r'}{r^2} \left[ \frac{1}{2} \frac{r}{r'} X - \frac{1}{2} \frac{\frac{r x}{r'} \sqrt{r^2 - \frac{r^2 x^2}{r'^2}}}{r} \right],$$

& toutes les quantités seront évaluées dans le cercle dont le rayon  $= r$ , c'est-à-dire dans le cercle générateur de la sphère inscrite. Nous remarquerons que  $\frac{r X}{r'}$  est l'arc dont  $\frac{r x}{r'}$  est le sinus, & dont  $\sqrt{r^2 - \frac{r^2 x^2}{r'^2}}$  est le cosinus.

(68.) Soit  $M'F$  une ligne du genre des perpendiculaires, Fig. 5. tracée sur le sphéroïde, mais que l'on suppose faire un angle  $D$  avec le Méridien  $M'P$ , au point de départ; soit  $m'F'$  la portion correspondante du grand cercle, tracée sur la sphère inscrite. Supposons l'arc  $m'F'$  prolongé jusqu'à ce

Fig. 5. qu'il rencontre un Méridien  $\mu'P$  de la sphère inscrite, en un point  $\mu'$ , où il soit perpendiculaire à ce Méridien; il est évident, que dans le triangle sphérique  $m'\mu'P$ , rectangle en  $\mu'$ , & dont on connoît l'angle  $m'$ , que nous avons nommé  $D$ , on aura

$$(1) \sin. \mu'P = \frac{\sin. m'P \times \sin. D}{r} = \frac{y' \sin. D}{r};$$

$\sqrt{r^2 - \frac{y'^2 \sin.^2 D}{r^2}}$  est donc le cosinus de l'arc  $\mu'P$ , & l'on a

$$(2) r' = \cosin. \mu'P.$$

Nous avons vu de plus, que  $x$  est le sinus de la latitude corrigée du lieu  $F$ ; soit donc  $A$  un angle que l'on déterminera de la manière suivante,

$$(3) \sin. A = \frac{r \sin. (\text{latitude corrigée du lieu } F)}{\cosin. \mu'P},$$

on aura

$$(4) P + \text{constante} = p - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \frac{\cosin.^2 \mu'P}{r^2} \left( \frac{1}{2} A - \frac{1}{2} \frac{\sin. A \cos. A}{r} \right),$$

$$\text{ou à cause de } \frac{1}{2} \frac{\sin. A \cos. A}{r} = \frac{1}{4} \sin. 2A,$$

$$(5) P + \text{constante} = p - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \frac{\cosin.^2 \mu'P}{r^2} \left( \frac{1}{2} A - \frac{1}{4} \sin. 2A \right).$$

(69.) Nous observerons que, par la nature de la question,  $P$  &  $p$  doivent être à la fois égaux à zéro, lorsque  $\sin. (\text{latitude corrigée du lieu } F) = \cosin. m'P$ . Si donc l'on nomme  $A'$  un angle particulier, que l'on déterminera de la manière suivante,

$$(1) \sin. A' = \frac{r \cosin. m'P}{\cosin. \mu'P},$$

on aura, en ajoutant convenablement la constante,

$$(2) P = p + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \frac{\cosin.^2 \mu'P}{r^2} \left[ \frac{1}{2} (A' - A) - \frac{1}{4} (\sin. 2A' - \sin. 2A) \right],$$

$$\text{ou à cause de } \sin. 2A' - \sin. 2A = 2 \cos. (A' + A) \times \sin. (A' - A),$$

$$(3) P = p + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \frac{\cosin.^2 \mu'P}{r^2} \left[ \frac{1}{2} (A' - A) - \frac{1}{2} \frac{\cos. (A' + A) \times \sin. (A' - A)}{r} \right].$$

Soit maintenant

$$(4) k' = A' - A,$$

l'équation (3) deviendra

$$(5) P = p + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \frac{\text{cofin.}^2 \mu' P}{r^2} \left[ \frac{k'}{2} - \frac{1}{2} \frac{\text{cof.} (2 A' - k') \sin. k'}{r} \right];$$

ou enfin, si l'on veut que les quantités  $P, p, A', k$  soient exprimées en degrés, minutes & secondes,

$$(6) P - p - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \frac{\text{cof.}^2 \mu' P}{r^2} \left[ \frac{k'}{2} - \frac{206265'' \text{cof.} (2 A' - k') \sin. k'}{2 r^2} \right] = 0.$$

(70.) Dans le triangle sphérique  $m'P\mu'$ , rectangle en  $\mu'$ , si l'on Fig. 5.  
cherche l'expression du côté  $\mu'm'$ , on aura  $\text{cof.} \mu'm' = \frac{r \text{cof.} m'P}{\text{cof.} \mu'P}$ .

Par la même raison, dans le triangle sphérique  $\mu'PF'$ , l'on aura

$$\text{cof.} \mu'F' = \frac{r \text{cof.} PF'}{\text{cof.} \mu'P} = \frac{r \sin. (\text{latitude corrigée du lieu } F)}{\text{cof.} \mu'P}.$$

On voit donc que l'angle  $A'$  est le complément du côté  $\mu'm'$  du triangle sphérique  $\mu'Pm'$ ; que l'angle  $A$  est le complément du côté  $\mu'F'$  du triangle sphérique  $\mu'PF'$ ; que par conséquent, puisque  $A' = 90^\circ - \mu'm'$ , & que  $A = 90^\circ - \mu'F'$ , l'on a

$$(1) k' = \mu'F' - \mu'm' = m'F' = p.$$

(71.) Reprenons maintenant les questions proposées dans les §§. 53 & 54. Examinons d'abord la première question; c'est-à-dire supposons qu'étant donné l'arc  $m'P$  de la sphère inscrite, ainsi que la latitude du lieu  $F$ , l'on demande le nombre de toises que contient sur le sphéroïde, la ligne aboutissant au lieu  $F$ , que l'on suppose d'ailleurs faire avec la Méridienne  $MP$  un angle  $D$  au point de départ?

Rien de plus simple que la solution de cette question. En effet, puisque par la supposition, l'arc  $m'P$ , l'angle  $D$  & la latitude corrigée du lieu  $F$  sont connus; on connoîtra [équations (1) & (3) du §. 68, (1) & (4) du §. 69], l'arc  $\mu'P$ , les angles  $A, A'$ , & l'arc  $k'$ . On connoîtra donc

Fig. 5. [§. 70, équation (1)], la valeur de  $p$ ; ainsi que toutes les quantités qu'il faut substituer dans l'équation (6) du §. 69, pour en conclure  $P$ .

(72.) Examinons maintenant la seconde question; c'est-à-dire, supposons qu'étant donné l'arc  $m'P$  de la sphère inscrite, & le nombre de toises que contient sur le sphéroïde, la ligne aboutissant au lieu  $F$ , que l'on suppose d'ailleurs faire avec la Méridienne  $m'P$ , un angle  $D$  au point de départ; on demande la latitude du lieu  $F$ !

On réduira d'abord  $P$  en degrés au moyen de l'équation (3) du §. 52; on remarquera ensuite que, puisque par la supposition, l'arc  $m'P$  & l'angle  $D$  sont connus, l'arc  $u'P$  & l'angle  $A'$  seront connus; d'ailleurs, puisque [§. 70, équat. (1)]  $k' = p$ ; & que dans l'équation (6) du §. 69, la quantité

$$\frac{k'}{2} - \frac{206265'' \cos. (2 A' - k') \sin. k'}{2 r^2}$$

est multipliée par la fraction très-petite  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\cos.^2 \mu'P}{r^2}$ ; on peut supposer à cette équation la forme suivante,

$$(1) p = P - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \frac{\cos.^2 \mu'P}{r^2} \left[ \frac{P}{2} - \frac{206265'' \cos. (2 A' - P) \sin. P}{2 r^2} \right];$$

on connoîtra donc la valeur de  $p$ . Mais [équation (4) & (1) des §§. 69 & 70]

$$(2) A = A' - p;$$

de plus [équation (3) du §. 68],

$$(3) \sin. (\text{latitude corrigée du lieu } F) = \frac{\sin. A \cos. \mu'P}{r}.$$

La latitude corrigée du lieu  $F$ , & par conséquent la latitude vraie, seront donc connues.

Quant à la longitude corrigée du lieu  $F$ ; d'après les constructions précédentes, elle est évidemment égale à la différence  
des

des deux angles  $\mu'PF'$ ,  $m'PF'$ ; ou plutôt puisque dans le Fig. 5. triangle  $m'PF'$ , on connoît le côté  $m'P$ , l'angle  $Pm'F'$  égal à l'angle  $D$ , le côté  $PF'$  complément de la latitude corrigée du lieu  $F$ , & le côté  $m'F'$  égal à  $p$ ; l'on aura

$$(4) \sin. (\text{longitude corrigée}) = \frac{\sin. p \times \sin. D}{\text{cofin. (latitude corrigée du lieu } F)}$$

Nous remarquerons enfin que comme les quantités  $p$ ,  $P$  ne diffèrent que par des termes de l'ordre  $\frac{\Delta^2}{r^2}$ , on a aussi

$$(5) P = p + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \cdot \frac{\text{cofin.}^2 \mu' P}{r^2} \left[ \frac{p}{2} - \frac{206265'' \text{cof. } (2A' - p) \sin. p}{2r^2} \right].$$

(73.) Il est aisé de voir que dans l'équation (1) du §. 72, le petit terme  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \frac{\text{cof.}^2 \mu' P}{r^2} \left[ \frac{p}{2} - \frac{206265'' \text{cof. } (2A' - p) \sin. p}{2r^2} \right]$  peut se calculer facilement, au moyen des Tables du §. 62. Ce que je dirai de cette équation s'appliquera également aux équations (6) & (5) des §§. 69 & 72.

En effet, si l'on fait usage des Tables du §. 62, & que l'on nomme

- $\gamma$  l'excès de l'arc de l'ellipse sur l'arc correspondant du cercle inscrit, qui répond dans la Table, à l'arc exprimé par  $90^\circ - A' + P$ ,
- $\gamma'$  l'excès de l'arc de l'ellipse sur l'arc correspondant du cercle inscrit, qui répond dans la Table, à l'arc qui a pour expression  $90^\circ - A'$ ,

il est facile de démontrer que l'équation (1) du §. 72 deviendra

$$(1) P - p - \frac{\text{cofin.}^2 \mu' P}{r^2} (\gamma - \gamma') = 0.$$

Les Tables du §. 62, donnent donc avec la plus grande facilité le petit terme en question. Nous remarquerons que  $P$  est positif, lorsque la portion de la perpendiculaire que l'on considère se rapproche de l'Équateur;  $P$  seroit négatif dans le cas contraire.

Nous observerons enfin, que les équations de la sixième section se déduisent des équations de la section présente, en faisant  $\sin. D = r$ ,  $\mu' P = m' P$ ,  $\mu' m' = 0$ ,  $A' = 90^\circ$ , &  $\gamma' = 0$ .

Mém. 1778.

T



## HUITIÈME SECTION.

*Détermination du rapport entre la Longitude vraie & la Longitude corrigée du lieu F.*

*Du cas où la ligne que l'on considère est perpendiculaire à la Méridienne au point de départ.*

Fig. 2. (74.) Dans les paragraphes précédens, nous avons fait voir comment, étant donnée la distance  $FM'$  d'un lieu  $F$ , au Méridien d'un lieu  $M$ , mesurée sur la perpendiculaire à la Méridienne du lieu  $M$ , ainsi que la distance  $M'M$  du pied de cette perpendiculaire au même lieu  $M$ , mesurée sur le Méridien de ce lieu; on déterminoit la latitude vraie du lieu  $F$  & sa longitude corrigée. Il s'agit maintenant de conclure la longitude vraie du lieu  $F$ , d'après la connoissance de sa longitude corrigée.

Pour y parvenir, on se rappellera que si l'on conserve les définitions du §. 47, auquel je renvoie, on a pour équation à la perpendiculaire à la Méridienne sur le sphéroïde,

$$(1) Y^2 du - Y' \sqrt{Y^2 dx^2 + r^2 dx^2 + r^2 dY^2} = 0;$$

pour équation à la perpendiculaire corrigée sur la sphère inscrite,

$$(2) y^2 dv - y' \sqrt{y^2 dv^2 + r^2 dx^2 + r^2 dy^2} = 0.$$

De plus,

$$(3) y y' - r Y = 0;$$

$$(4) y y' - r Y' = 0;$$

$$(5) y dy - r dY = 0;$$

$$(6) x dx + y dy = 0;$$

$$(7) dk = \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

$$(8) dp = - \frac{y dk}{\sqrt{y^2 - y'^2}}.$$

Je remarque que les équations (2) & (1) du présent paragraphe peuvent avoir la forme suivante,

$$(9) dv = - \frac{y'r}{y\sqrt{(y^2 - y'^2)}} \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = - \frac{y'r dk}{y\sqrt{(y^2 - y'^2)}};$$

$$(10) du = - \frac{Y'r}{Y\sqrt{(Y^2 - Y'^2)}} \sqrt{(dx^2 + dY^2)}.$$

Dans ces équations, nous avons donné à  $dv$  &  $du$  le signe *moins*, conformément à la remarque du §. 47.

Maintenant, à cause des équations (3) & (4) du présent paragraphe, & que d'ailleurs  $r^2 = \rho^2 - \Delta^2$ , l'équation (10) peut être mise sous la forme suivante,

$$(11) du = - \frac{y'r}{y\sqrt{(y^2 - y'^2)}} \sqrt{(dx^2 + dy^2 - \frac{\Delta^2 dx^2}{\rho^2})} = - \frac{y'r}{y\sqrt{(y^2 - y'^2)}} \sqrt{(dk^2 - \frac{\Delta^2 dx^2}{\rho^2})}.$$

Je réduis  $\sqrt{(dk^2 - \frac{\Delta^2}{\rho^2} dx^2)}$  en série, & j'ai, en négligeant les termes de l'ordre  $\frac{\Delta^2}{\rho^4}$ ,

$$(12) du = - \frac{y'r}{y\sqrt{(y^2 - y'^2)}} (dk - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\rho^2} \frac{dx^2}{dk}).$$

Mais  $-\frac{y'r}{y\sqrt{(y^2 - y'^2)}} dk = dv$ ; de plus, puisque, par la propriété du cercle,  $\frac{dx^2}{dk} = \frac{y' dk}{r}$ , le terme  $\frac{y'r}{y\sqrt{(y^2 - y'^2)}} \times \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\rho^2} \frac{dx^2}{dk}$  deviendra  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\rho^2} \times \frac{y'}{r} \times \frac{y dk}{\sqrt{(y^2 - y'^2)}}$ .

Donc, à cause de  $\frac{y dk}{\sqrt{(y^2 - y'^2)}} = - dp$ , l'on aura

$$(13) du = dv - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\rho^2} \frac{y'}{r} dp;$$

ou en intégrant,

$$(14) u - v + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\rho^2} \times \frac{y'}{r} p = 0;$$

car il n'y a point de constante à ajouter, puisque par la nature du Problème,  $u$ ,  $v$  &  $p$  sont égaux à zéro, à l'origine des longitudes.

Il suit des définitions du §. 47, que  $y' = \sin. m' P$ ; de plus,  $P$  &  $p$  ne diffèrent que d'une quantité de l'ordre  $\frac{\Delta^2}{\rho^2}$ ; l'on a donc indistinctement

$$(15) \text{ long. vraie } - \text{ long. corr. } + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{p^2} \times \frac{\sin. m' P}{r} \times \text{perp. corr.} = 0,$$

$$(16) \text{ long. vraie } - \text{ long. corr. } + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{p^2} \times \frac{\sin. m' P}{r} \times \text{perp. vraie} = 0.$$

(75.) Nous observerons que l'on a les valeurs suivantes.

*Rapport des axes de la Terre, comme 177 à 178.*

$$\log. \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{p^2} = - 2,2516199.$$

*Rapport des axes de la Terre, comme 200 à 201.*

$$\log. \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{p^2} = - 2,3038015.$$

*Rapport des axes de la Terre, comme 229 à 230.*

$$\log. \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{p^2} = - 2,3608257.$$

*Rapport des axes de la Terre, comme 299 à 300.*

$$\log. \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{p^2} = - 2,4791537.$$

(76.) On pourroit avoir besoin, dans de certaines questions, de donner aux équations précédentes, une forme un peu différente. Supposons en effet, qu'étant données la latitude & la longitude vraies d'un lieu  $F$ , on veuille déterminer le point  $M'$  où la perpendiculaire  $FM'$  à la Méridienne d'un lieu  $M$ , menée par le lieu  $F$ , rencontre la Méridienne du lieu  $M$ ; ainsi que la distance  $FM'$  entre ce point de rencontre & le lieu  $F$ , mesurée sur la perpendiculaire en question. Dans ce cas, dans le triangle sphérique  $m'PF'$  de la sphère inscrite, rectangle en  $m'$ , on connoitra bien le côté  $PF'$  complément de la latitude corrigée du point  $F$ ; mais toutes les autres parties du triangle seront inconnues. On peut observer cependant que si dans ce triangle, l'on détermine les côtés  $m'P$  &  $m'F'$ , en supposant l'angle  $m'PF'$  égal à la longitude vraie donnée, on aura

$$(1) \sin. (m'F' \text{ approché}) = \frac{\sin. (\text{longit. vraie}) \cos. (\text{latit. corr. du lieu } F)}{r};$$

$$(2) \tan. (m'P \text{ approché}) = \frac{\cos. (\text{long. vr.}) \cotang. (\text{latit. corr. du lieu } F)}{2};$$

& ces valeurs seront exactes, aux termes près de l'ordre  $\frac{\Delta^2}{r^2}$ .

Mais comme ces valeurs entrent dans un terme qui est multiplié par  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{p^2}$ , l'on aura

$$(3) \text{ long. corr.} = \text{long. vraie} + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2 \sin.(m'P \text{ approché})}{p^2 r} \times m'F' \text{ approché};$$

& cette équation sera vraie, aux termes près de l'ordre  $\frac{\Delta^4}{r^4}$ .

## E X E M P L E.

(77.) Je suppose un lieu situé à la distance de 52902 toises de la Méridienne de Paris, prises sur une perpendiculaire à cette Méridienne, du côté de l'Orient; je suppose de plus, que la perpendiculaire qui passe par ce lieu, rencontre la Méridienne de Paris, à la distance de 14823 toises du côté du Midi; on demande la longitude de ce lieu!

SOLUTION. Nous avons vu qu'en supposant les axes de la Terre, dans le rapport de 177 à 178; on a  $m'P = 41^d 34' 58''$ ;  $p = 0^d 55' 40''$ ; longitude corrigée  $= 1^d 23' 52''$ . Donc  
 longit. vraie  $= \text{long. corr.} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{p^2} \frac{\sin.m'P}{r}$  perpendiculaire corrigée  
 $= 1^d 23' 52'' - 12'' = 1^d 23' 40''$ .

Par de semblables calculs, on trouvera les valeurs suivantes,

*Rapport des axes de la Terre, comme 177 à 178.*

$m'P = 41^d 34' 58''$ ; perpendiculaire corrigée  $= 0^d 55' 40''$ .  
 Longitude corrigée.....  $= 1^d 23' 52''$ .  
 Longitude vraie.....  $= 1. 23. 40$ .

*Rapport des axes de la Terre, comme 200 à 201.*

$m'P = 41^d 33' 52''$ ; perpendiculaire corrigée  $= 0^d 55' 40''$ .  
 Longitude corrigée.....  $= 1^d 23' 54''$ .  
 Longitude vraie.....  $= 1. 23. 43$ .

*Rapport des axes de la Terre, comme 229 à 230.*

$m'P = 41^d 32' 46''$ ; perpendiculaire corrigée  $= 0^d 55' 39''$ .  
 Longitude corrigée.....  $= 1^d 23' 56''$ .  
 Longitude vraie.....  $= 1. 23. 47$ .

*Rapport des axes de la Terre, comme 299 à 300.*

$m'P = 41^{\circ} 31' 1''$ ; perpendiculaire corrigée  $= 0^{\circ} 55' 39''$ .  
 Longitude corrigée.....  $= 1^{\circ} 24' 2''$ .  
 Longitude vraie.....  $= 1. 23. 53$ .

*Rapport des axes de la Terre, comme 1 à 1.*

$m'P = 41^{\circ} 25' 21''$ ; perpendiculaire corrigée  $= 0^{\circ} 55' 37''$ .  
 Longitude vraie.....  $= 1^{\circ} 24' 5''$ .

Nous remarquerons en finissant, que le lieu que nous avons mis en exemple, est le château de Saron, qui appartient à M. le Président de Saron, notre confrère. Ce lieu est connu par les bonnes observations qui y ont été faites, soit par M. de Saron, soit par M. Messier.

*Estimation de l'erreur du terme négligé dans la formule du §. 74.*

(78.) Le terme que nous avons négligé dans la formule du §. 74, a la forme suivante,  $-\frac{1}{8} \frac{\Delta^2}{p^2} \int \frac{y^2}{y\sqrt{y^2-y'^2}} \times \frac{dx^2}{dk^3}$ . Par la propriété du cercle,

$$\frac{dx^2}{dk^3} = \frac{y^2 dk}{r^3} = \frac{y^2}{r^3} \times \frac{(r^2 - x^2)}{r} dk = \frac{y^2}{r^3} dk - \frac{x^2 y^2 dk}{r^3};$$

de plus,  $dk = \frac{r dx}{y}$ ; donc  $\frac{dx^2}{dk^3} = \frac{y^2 dk}{r^3} - \frac{x^2 y dk}{r^3}$ . Le

terme négligé peut donc être mis sous la forme qui suit,

$$\frac{1}{8} \frac{\Delta^2}{p^2} \times \frac{y}{r} \left[ - \int \frac{y}{\sqrt{y^2-y'^2}} dk + \int \frac{x^2 dx}{r\sqrt{y^2-y'^2}} \right].$$

Mais  $-\int \frac{y}{\sqrt{y^2-y'^2}} dk = p$ ; d'ailleurs,  $\sqrt{y^2-y'^2} = \sqrt{x'^2-x^2}$ ;

$$\text{donc } \int \frac{x^2 dx}{r\sqrt{y^2-y'^2}} = \int \frac{x^2 dx}{r\sqrt{x'^2-x^2}} = \frac{x}{r} \int \frac{x^2 dx}{x'\sqrt{x'^2-x^2}}.$$

Il suit des §. 49, 50 & 51, que si l'on nomme  $A$  un angle, tel que  $\sin. A = \frac{r \sin. (\text{latitude corrigée du lieu } F)}{\cosin. m'P}$ , & que l'on

ajoute convenablement la constante,

$$\frac{x'}{r} \int \frac{x^2 dx}{x' \sqrt{(x'^2 - x^2)}} = - \frac{x'^2}{r^2} \left( \frac{90^\circ - A}{2} + \frac{206265'' \sin. 2 A}{4 r} \right).$$

Enfin  $y' = \sin. m' P$ ;  $x' = \cosin. m' P$ ; on a donc pour expression du terme négligé dans la formule,

$$\frac{1}{8} \frac{\Delta^2}{\rho^2} \times \frac{\sin. m' P}{r} \left[ \text{perpendiculaire} - \frac{\cosin. m' P}{r^2} \left( \frac{90^\circ - A}{2} + \frac{206265'' \sin. 2 A}{4 r} \right) \right].$$

(79.) Le *maximum* de l'erreur du terme négligé a évidemment lieu pour une perpendiculaire menée sous l'Équateur;

le terme négligé auroit alors la forme suivante,  $\frac{1}{8} \frac{\Delta^2}{\rho^2} \times \text{perpend.}$

car dans ce cas,  $\sin. m' P = r$ , &  $\cosin. m' P = 0$ . L'erreur seroit proportionnelle à la grandeur de la perpendiculaire, & elle monteroit à 8" dans le cas d'un arc de  $360^\circ$ . On peut donc, dans tous les cas, négliger le terme en question.

*Du cas où la ligne que l'on considère, n'est pas perpendiculaire à la Méridienne, au point de départ.*

(80.) Si l'on conserve toutes les définitions précédentes, & que l'on nomme de plus

$D$  l'angle que fait la courbe dont il s'agit avec la Méridienne au point de départ,

au lieu des équations (1) & (2) du §. 74, l'on aura

$$(1) Y^2 du - \sqrt{(Y^2 dx^2 + r^2 dx^2 + r^2 dY^2)} \frac{Y' \sin. D}{r} = 0;$$

$$(2) y^2 dv - \sqrt{(y^2 dv^2 + r^2 dx^2 + r^2 dy^2)} \frac{y' \sin. D}{r} = 0;$$

toutes les autres équations du §. 74 restant d'ailleurs les mêmes. Donc par une analyse entièrement semblable à celle de ce paragraphe, on parviendra aux équations suivantes,

$$(3) \text{long. vr.} - \text{long. corr.} + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\rho^2} \frac{\sin. m' P \times \sin. D}{r^2} \text{perpend. corr.} = 0;$$

$$(4) \text{long. vr.} - \text{long. corr.} + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\rho^2} \frac{\sin. m' P \times \sin. D}{r^2} \text{perpend. vraie} = 0;$$

## NEUVIÈME SECTION.

*De l'Angle que fait la perpendiculaire à la Méridienne, avec le Méridien du lieu F.*

(81.) Je dois encore déterminer l'angle que fait la perpendiculaire à la Méridienne, avec le Méridien du lieu *F*. Ce Problème est facile à résoudre. Nous avons vu en effet (S. 11) que si l'on nomme

*Y'* l'ordonnée à l'ellipse au point de départ,  
*y'* l'ordonnée correspondante du cercle inscrit,  
*Y* l'ordonnée à l'ellipse au point *F*,  
*y* l'ordonnée correspondante du cercle inscrit,

on a

$$(1) Y \sin. (\text{angle de la courbe avec le Méridien du lieu } F) = Y' r;$$

$$\text{mais } Y = \frac{p'}{r}, \text{ \& } Y' = \frac{p'}{r}; \text{ donc}$$

$$(2) y \sin. (\text{angle de la courbe avec le Méridien du lieu } F) = y' r,$$

ou enfin

$$(3) \sin. (\text{ang. de la perp. avec le MÉR. du lieu } F) = \frac{r \cos. (\text{lat. cor. du point de dép.})}{\cos. (\text{latit. corrig. du lieu } F)}.$$

Si la ligne n'étoit point perpendiculaire à la Méridienne au point de départ, & qu'elle fit avec ce Méridien un angle *D*, on auroit

$$(4) \sin. (\text{ang. courbe avec le MÉR. du lieu } F) = \frac{\sin. D (\cos. \text{lat. cor. du point de dép.})}{\cos. (\text{latit. corrigée du lieu } F)}.$$

(82.) Puisque nous venons de déterminer l'angle de la ligne *FM'*, avec le Méridien du lieu *F*, il est évident que nous connoissons pareillement l'angle de la perpendiculaire à la ligne *FM'*, avec le même Méridien du point *F*; car ces deux angles diffèrent entre eux de 90 degrés.

(83.)

(83.) Si l'on cherche l'angle que fait avec les différens Méridiens de la sphère inscrite, le grand cercle de cette sphère, que l'on substitue dans le calcul, à la ligne tracée sur le sphéroïde; on verra que ce grand cercle fait avec les différens Méridiens, sous les latitudes corrigées correspondantes aux latitudes vraies, un angle égal à celui formé sur le sphéroïde par la ligne en question, avec les Méridiens successifs qu'elle rencontre. Cette propriété méritoit d'être remarquée; & elle caractérise le grand cercle de la sphère inscrite, que nous substituons à la ligne tracée sur le sphéroïde.

*Sur les usages des propriétés précédentes pour la vérification des perpendiculaires.*

(84.) Les propriétés que nous venons de démontrer, relativement aux angles que fait la perpendiculaire à la Méridienne, avec les différens Méridiens qu'elle rencontre, peuvent fournir un moyen assez simple pour vérifier cette perpendiculaire, lorsqu'on la trace sur le sphéroïde. Il ne s'agit que d'observer la latitude du lieu d'arrivée, & l'angle que fait la perpendiculaire avec le Méridien de ce lieu. Comme on connoît alors la latitude corrigée du lieu d'arrivée, ainsi que celle du lieu de départ, l'on vérifiera facilement si l'angle observé de la perpendiculaire avec le Méridien dont il s'agit, est le même que celui donné par le calcul; cette vérification pourra servir à assurer l'exactitude des opérations, en supposant toutefois que notre globe soit un sphéroïde.

(85.) On peut objecter que la méthode est en quelque sorte hypothétique, puisque l'on est obligé de faire usage des latitudes corrigées, dont la détermination dépend du rapport hypothétique des axes de la Terre. Cependant, si l'on fait réflexion que pour toutes les hypothèses plausibles sur le rapport des axes de la Terre, l'erreur qui peut résulter dans l'estimation de la fraction  $\frac{\cos. (\text{latitude corrigée du point de départ})}{\cos. (\text{latitude corrigée du lieu } F)}$  est infiniment plus petite que celle qui peut résulter des opérations.

*Mém. 1778.*

U



154 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
géodésiques, on fera tenté de ne pas négliger le moyen que nous présentons.

Pour s'en convaincre, soit

$L$  la latitude corrigée du point de départ employée dans le calcul;

$L'$  la latitude corrigée du lieu  $F$  employée dans le calcul;

$L + \alpha$  la latitude corrigée du point de départ que l'on auroit dû employer;

$L' + \alpha + d\alpha$  la latitude corrigée du lieu  $F$  que l'on auroit dû employer.

La fraction que l'on auroit dû employer dans le calcul sera

$$\frac{\text{cof. } (L + \alpha)}{\text{cof. } (L' + \alpha + d\alpha)}, \text{ au lieu de la fraction } \frac{\text{cof. } L}{\text{cof. } L'} \text{ que}$$

l'on a réellement employée. Mais on fait que

$$\text{cof. } (L' + \alpha + d\alpha) = \text{cof. } L' - \frac{(\alpha + d\alpha)}{r} \sin. L';$$

$$\text{cof. } (L + \alpha) = \text{cof. } L - \frac{\alpha}{r} \sin. L;$$

la véritable fraction pourra donc être mise sous la forme suivante,

$$\frac{\text{cof. } L - \frac{\alpha}{r} \sin. L}{\text{cof. } L' - \frac{(\alpha + d\alpha)}{r} \sin. L'} = \frac{\text{cof. } L}{\text{cof. } L'} + \frac{\alpha \sin. (L' - L)}{\text{cof.}^2 L'} + \frac{d\alpha \sin. L' \text{cof. } L}{r \text{cof.}^2 L'}.$$

Or, cette fraction se réduit, sans erreur sensible, au seul terme

$$\frac{\text{cof. } L}{\text{cof. } L'}; \text{ attendu que, si l'on prend le rapport moyen des axes}$$

de la Terre,  $\alpha$  ne peut jamais surpasser 2' de degrés, & que  $d\alpha$  est très-petit.

(86.) Au moyen des équations qui expriment l'angle que fait la perpendiculaire à la Méridienne avec les différens Méridiens successifs qu'elle rencontre; étant donné l'angle que fait une courbe du genre des perpendiculaires, avec un certain Méridien sous une latitude connue, on peut déterminer, 1.<sup>o</sup> l'angle qu'elle fera avec le Méridien qu'elle rencontrera sous une autre latitude; 2.<sup>o</sup> le parallèle où elle sera perpendiculaire au Méridien, c'est-à-dire, la latitude du sommet de la perpendiculaire. Rien n'est plus simple que la solution de ces questions. En effet, si l'on nomme

$D'$  l'angle de la ligne avec les Méridiens successifs,

$D$  l'angle de la ligne avec un Méridien particulier sous une certaine latitude,

on a

$$(1) \sin D \cosinus (\text{latitude corrigée du lieu qui observe l'angle } D) - \sin D' \cosinus (\text{latit. corrigée du lieu qui observe l'angle } D') = 0.$$

On connoîtra donc facilement l'angle  $D'$  qu'elle fera sous une autre latitude quelconque, au moyen de l'équation

$$(2) \sin D' = \sin D \frac{\cos. (\text{latitude corrigée du lieu qui observe l'angle } D)}{\cosinus (\text{latitude corrigée du lieu pour lequel on calcule})}$$

On connoîtra enfin la latitude du lieu où elle sera perpendiculaire au Méridien, en supposant  $\sin D' = r$  dans l'équation (1); & l'on aura

$$(3) \cosinus (\text{latitude corrigée du sommet de la perpendiculaire}) = \frac{\sin D}{r} \cosinus (\text{latitude corrigée du lieu qui observe l'angle } D).$$

Ces méthodes peuvent être utiles lorsque l'on trace une courbe du genre des perpendiculaires, afin de connoître la perpendiculaire que l'on trace, la latitude de son sommet, & de pouvoir rectifier ses opérations.

*REMARQUE sur les équations (3) & (4) du §. 81.*

(87.) On peut faire la remarque suivante sur les équations Fig. 5. (3) & (4) du §. 81. Dans le cas où la ligne est perpendiculaire à la Méridienne, vers le sommet de la courbe, les angles de cette courbe avec les Méridiens qu'elle rencontre, diffèrent peu de  $90^\circ$ ; & par conséquent la moindre inexactitude dans le calcul de ces angles, pourroit conduire à un résultat assez différent du véritable résultat. On évitera cet inconvénient en se servant des formules suivantes,

*Lorsque la courbe est perpendiculaire au Méridien de départ,*

$$(1) \tan. (\text{angle de la courbe avec le Méridien du lieu } F) = \frac{r \tan. n'P}{\sin. p};$$

U ij

Fig. 5. Lorsque la courbe fait un angle  $D$  avec le Méridien de départ,

$$(2) \text{ tang. (angle de la courbe avec le MÉR. du lieu } F) = \frac{r \text{ tang. } \mu'P}{\sin. (p + \mu'm')};$$

l'arc  $\mu'm'$  ayant d'ailleurs pour expression

$$(3) \sin. \mu'm' = \frac{r \text{ tang. } \mu'P}{\text{tang. } D}.$$

## DIXIÈME SECTION.

*Examen de l'erreur des résultats des Sections précédentes, dans le cas où les données employées dans les calculs, différeroient tant soit peu des véritables données du Problème.*

(88.) Il pourroit arriver que les données employées dans le calcul, différassent tant soit peu des véritables données du Problème; il est utile de pouvoir apprécier l'erreur des résultats dans cette hypothèse. Nous supposons donc que la véritable valeur de  $m'P$  diffère tant soit peu de celle employée dans le calcul; qu'il en est de même de l'angle  $D$ , c'est-à-dire de l'angle de la perpendiculaire avec le Méridien au point de départ; nous supposons que le véritable rapport des axes de la Terre n'est pas précisément celui employé dans le calcul; que la véritable perpendiculaire sur le sphéroïde, diffère de celle dont on a fait usage; & nous allons donner l'expression de l'erreur qui résulte de ces différences, soit dans la latitude du lieu  $F$ , soit dans la longitude de ce lieu, soit dans l'angle que fait la ligne dont il s'agit avec le Méridien du lieu  $F$ .

*De la variation de l'arc  $m'P$ .*

Fig. 2. (89.) Si l'on nomme

$K$  l'arc  $MM'$  de l'ellipse,

$k$  l'arc  $mm'$  correspondant du cercle inscrit,

$a$  la latitude corrigée du lieu  $M$ ,

$p$  le demi-grand axe de l'ellipse,

$r$  le demi-petit axe,

on a (SS. 34 & 36)

Fig. 2.

$$(1) m'P = 90^\circ - a - k;$$

$$(2) k = K - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \left[ \frac{K}{2} - \frac{\text{cof.}(2a + K) \sin. K}{2r} \right];$$

donc

$$(3) d(\text{arc } m'P) = -da - dk.$$

De plus, si dans la différenciation de l'équation (2), l'on n'a point égard aux différentielles multipliées par le coefficient  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2}$ , attendu que ces termes ne donneroient qu'un résultat inappréciable, l'on aura

$$(4) dk = dK - 2(K - k) \frac{d\Delta}{\Delta};$$

donc enfin

$$(5) d(\text{arc } m'P) = -da - dK + 2(K - k) \frac{d\Delta}{\Delta}.$$

(90.) Nous observerons que  $da$  peut varier de deux façons, 1.<sup>o</sup> parce que l'on n'aura pas employé la véritable latitude du lieu  $M$ ; 2.<sup>o</sup> parce que cette latitude étant bien connue, on aura conclu la latitude corrigée d'après une hypothèse inexacte sur le rapport des axes terrestres. Pour déterminer ce qui résulte de ces deux sources d'erreur, on se rappellera que l'on a l'équation suivante,

$$(1) \text{tang. (latitude corrigée)} = \frac{r}{\rho} \text{tang. (latitude vraie)};$$

donc

$$(2) da = \frac{r}{\rho} \frac{\text{cofin.}^2 (\text{latit. corr. du lieu } M)}{\text{cofin.}^2 (\text{latitude vraie du lieu } M)} d(\text{lat. vraie du lieu } M) \\ - 206265'' \frac{r}{\rho} \frac{\text{cof.}^2 (\text{lat. corr. du lieu } M) \text{tang. (lat. vraie du lieu } M)}{r^2} \frac{d\rho}{\rho}.$$

Mais on peut supposer dans cette dernière équation, que  $r = \rho$ , cofinus (latitude corrigée) = cofinus (latitude vraie); d'ailleurs

$$\frac{\sin. (\text{latit. vraie}) \cos. (\text{latit. vraie})}{r} = \frac{1}{2} \sin. (2 \text{ latit. vraie}). \text{ Donc enfin}$$

$$(3) da = d(\text{latit. du lieu } M) - 206265'' \frac{\sin. (2 \text{ lat. vraie du lieu } M)}{2r} \frac{dp}{r}.$$

*De la variation de la perpendiculaire corrigée.*

Fig. 5. (91.) Si l'on nomme

$P$  la perpendiculaire tracée sur le sphéroïde,

$p$  la ligne correspondante tracée sur la sphère inscrite,

$D$  l'angle de la perpendiculaire dont est question avec le Méridien de départ,

$$\mu'P \text{ un arc tel que l'on ait (1) } \sin. \mu'P = \frac{\sin. m'P \sin. D}{r},$$

$$A' \text{ un angle tel que l'on ait (2) } \sin. A' = \frac{r \cos. m'P}{\cos. \mu'P},$$

on a (S. 72)

$$(3) p = P - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \frac{\cos. \mu'P}{r^2} \left[ \frac{P}{2} - \frac{\cos. (2 A' - P) \sin. P}{2r} \right].$$

Si donc, dans la différenciation de cette équation, l'on n'a point égard aux différentielles multipliées par le coefficient  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2}$ , conformément à la remarque du S. 89, on aura

$$(4) dp = dP - 2(P - p) \frac{d\Delta}{\Delta}.$$

*De la variation de la latitude du lieu F.*

(92.) Si l'on nomme

$$\mu'm' \text{ un arc tel que l'on ait (1) } \sin. (\mu'm') = \frac{r \tan. \mu'P}{\tan. D},$$

$$A \text{ un angle tel que l'on ait (2) } A = 90^\circ - \mu'm' - p,$$

on a vu (S. 72) que

$$(3) \sinus (\text{latitude corrigée du lieu } F) = \frac{\sin. A \cos. \mu'P}{r}.$$

Il faut donc, pour avoir la variation de la latitude, déterminer les variations des arcs  $\mu'P$ ,  $\mu'm'$  &c de l'angle  $A$ .

De la variation de l'arc  $\mu'P$ .

Fig. 5.

(93.) Puisque (S. 91)

$$(1) \sin. \mu'P = \frac{\sin. m'P \sin. D}{r},$$

on aura

$$(2) d(\text{arc } \mu'P) = \frac{\sin. D \cos. m'P}{r \cos. \mu'P} d(\text{arc } m'P) + \frac{\sin. m'P \cos. D}{r \cos. \mu'P} dD.$$

Mais  $r \sin. \mu'P = \sin. D \sin. m'P$ ; donc  $\frac{\sin. D \cos. m'P}{r \cos. \mu'P} = \frac{\text{tang. } \mu'P}{\text{tang. } m'P}$ ,&  $\frac{\sin. m'P \cos. D}{r \cos. \mu'P} = \frac{\text{tang. } \mu'P}{\text{tang. } D}$ ; donc

$$(3) d(\text{arc } \mu'P) = \frac{\text{tang. } \mu'P}{\text{tang. } m'P} d(\text{arc } m'P) + \frac{\text{tang. } \mu'P}{\text{tang. } D} dD.$$

Donc enfin,

$$(4) d(\text{arc } \mu'P) = \frac{\text{tang. } \mu'P}{\text{tang. } m'P} [2(K-k) \frac{d\Delta}{\Delta} - da - dK] + \frac{\text{tang. } \mu'P}{\text{tang. } D} dD.$$

De la variation de l'arc  $\mu'm'$ .

(94.) Puisque (S. 92)

$$(1) \sin. \mu'm' = \frac{r \text{ tang. } \mu'P}{\text{tang. } D},$$

on aura

$$(2) d(\text{arc } \mu'm') = \frac{r^2}{\cos. \mu'm' \cos.^2 \mu'P \text{ tang. } D} d(\text{arc } \mu'P) - \frac{r^2 \text{ tang. } \mu'P}{\cos. \mu'm' \cos.^2 D \text{ tang. }^2 D} dD.$$

Mais  $r \text{ tang. } \mu'P = \sin. \mu'm' \text{ tang. } D$ ;d'ailleurs,  $\frac{\sin. \mu'P \times \cos. \mu'P}{r} = \frac{1}{2} \sin. 2 \mu'P$ ,&  $\frac{\sin. D \times \cos. D}{r} = \frac{1}{2} \sin. 2 D$ ;donc  $\frac{r^2}{\cos. \mu'm' \text{ tang. } D \cos.^2 \mu'P} = \frac{1}{2} \frac{\text{tang. } \mu'm'}{\sin. 2 \mu'P}$ ,&  $\frac{r^2 \text{ tang. } \mu'P}{\cos. \mu'm' \cos.^2 D \text{ tang. }^2 D} = \frac{1}{2} \frac{\text{tang. } \mu'm'}{\sin. 2 D}$ ;

Fig. 5. donc

$$(3) d(\text{arc } \mu' m') = \frac{1}{2} \frac{\text{tang. } \mu' m'}{\sin. 2 \mu' P} d(\text{arc } \mu' P) - \frac{1}{2} \frac{\text{tang. } \mu' m'}{\sin. 2 D} dD;$$

& comme  $d(\text{arc } \mu' P)$  est connu en variations d'éléments, la question est résolue.

*De la variation de l'angle A, & de la latitude du lieu F.*

(95.) Puisque (5. 92)

$$(1) A = 90^\circ - \mu' m' - p,$$

on a

$$(2) dA = - d(\text{arc } \mu' m') - dp;$$

donc

$$(3) dA = - \frac{1}{2} \frac{\text{tang. } \mu' m'}{\sin. 2 \mu' P} d(\text{arc } \mu' P) + \frac{1}{2} \frac{\text{tang. } \mu' m'}{\sin. 2 D} dD - dP + 2(P - p) \frac{d\Delta}{\Delta}.$$

(96.) Il est facile maintenant d'avoir l'expression de la variation de la latitude du lieu F. On aura d'abord, à cause de l'équation (3) du 5. 92,

$$(1) d(\text{lat. corrig. } F) = \frac{\text{cof. } \mu' P \text{ cof. } A}{r \text{ cof. (lat. corr. du lieu } F)} dA - \frac{\sin. A \sin. \mu' P}{r \text{ cof. (lat. corr. du lieu } F)} d(\text{arc } \mu' P).$$

Mais  $r \sin. (\text{latitude corrigée du lieu } F) = \sin. A \text{ cof. } \mu' P$ ; donc

$$(2) d(\text{lat. corr. du lieu } F) = \frac{\text{tang. (latit. du lieu } F)}{\text{tang. } A} dA - \frac{\text{tang. (latit. du lieu } F)}{\text{cotang. } \mu' P} d(\text{arc } \mu' P);$$

De plus, à cause de l'équation (1) du 5. 90,

$$(3) d(\text{latitude vraie}) = d(\text{latitude corrigée}) + 206265'' \frac{\sin. 2 (\text{latitude})}{2r} \frac{d\phi}{r};$$

& comme  $dA$  &  $d(\text{arc } \mu' P)$  sont connus en variations d'éléments, la question est résolue.

*De la variation de la longitude du lieu F.*

(97.) Nous avons vu (55. 72 & 80) que l'on a les deux équations suivantes,

(1) longitude

$$(1) \text{ longitude vraie} = \text{longit. corrigée} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{p^2} \frac{\sin. m' P \times \sin. D}{r^2} \text{ perpend.}$$

$$(2) \sin. (\text{longitude corrigée du lieu } F) = \frac{\sin. p \times \sin. D}{\cos. (\text{latit. corrigée du lieu } F)}.$$

Si donc dans la différenciation de l'équation (1) l'on n'a point égard aux différentielles multipliées par le coefficient  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{p^2}$ , on aura

$$(3) d(\text{longit. vraie}) = d(\text{longit. corr.}) - 2 (\text{longit. corr.} - \text{longit. vraie}) \frac{d\Delta}{\Delta}.$$

De plus, à cause de l'équation (2), on a

$$\begin{aligned} (4) d(\text{longit. corr.}) &= \frac{\sin. D \sin. p}{\cos. (\text{latitude corrigée})} \times \frac{\cos. D}{\sin. D \cos. (\text{long. corrigée})} dD \\ &+ \frac{\sin. D \sin. p}{\cos. (\text{latitude corrigée})} \times \frac{\cos. p}{\sin. p \cos. (\text{longit. corrigée})} dp \\ &+ \frac{\sin. D \sin. p}{\cos. (\text{lat. corr.})} \times \frac{\sin. (\text{latitude corrigée})}{\cos. (\text{lat. corr.}) \cos. (\text{long. corr.})} d(\text{lat. corr.}) \\ &= \frac{\sin. (\text{long. corr.})}{\cos. (\text{long. corr.})} \times \frac{\cos. D}{\sin. D} dD + \frac{\sin. (\text{long. corr.})}{\cos. (\text{long. corr.})} \times \frac{\cos. p}{\sin. p} dp \\ &+ \frac{\sin. (\text{long. corr.})}{\cos. (\text{long. corr.})} \times \frac{\sin. (\text{latit. corr.})}{\cos. (\text{latit. corr.})} d(\text{latit. corrigée}). \end{aligned}$$

Donc enfin, en n'ayant point égard dans l'évaluation des coefficients, à la petite différence entre la latitude vraie & la latitude corrigée, la longitude vraie & la longitude corrigée,

$$\begin{aligned} (5) d(\text{long. corr. du lieu } F) &= \frac{\text{tang. } ( \text{long. } F )}{\text{tang. } D} dD + \frac{\text{tang. } ( \text{long. } F )}{\text{tang. } p} dp \\ &+ \frac{\text{tang. } ( \text{longitude } F )}{\text{cotang. } ( \text{latit. du lieu } F )} d(\text{latit. corr. } F). \end{aligned}$$

Et comme  $dp$  &  $d(\text{latitude corrigée du lieu } F)$  sont connus en variations d'éléments, la question est résolue.

*De la variation de l'angle de la perpendiculaire avec le Méridien du lieu F.*

(98.) Nous avons vu (S. 81) que l'on avoit l'équation suivante,

$$(1) \sin. (\text{angle de la perp. avec le MÉR. du lieu } F) = \frac{\sin. D \times \sin. m' P}{\cos. (\text{lat. corr. du lieu } F)}.$$

Mém. 1778.

X



on parviendra donc, par une analyse entièrement semblable à celle du *paragraphe précédent*, à l'équation suivante,

$$\begin{aligned} (2) \quad d(\text{angle de la perpendiculaire avec le Méridien du lieu } F) \\ = \frac{\text{tang. (angle de la perpend. avec le Mérid. } F)}{\text{tang. } D} dD \\ + \frac{\text{tang. (angle de la perpend. avec le Mérid. } F)}{\text{tang. } m'P} d(\text{arc } m'P) \\ + \frac{\text{tang. (angle de la perpend. avec le Mérid. } F)}{\text{cotang. (latitude du lieu } F)} d(\text{latit. corr. } F). \end{aligned}$$

Au moyen des équations que nous venons de démontrer, on appréciera facilement les variations qu'un petit changement dans les élémens, apporteroit dans les résultats des sections précédentes.

*Du cas où la ligne est perpendiculaire au Méridien de départ.*

(99.) Il est rare que l'on ait besoin de faire usage des calculs précédens dans toute leur généralité; mais il y a un cas particulier qui se présente si communément, que j'ai cru devoir m'en occuper avec quelque détail; c'est celui où la ligne est perpendiculaire au Méridien de départ.

La condition de la perpendicularité au Méridien de départ, ne change rien aux équations (5) du §. 89, (3) du §. 90, (4) du §. 91, (3) du §. 97. Quant à l'équation (4) du §. 93, à cause de  $\mu'P = m'P$ , & de tangente  $D = \text{infini}$ , elle devient

$$(1) \quad d(\text{arc } \mu'P) = d(\text{arc } m'P) = 2(K - k) \frac{d\Delta}{\Delta} - dK - da.$$

A cause de  $\sin. \mu'm' = 0$ ;  $\cos. \mu'm' = r$ ;  $\text{tang. } \mu'm' = 0$ ;  $\cos.^2 D \text{ tang.}^2 D = r^4$ ; l'équation (3) du §. 94 devient

$$(2) \quad d(\text{arc } \mu'm') = - \frac{\text{tang. } m'P}{r} dD.$$

& l'équation (3) du §. 95, devient

$$(3) \quad dA = \frac{\text{tang. } m'P}{r} dD - dP + 2(P - p) \frac{d\Delta}{\Delta}.$$

De plus, l'angle  $A$  est alors le complément de  $p$ .

(100.) Il suit de ces remarques, que l'on a

$$(1) d(\text{latitude corr. } F) = \frac{\text{tang. (latit. du lieu } F)}{\text{cotang. } p} \left[ 2 (P - p) \frac{d\Delta}{\Delta} - dP \right] \\ - \frac{\text{tang. (latit. du lieu } F)}{\text{cotang. } m'P} \left[ 2 (K - k) \frac{d\Delta}{\Delta} - dK - da \right] \\ + \frac{\text{tang. (latitude du lieu } F) \text{ tang. } m'P}{r \text{ cotang. } p} dD.$$

$$(2) d(\text{latit. vraie}) = d(\text{latit. corr.}) + 206265'' \frac{\sin. (2 \times \text{latit.})}{2r} \frac{d\rho}{r}.$$

$$(3) d(\text{long. du lieu } F) = 2 (\text{longit. vraie} - \text{longit. corrigée}) \frac{d\Delta}{\Delta} \\ + \frac{\text{tang. (long. du lieu } F)}{\text{tang. } p} \left[ dP - 2 (P - p) \frac{d\Delta}{\Delta} \right] \\ + \frac{\text{tang. (longit. du lieu } F)}{\text{cotang. (latit. du lieu } F)} d(\text{latitude corr. } F).$$

$$(4) d(\text{angle de la perpendiculaire avec le Méridien du lieu } F) \\ = \frac{\text{tang. (angle de la perp. avec le MÉR. } F)}{\text{tang. } m'P} \times \left[ 2 (K - k) \frac{d\Delta}{\Delta} - dK - da \right] \\ + \frac{\text{tang. (angle de la perp. avec le MÉR. } F)}{\text{cotang. (latit. du lieu } F)} d(\text{latitude corrigée du lieu } F).$$

*Remarque sur les §. 84. & 85.*

(101.) Si l'on calcule au moyen de l'équation (4) du *paragraphe précédent*, la variation de l'angle de la perpendiculaire avec le Méridien du lieu *F*, dûe au changement de rapport des axes de la Terre; on verra que, quelque léger que soit ce changement, il est cependant du même ordre que les quantités que l'on emploie pour déterminer le rapport de ces axes. On doit donc conclure que, si l'exactitude des mesures terrestres est suffisante pour déterminer l'aplatissement de notre globe, on ne doit point faire usage de la méthode indiquée dans ces paragraphes pour redresser les opérations géodésiques, puisque les quantités que l'on négligeroit seroient de l'ordre de celles que l'on se propose de connoître.

*De la figure des perpendiculaires sur le sphéroïde.*

(102.) Quoique la figure que forment les perpendiculaires sur le sphéroïde soit indifférente aux questions que nous nous sommes proposées, j'ai cru cependant que l'on verroit avec plaisir avec quelle facilité cette figure peut se déterminer, au moyen des équations que nous avons démontrées.

Pour y parvenir, on se rappellera que l'on a l'équation suivante,

$$(1) \text{ long. vraie } = \text{ longit. corrigée } - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{p^2} \frac{\sin. m'P}{r} \times \text{perpend. corrigée.}$$

De plus, la perpendiculaire corrigée est prise sur un grand cercle de la sphère inscrite.

De cette dernière considération, il suit que lorsque la perpendiculaire corrigée est de  $90^\text{d}$ , la longitude corrigée est de  $90^\text{d}$ ; lorsque la perpendiculaire corrigée est de  $180^\text{d}$ , la longitude corrigée est de  $180^\text{d}$ ; cette longitude est de  $270^\text{d}$  & de  $360^\text{d}$ , lorsque la perpendiculaire est de  $270^\text{d}$  & de  $360^\text{d}$ , & ainsi de suite. Mais à mesure que la perpendiculaire augmente, la longitude vraie diffère de plus en plus de la longitude corrigée. Lorsque la perpendiculaire est de  $90^\text{d}$ , la différence est de  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{p^2} \frac{\sin. m'P}{r} \times 90^\text{d}$ ; lorsque la perpendiculaire est de  $180^\text{d}$ , de  $270^\text{d}$ , de  $360^\text{d}$ , & ainsi de suite, la différence est de  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{p^2} \frac{\sin. m'P}{r} 180^\text{d}$ , de  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{p^2} \frac{\sin. m'P}{r} 270^\text{d}$ , de  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{p^2} \frac{\sin. m'P}{r} 360^\text{d}$ , & ainsi de suite. Et si l'on continue la perpendiculaire, la différence entre les longitudes vraies & corrigées, augmentera toujours de plus en plus, de manière qu'à chaque révolution de  $360^\text{d}$ , la différence augmentera de  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{p^2} \frac{\sin. m'P}{r} \times 360^\text{d}$ . Si donc l'on nomme

$n$  le nombre des révolutions de la perpendiculaire corrigée, on aura pour expressions des longitudes vraies correspondantes

aux intersections de la perpendiculaire avec l'Équateur, & aux sommets de la perpendiculaire indéfiniment prolongée,

$$(1) \text{ longitude vraie} = 90^{\text{d}} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{p^2} \frac{\sin. m'P}{r} n \times 90^{\text{d}}.$$

$$(2) \text{ longitude vraie} = 180. - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{p^2} \frac{\sin. m'P}{r} n \times 180.$$

$$(3) \text{ longitude vraie} = 270. - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{p^2} \frac{\sin. m'P}{r} n \times 270.$$

$$(4) \text{ longitude vraie} = 360. - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{p^2} \frac{\sin. m'P}{r} n \times 360.$$

(103.) On voit par-là que s'il étoit possible de continuer indéfiniment une perpendiculaire à la Méridienne sur un sphéroïde, & que, par exemple, d'après les circonstances du Problème,  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{p^2} \frac{\sin. m'P}{r} \times 90^{\text{d}}$  fût égal à  $15'$ , &c.

cette perpendiculaire rencontreroit l'Équateur sous une longitude de  $89^{\text{d}} 45'$ ; elle s'enfonceroit ensuite dans l'hémisphère austral, où elle auroit son sommet sous une latitude égale à celle du point de départ, avec une longitude de  $179^{\text{d}} 30'$ ; elle regagneroit l'Équateur, qu'elle couperoit avec une longitude de  $269^{\text{d}} 15'$ ; elle remonteroit enfin dans l'hémisphère boréal, où elle auroit son sommet sous une latitude égale à celle du point de départ, mais avec une longitude seulement de  $359^{\text{d}}$ ; de sorte qu'après cette première révolution, la longitude des deux sommets différenceroit de  $1^{\text{d}}$ . Et si l'on continuoit cette perpendiculaire, on auroit une suite de points qui, sous chaque même latitude, auroient une longitude différente de  $1^{\text{d}}$  de la longitude des points correspondans de la révolution précédente. Cette perpendiculaire formeroit une espèce de spirale; & l'on ne retomberoit sur la première perpendiculaire que lorsque  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{p^2} \frac{\sin. m'P}{r} n \times 360^{\text{d}}$ , ou plus exactement, lorsque la suite qui exprime la différence des longitudes vraies & corrigées, seroit un multiple de  $360^{\text{d}}$ .

*Démonstration de la propriété de la perpendiculaire à la Méridienne, d'être la ligne la plus courte que l'on puisse mener sur le sphéroïde d'un point à un autre; & de la manière de déterminer l'équation à cette ligne, indépendamment de cette propriété.*

(104.) Avant de terminer ce qui regarde la perpendiculaire à la Méridienne, je dois démontrer sa propriété caractéristique, d'être la ligne la plus courte que l'on puisse mener sur le sphéroïde d'un point à un autre. Je ferai voir ensuite comment l'on peut déterminer l'équation à cette ligne, sans considérer cette propriété.

(105.) Pour démontrer la propriété de la perpendiculaire à la Méridienne, considérons la manière dont on trace cette  
Fig. 6. courbe. Soient  $A$  &  $B$  deux de ses points infiniment proches, en sorte que la petite droite  $AB$  qui les joint, soit un de ses côtés; on élève au-delà du point  $B$  & à une distance infiniment petite  $BC$ , une perpendiculaire  $CD$  à la surface du sphéroïde, de manière que par les points  $A$  &  $B$ , on puisse apercevoir le point  $C$  de cette perpendiculaire; & joignant ensuite le point  $B$  & le pied  $D$  de la perpendiculaire, on a le côté suivant  $BD$  de la courbe. Ce côté se forme conséquemment en pliant le prolongement  $BC$  du côté  $AB$ , suivant la perpendiculaire  $CD$  à la surface du sphéroïde.

Il suit de cette construction, que la ligne  $ABD$  est la plus courte que l'on puisse mener du point  $A$  au point  $D$  du sphéroïde. Pour s'en convaincre, soit  $B\partial D\partial$  le plan tangent au sphéroïde au point  $D$ , & par conséquent perpendiculaire à la ligne  $CD$ ; imaginons maintenant que la ligne  $CD$  tourne autour de l'axe  $BC$ , en faisant constamment l'angle  $BCD$ ; l'on aura un cône dont l'intersection avec le plan  $B\partial D\partial$ , formera la section conique  $\partial D\partial$ ; la ligne  $BD$  fera partie de l'axe de cette section; le point  $D$  en sera le sommet; les lignes  $BD$ ,  $B\partial$ ,  $B\partial$  seront des rayons vecteurs;

& ils représenteront en même temps les intersections du Fig. 6. sphéroïde avec le côté  $BC$ , en supposant ce côté successivement plié dans des directions différentes de la direction perpendiculaire au sphéroïde. Mais par la nature des sections coniques, le rayon  $BD$  est plus petit que les autres rayons vecteurs  $BD$ ,  $B\partial$ .

Considérons maintenant un nouveau côté  $DB'$  formé par le prolongement  $B'C$  du côté  $B'A'$ , que l'on suppose pareillement plié dans la direction de la perpendiculaire au sphéroïde. En vertu des constructions précédentes, l'on aura sur le plan tangent au sphéroïde au point  $D$ , une nouvelle section conique  $\partial'D\partial'$ , dont le rayon vecteur  $B'D$  sera évidemment plus petit que les autres rayons  $B'\partial$ ,  $B'\partial'$ ; & les rayons  $BD$ ,  $DB'$  pourront, à un infiniment petit près du premier ordre, être considérés comme étant en ligne droite, puisqu'ils seroient rigoureusement en ligne droite dans la sphère, & que le sphéroïde peut se confondre avec la sphère qui auroit pour rayon, le rayon osculateur au point  $D$ . La somme des deux côtés  $BD$ ,  $DB'$  est donc plus petite que la somme de toutes les autres lignes  $B\partial$ ,  $\partial B'$ ,  $B\partial'$ ,  $\partial' B'$ , qui sont plus grandes, & qui d'ailleurs font un angle fini entre elles aux points  $\partial$ ,  $\partial'$ . La perpendiculaire à la Méridienne a donc la propriété d'être la ligne la plus courte que l'on puisse mener d'un point à un autre sur la surface du sphéroïde.

(106.) La propriété de la perpendiculaire à la Méridienne, d'être la ligne la plus courte que l'on puisse mener d'un point à un autre sur la surface du sphéroïde, n'est pas particulière aux sphéroïdes de révolution; elle a généralement lieu pour un sphéroïde quelconque. En effet, il est évident que la démonstration du *paragraphe précédent*, est indépendante de la génération du sphéroïde par voie de révolution.

(107.) Nous pourrions nous contenter d'avoir démontré la propriété précédente de la perpendiculaire à la Méridienne; puisque nous en avons déduit, dans la seconde section,

Fig. 6. l'équation à cette perpendiculaire; nous croyons cependant que le Lecteur verra avec plaisir la manière de déterminer directement l'équation à cette ligne, sans faire entrer dans cette détermination la propriété dont il s'agit.

(108.) Pour y parvenir, nommons  $x, y, z$  les trois coordonnées du point  $A$  de la surface du sphéroïde, rapportées à trois axes perpendiculaires, & à une origine commune; les coordonnées au point  $B$ , auront pour expression  $x + dx, y + dy, z + dz$ ; & si l'on nomme  $dp$  le petit côté  $AB$  de la courbe, on aura  $dp = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ . Si l'on prolonge ce côté d'une quantité  $BC$ , égale à  $AB$ ; en pliant ce prolongement suivant la droite  $CD$ , perpendiculairement à la surface, il est visible que son extrémité aboutira un peu au-delà du point  $D$ ; de sorte, que si l'on nomme  $dp'$  le côté  $BD$ ,  $dp'$  sera moindre que  $dp$ ; mais il est facile de s'assurer que la différence est un infiniment petit du troisième ordre; car en faisant  $CD = a$ , il est clair que  $a$  est un infiniment petit du second ordre, puisque  $BC$  est un infiniment petit du premier ordre, ainsi que l'angle  $CBD$ . De plus,  $dp'^2 + a^2 = dp^2$ , d'où l'on tire

$$dp = \sqrt{dp'^2 + a^2} = dp' + \frac{1}{2} \frac{a^2}{dp'};$$

or  $\frac{a^2}{dp'}$  est un infiniment petit du troisième ordre. On aura donc, en négligeant cet infiniment petit,  $dp = dp'$ , ce qui montre que  $dp$  doit être supposé constant.

Cela posé,  $x, y, z$  étant les coordonnées au point  $A$ , &  $x + dx, y + dy, z + dz$ , étant celles du point  $B$ ;  $x + 2dx, y + 2dy, z + 2dz$ , seront, par la nature de la ligne droite, les coordonnées du point  $C$ , pris sur le prolongement du côté  $AB$ . D'ailleurs, les coordonnées du point  $D$ , pris sur le sphéroïde, seront  $x + 2dx + ddx, y + 2dy + ddy, z + 2dz + ddz$ . Si l'on retranche ces coordonnées de celles du point  $C$ , on aura  $-ddx, -ddy, -ddz$ , pour les coordonnées du point  $C$ , en fixant leur origine au point  $D$ .

(109.) L'équation différentielle à la surface d'un sphéroïde, Fig. 6. est en général

$$(1) \quad dz = r dx + s dy;$$

$r$  &  $s$  étant des fonctions de  $x, y$  &  $z$ . De plus, si l'on nomme  $x', y'$  &  $z'$  les coordonnées de la perpendiculaire  $CD$  à la surface, on démontre dans la théorie des surfaces courbes, que pour déterminer cette perpendiculaire, l'on a les deux équations

$$(2) \quad x' + rz' = 0; \quad (3) \quad y' + sz' = 0.$$

Dans ces équations,  $r$  &  $s$  sont les fonctions de  $x, y, z$ , qui entrent dans l'équation (1) au sphéroïde; elles sont variables en passant d'une perpendiculaire à l'autre, mais elles doivent être considérées comme constantes pour la même perpendiculaire. Substituant donc  $ddx, ddy, ddz$ , au lieu de  $x', y', z'$  dans les équations (2) & (3), on aura

$$(4) \quad ddx + rddz = 0; \quad (5) \quad ddy + sddz = 0.$$

Ce sont les équations de la perpendiculaire à la Méridienne, en observant que  $dp$  ou son égal  $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  doit être supposé constant.

(110.) Il est aisé de voir, qu'une seule des deux équations (4) ou (5) du *paragraphe précédent*, combinée avec l'équation (1) à la surface du sphéroïde, suffit pour déterminer la courbe dont il s'agit, & que l'autre équation donne un résultat identique. En effet, puisque  $dp$  ou son égal  $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  est une quantité constante, on conclura

$$(1) \quad dx ddx + dy ddy + dz ddz = 0.$$

Si donc l'on élimine  $ddy$ , au moyen de l'équation (5) du *paragraphe précédent*, on aura

$$(2) \quad dx ddx + (dz - sdy) ddz = 0.$$

Mais l'équation (1) à la surface du sphéroïde, donne  $dz - sdy = rdx$ ; on aura donc

$$(3) \quad ddx + rddz = 0.$$

Mém. 1778.

Y,



(111.) Examinons maintenant le cas des sphéroïdes de révolution, & supposons que l'axe des  $x$  soit l'axe même de révolution. Si l'on nomme  $Y$  l'ordonnée du Méridien correspondante à  $x$ ,  $Y$  sera une fonction de  $x$ . Soit maintenant  $u$  l'angle que forme le Méridien du point  $A$  avec un Méridien fixe, que nous supposons être le plan des  $x$  & des  $y$ ; on aura

$$(1) y = \frac{Y \cos. u}{r}, \quad (2) z = \frac{Y \sin. u}{r};$$

puisque  $Y$  est l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont  $y$  &  $z$  sont les côtés, le côté  $z$  étant d'ailleurs opposé à l'angle  $u$ . Donc

$$(3) dp = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = \sqrt{(dx^2 + dY^2 + \frac{Y^2 du^2}{r^2})}.$$

On aura ensuite  $s$ , en observant que  $s = \frac{dz}{dy}$ , les différentielles  $dz$  &  $dy$  étant prises en regardant  $x$ , & par conséquent,  $Y$  qui en est une fonction, comme des constantes. Or, on a dans cette supposition,

$$(4) dz = \frac{Y \sin. u du}{r}; \quad (5) dy = - \frac{Y \cos. u du}{r};$$

donc

$$(6) s = - \frac{Y \cos. u}{Y \sin. u}.$$

L'équation (5) du §. 109 deviendra ainsi,

$$(7) Y \sin. u d^2(Y \cos. u) - Y \cos. u d^2(Y \sin. u) = 0;$$

donc, en intégrant

$$(8) \frac{1}{2} Cr^2 dp - Y \sin. u d(Y \cos. u) + Y \cos. u d(Y \sin. u) = 0,$$

ou

$$(9) Cr dp - Y^2 du = 0;$$

$C$  étant une constante arbitraire. Cette équation est la même que celle que nous avons déduite (*section deuxième*) de la supposition, que la perpendiculaire à la Méridienne est la ligne la plus courte que l'on puisse mener d'un point à un autre, sur la surface du sphéroïde.

## ONZIÈME SECTION.

*Application des latitudes corrigées au calcul des loxodromiques elliptiques.*

*De l'équation aux loxodromiques elliptiques.*

(112.) On sait que les loxodromiques sont des courbes qui coupent tous les Méridiens, sous un même angle donné. Le calcul de ces courbes ne présente aucune difficulté, si on les suppose tracées sur une sphère; mais il devient plus compliqué lorsque l'on suppose la Terre elliptique. Quoique j'eusse pu me dispenser de donner la méthode, d'après laquelle on peut calculer les loxodromiques elliptiques, ce sujet ayant été traité par plusieurs Géomètres; j'ai cru cependant devoir présenter une nouvelle manière d'envisager le Problème, en employant les latitudes corrigées; on verra par-là, que le calcul des loxodromiques elliptiques se ramène très-facilement au calcul des loxodromiques tracées sur une sphère.

(113.) Soit *PAGDF* un sphéroïde formé par la révolution d'une courbe quelconque *PAG*, autour d'un axe *PC* de révolution. Fig. 1.

Nommons

$x$  l'abscisse  
 $Y$  l'ordonnée

} aux différens points de la courbe, dont la révolution engendre le sphéroïde. Je suppose que l'origine des coordonnées est en *C*; que les abscisses sont comptées sur l'axe de rotation *CP*; les ordonnées *Y* sur la perpendiculaire *CG* à l'axe *CP* de rotation: je suppose de plus, que l'on connoît la relation entre  $x$  &  $Y$ ;

$r$  la distance *CP* du point *C* au pôle *P* de rotation: nous supposons d'ailleurs, cette distance égale au rayon des Tables;

$\mu$  l'angle des différens Méridiens du sphéroïde avec un premier Méridien donné de position: nous supposons que cet angle est mesuré sur un cercle dont le rayon  $= r$ ;

*P* le périmètre de la ligne tracée sur le sphéroïde;

*dP* l'élément de ce périmètre;

*D* l'angle de la courbe avec les différens Méridiens qu'elle coupe successivement.

Y ij

Nous avons vu (S. 6 & 10) que l'on a généralement les équations suivantes,

$$(1) \quad dP = \frac{\sqrt{Y^2 du^2 + r^2 dx^2 + r^2 dY^2}}{r},$$

$$(2) \quad \sin. D = \frac{r Y du}{\sqrt{Y^2 du^2 + r^2 dx^2 + r^2 dY^2}}.$$

Si donc l'on suppose l'angle  $D$  constant, ce qui est la propriété caractéristique des loxodromiques, l'on aura pour équation de ces courbes,

$$(3) \quad \sin. D \sqrt{Y^2 du^2 + r^2 dx^2 + r^2 dY^2} - r Y du = 0;$$

d'où l'on tire

$$(4) \quad du = \tan. D \frac{\sqrt{dx^2 + dY^2}}{Y},$$

& substituant cette valeur dans l'équation (1),

$$(5) \quad dP = \frac{r}{\cos. D} \sqrt{dx^2 + dY^2}.$$

Pour réduire la courbe à deux variables, il ne seroit question que de faire usage des équations à l'ellipse,

$$(6) \quad p^2 x^2 + r^2 Y^2 - p^2 r^2 = 0; \quad (7) \quad p^2 x dx + r^2 Y dY = 0;$$

$p$  étant d'ailleurs le demi-grand axe de l'ellipse génératrice, &  $r$  le demi-petit axe.

*De l'équation aux loxodromiques sphériques, & des principes pour calculer ces courbes.*

(114.) Imaginons maintenant que sur la sphère inscrite, on trace une loxodromique qui fasse avec les Méridiens de cette sphère, un angle égal à celui que la loxodromique elliptique fait avec les Méridiens qu'elle rencontre, & qui s'étende sous les latitudes correspondantes à celle de la loxodromique elliptique.

## Nommons

$v$  l'angle des différens Méridiens rencontrés par la loxodromique sphérique avec un premier Méridien donné de position;

$y$  l'ordonnée du cercle inscrit correspondante à l'ordonnée  $Y$  de l'ellipse;

$p$  le périmètre de la loxodromique sphérique;

$dp$  l'élément de ce périmètre;

$$dk = \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

& conservons d'ailleurs toutes les autres définitions précédentes, l'on aura évidemment

$$(1) \sin. D \sqrt{y^2 dv^2 + r^2 dx^2 + r^2 dy^2} - ry dv = 0.$$

$$(2) dv = \text{tang. } D \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} = \text{tang. } D \frac{dk}{y}.$$

$$(3) dp = \frac{r}{\text{cof. } D} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{r}{\text{cof. } D} dk.$$

$$(4) x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

$$(5) x dx + y dy = 0.$$

(115.) De l'équation (3) du *paragraphe précédent*, on conclut tout de suite

$$(1) p + \text{constante} = \frac{r}{\text{cof. } D} k.$$

Mais lorsque  $p = 0$ ,  $k$  est égal à la latitude du point de départ; donc constante =  $\frac{r}{\text{cof. } D}$  latitude du point de départ: donc

$$(2) p = \frac{r}{\text{cof. } D} (\text{latit. du point d'arrivée} - \text{latit. du point de départ}).$$

Donc

$$(3) \text{chemin en latitude} = \frac{\text{cof. } D}{r} p.$$

(116.) Puisque  $\frac{dk}{y} = \frac{r dx}{y^2} = \frac{r dx}{r^2 - x^2}$ , l'équation (2) du §. 114, devient

$$(1) dv = \text{tangente } D \frac{r dx}{r^2 - x^2};$$

# 174 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

donc en intégrant,

$$(2) v + \text{const.} = \text{tang. } D \frac{1}{2} \log. \left( \frac{r+x}{r-x} \right) = \text{tang. } D \log. \sqrt{\frac{r+x}{r-x}}.$$

Nommons maintenant

$X$  l'angle dont  $x$  est le sinus, c'est-à-dire la latitude du lieu d'arrivée; puisque généralement  $\frac{r+x}{r-x} = \frac{\text{tangente}^2}{r^2} (45^\circ + \frac{1}{2}X)$ , l'équation (2) deviendra

$$(3) v + \text{const.} = \text{tang. } D \log. \left\{ \frac{\text{tang. } [45^\circ + \frac{1}{2} (\text{lat. du point d'arrivée})]}{r} \right\}.$$

Mais  $v$  doit être égal à zéro lorsque  $X$  exprime la latitude du point de départ; donc

$$(4) v = \text{tang. } D \log. \left\{ \frac{\text{tangente } [45^\circ + \frac{1}{2} (\text{latitude du point d'arrivée})]}{\text{tangente } [45^\circ + \frac{1}{2} (\text{latitude du point de départ})]} \right\}.$$

- (117.) Les logarithmes qu'il faut employer pour calculer la formule précédente, sont les logarithmes hyperboliques. Si donc l'on emploie les logarithmes des Tables, il faudra multiplier le résultat par le nombre 2,3025851, c'est-à-dire par le nombre qui ramène les logarithmes des Tables aux logarithmes hyperboliques. Si l'on veut faire usage des logarithmes des Tables, & que de plus  $v$  soit exprimé en degrés, minutes & secondes, on pourra employer la formule suivante, dans laquelle toutes les réductions nécessaires ont été faites.

$$(1) v = \frac{\text{tang. } D}{r} \log. \left\{ \frac{\text{tang. } (45^\circ + \frac{1}{2} \text{ latit. du point d'arrivée})}{\text{tang. } (45^\circ + \frac{1}{2} \text{ latit. du point de départ})} \right\} 474943''.$$

*Du rapport entre le périmètre de la loxodromique elliptique & le périmètre de la loxodromique correspondante de la sphère inscrite.*

(118.) Soit

$P$  le périmètre de la loxodromique elliptique;

$p$  le périmètre de la loxodromique correspondante, tracée sur la sphère inscrite;

$p$  le demi-grand axe du sphéroïde,

$r$  le demi-petit axe du sphéroïde,

$$\Delta^2 = p^2 - r^2.$$

Nous avons vu que

$$(1) dP = \frac{r}{\cos D} \sqrt{(dx^2 + dY^2)},$$

$$(2) dp = \frac{r}{\cos D} \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{r}{\cos D} dk.$$

Mais  $dY^2 = \frac{p^2 dy^2}{r^2} = dy^2 + \frac{\Delta^2 dy^2}{r^2}$ ; l'équation (1) peut donc avoir la forme suivante,

$$(3) dP = \frac{r}{\cos D} \sqrt{(dx^2 + dy^2 + \frac{\Delta^2 dy^2}{r^2})} = \frac{r}{\cos D} \sqrt{(dk^2 + \frac{\Delta^2 dy^2}{r^2})}.$$

Je réduis cette dernière expression en série, en négligeant les termes de l'ordre  $\frac{\Delta^2}{r^2}$ , & j'ai

$$(4) dP = \frac{r}{\cos D} dk + \frac{r}{\cos D} \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \frac{dy^2}{dk} = dp + \frac{r}{\cos D} \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \frac{dy^2}{dk};$$

mais  $\frac{dy}{dk} = -\frac{x}{r}$ , &  $dy = -\frac{x dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$ ; donc

$$(5) P + \text{const.} = p + \frac{r}{\cos D} \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \int \frac{x^2 dx}{r \sqrt{(r^2 - x^2)}}.$$

Nous avons vu que  $\int \frac{x^2 dx}{r \sqrt{(r^2 - x^2)}} = \frac{1}{2} X - \frac{1}{4} \sin. 2 X$ ;

de plus,  $P$  &  $p$  sont à la fois égaux à zéro au point de départ; si donc l'on nomme

$a$  la latitude corrigée du point de départ,

$X$  la latitude corrigée du point d'arrivée,

& que l'on suppose d'ailleurs

$$(6) k' = X - a = \text{chemin en latitude},$$

on aura

$$(7) P = p + \frac{r}{\cos D} \times \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \left[ \frac{k'}{2} - \frac{\cos. (2a + k') \sin. k'}{2r} \right].$$

Mais [équation (3) du §. 115]  $k' = \frac{\text{cof. } D}{r} p$ ; donc

$$(8) P = p + \frac{r}{\text{cof. } D} \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \left[ \frac{\text{cof. } D}{r} \frac{p}{2} - \frac{\text{cof.}(2a + \frac{\text{cof. } D}{r} p) \sin.(\frac{\text{cof. } D}{r} p)}{2r} \right],$$

ou enfin

$$(9) P = p + \frac{r}{\text{cof. } D} \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \left[ \frac{\text{cof. } D}{r} \frac{p}{2} - 206265'' \frac{\text{cof.}(2a + \frac{\text{cof. } D}{r} p) \sin.(\frac{\text{cof. } D}{r} p)}{2r^2} \right].$$

(119.) Comme les quantités  $P$  &  $p$  ne diffèrent que par des termes de l'ordre  $\frac{\Delta^2}{r^2}$ , l'équation suivante sera également vraie, aux termes près de l'ordre  $\frac{\Delta^4}{r^4}$ ,

$$(1) P = p + \frac{r}{\text{cof. } D} \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \left[ \frac{\text{cof. } D}{r} \frac{P}{2} - 206265'' \frac{\text{cof.}(2a + \frac{\text{cof. } D}{r} P) \sin.(\frac{\text{cof. } D}{r} P)}{2r^2} \right].$$

(120.) Nous observerons que la quantité  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2}$  &c. qui entre dans le petit terme des équations précédentes, se calcule facilement par le moyen des Tables du §. 62; on fera cependant la remarque suivante. Dans les Tables du §. 62, les arcs, soit de l'ellipse, soit du cercle inscrit dont on cherche la différence, sont comptés en partant du sommet du petit axe; les arcs, au contraire, dont les différences donnent le petit coefficient  $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2}$  &c. sont comptés en partant du sommet du grand axe de l'ellipse; il faudra donc, pour faire usage des Tables du §. 62, employer les différences qui répondent aux complémens des arcs  $a$  &  $a + \frac{\text{cof. } D}{r} P$ .

On voit par-là que si l'on nomme

$\gamma$  l'excès de l'arc de l'ellipse sur l'arc correspondant du cercle inscrit,  
qui répond dans la Table à l'arc exprimé par  $90^\circ - a - \frac{\text{cof. } D}{r} P$ ,  
 $\gamma$  l'excès

$\gamma'$  l'excès de l'arc de l'ellipse sur l'arc correspondant du cercle inscrit, qui répond dans la Table, à l'arc exprimé par  $90^\circ - a$ ,

l'équation (1) du §. 119 pourra être exprimée par

$$(1) P = P - \frac{\gamma'}{\cos. D} (\gamma' - \gamma).$$

(121.) L'usage des formules précédentes est on ne peut pas plus simple. Supposons, en effet, que l'on connoisse la latitude vraie du point de départ, ainsi que l'angle  $D$  de la route avec les Méridiens, & le chemin  $P$  du Vaisseau; on conclura tout de suite la latitude corrigée du lieu de départ, & l'on réduira en degrés, minutes & secondes le chemin  $P$  du Vaisseau. On aura donc tous les élémens nécessaires pour calculer  $p$ , au moyen de l'équation (1) du *paragraphe précédent*. Cette dernière valeur une fois connue, on calculera la latitude corrigée du lieu d'arrivée, au moyen de l'équation (2) du §. 115; on conclura sa latitude vraie par l'équation (1) du §. 19; on aura enfin la longitude corrigée du lieu d'arrivée, au moyen de l'équation (1) du §. 117. Il n'est plus question maintenant que de conclure la longitude vraie.

*Du rapport entre la longitude corrigée & la longitude vraie.*

(122.) Il est facile de déterminer le rapport entre la longitude corrigée & la longitude vraie. Nous avons vu en effet que l'on avoit les équations suivantes:

$$(1) du = \text{tang. } D \frac{\sqrt{(dx^2 + dY^2)}}{Y}.$$

$$(2) dv = \text{tang. } D \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{y} = \text{tang. } D \frac{dh}{y}.$$

On fait de plus, que  $Y = \frac{p^2}{r}$ , & que  $dY^2 = \frac{p^2 dy^2}{r^2}$ ; donc

$$(3) du = \text{tang. } D \frac{r}{p} \frac{\sqrt{(dx^2 + \frac{p^2 dy^2}{r^2})}}{r}.$$

Mém. 1778.

Z



Mais à cause de  $r^2 = \rho^2 - \Delta^2$ ,  $\sqrt{(dx^2 + \frac{\rho^2 dy^2}{r^2})}$   
 $= \frac{\rho}{r} \sqrt{(dx^2 + dy^2 - \frac{\Delta^2 ds^2}{\rho^2})} = \frac{\rho}{r} \sqrt{(dk^2 - \frac{\Delta^2}{\rho^2} dx^2)}$   
 $= \frac{\rho}{r} (dk - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\rho^2} \frac{dx^2}{dk})$ , en négligeant les termes de  
l'ordre  $\frac{\Delta^4}{\rho^4}$ . Donc

$$(4) \quad du = \text{tangente } D \left( \frac{dk}{\rho} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\rho^3} \frac{dx^2}{dk} \right);$$

mais  $\text{tang. } D \times \frac{dk}{\rho} = dv$ , &  $\frac{dx^2}{\rho dk} = \frac{dx}{r}$ : donc en  
intégrant

$$(5) \quad u + \text{constante} = v - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\rho^3} \frac{\text{tang. } D}{r} x;$$

donc en ajoutant convenablement la constante, & conservant  
les définitions des *paragraphes précédents*,

$$(6) \quad u = v - \frac{\Delta^2}{\rho^3} \frac{\text{tang. } D}{r} \times \frac{\text{cof.}(a + \frac{\text{cof. } D}{r} \times \frac{P}{2}) \text{fin.}(\frac{\text{cof. } D}{r} \times \frac{P}{2})}{r},$$

ou enfin

$$(7) \quad u = v - \frac{\Delta^2}{\rho^3} \frac{\text{tang. } D}{r} \times \frac{\text{cof.}(\frac{\text{cof. } D}{r} \times \frac{P}{2}) \text{fin.}(\frac{\text{cof. } D}{r} \times \frac{P}{2})}{r^2} 206265''.$$

On conclura donc, avec la dernière facilité, la longitude  
vraie du lieu d'arrivée.

Dans l'usage de ces formules, on fera  $\sinus D$ ,  $\cosin. D$ ,  
 $\text{tang. } D$  positifs, lorsque l'on s'avancera vers le Pôle; on fera  
 $\sin. D$  positif,  $\cosin. D$ ,  $\text{tang. } D$  négatifs, lorsque l'on s'avan-  
cera vers l'Équateur. On n'oubliera pas aussi que les longitudes  
sont comptées du point de départ; de sorte que la longitude  
n'est autre chose que le chemin en longitude.

(123.) Je ne m'étendrai pas davantage sur les loxodro-  
miques elliptiques; il me suffit d'avoir fait voir ce que  
devient le Problème, en y appliquant la considération des  
latitudes corrigées. Je passe aux applications des propriétés des  
perpendiculaires à la Méridienne, aux usages géodésiques.

## DOUZIÈME SECTION.

*Application des recherches précédentes aux principaux usages géodésiques.*

(124.) Je dois maintenant appliquer les recherches précédentes aux principaux usages géodésiques. Dans ces recherches, j'appellerai, conformément à ce qui a été dit ci-dessus,

*Distance perpendiculaire du lieu F à la Méridienne du lieu M, la Fig. 2.*  
distance du lieu F à la Méridienne du lieu M, comptée sur la perpendiculaire  $FM'$  à cette Méridienne.

*Distance du lieu M au pied de la perpendiculaire du lieu F, la*  
distance  $MM'$  du lieu M au point  $M'$ , où la perpendiculaire menée du lieu F au Méridien  $MM'P$ , rencontre ce Méridien.

*Longitude vraie du lieu F, l'angle au pôle P compris entre les*  
Méridiens  $MP, FP$ .

*Angle de la perpendiculaire, avec les Méridiens successifs qu'elle*  
rencontre, l'angle en F formé sur le sphéroïde, par les Méridiens  $PF$ , & la perpendiculaire  $M'F$ .

*Arc  $m'P$ , l'arc de la sphère inscrite compris entre le pôle & la*  
projection  $m'$  du point  $M'$  intersection du Méridien du lieu M, & de la perpendiculaire à ce Méridien.

*Perpendiculaire corrigée à la Méridienne, l'arc  $m'F'$  du triangle  $m'PF'$*   
de la sphère inscrite.

*Longitude corrigée du lieu F', l'angle au pôle P du triangle  $m'PF'$*   
de la sphère inscrite.

*Latitude corrigée du lieu F, le complément de l'arc  $F'P$  du triangle*  
 $m'PF'$ .

*Angle de la perpendiculaire corrigée avec les Méridiens de la sphère*  
inscrite, l'angle en  $F'$  du triangle  $m'PF'$ ; cet angle est égal à l'angle de la perpendiculaire vraie, avec les Méridiens correspondans du sphéroïde.

180 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
PREMIÈRE QUESTION.

(125.) On peut se proposer la question suivante:

Fig. 2. *Étant données la latitude & la longitude vraies d'un lieu F; déterminer la distance M'M du lieu M, au point M', où la ligne FM' perpendiculaire au Méridien du lieu M, rencontre ce Méridien; ainsi que la distance FM' entre cette intersection M' & le lieu F, mesurée sur la perpendiculaire FM'.*

Pour résoudre cette première question, on commencera par déterminer la longitude corrigée, ou, ce qui revient au même, l'angle  $P$  du triangle  $m'PF'$ , au moyen des équations (1), (2), (3) du §. 76. On connoîtra maintenant dans ce triangle, le côté  $PF'$ , complément de la latitude corrigée du lieu  $F$ , & l'angle  $P$ ; on conclura donc l'arc  $m'P$ , & la perpendiculaire corrigée  $m'F'$  à la Méridienne, au moyen des équations

$$(1) \text{ tangente } m'P = \frac{\text{cotang. (latit. corr. du lieu } F) \text{ cof. (longit. corr.)}}{r},$$

$$(2) \sin. (\text{perp. corr.}) = \frac{\text{cofin. (latit. corr. du lieu } F) \sin. (\text{longit. corrigée})}{r}.$$

On conclura la perpendiculaire vraie, au moyen de l'équation (1) du §. 52, après avoir déterminé l'angle  $A$  qui entre dans son expression, au moyen de l'équation (1) du §. 51. On réduira cette perpendiculaire vraie en toises, au moyen de l'équation (3) du §. 52.

De la valeur de  $m'P$ , on conclura  $k$ , au moyen de l'équation (1) du §. 34; on conclura  $K$ , au moyen de l'équation (2) du §. 28; on réduira  $K$  en toises, au moyen de l'équation (2) du §. 32, & la question sera résolue.

Si l'on supposoit que le lieu  $M$  fût l'Observatoire de Paris, l'on suppléeroit à ces derniers calculs, au moyen des Tables du §. 44.

Si l'on vouloit déterminer l'angle de la perpendiculaire dont est question avec le Méridien du lieu  $F$ , on auroit recours à l'équation (1) du §. 87.

## SECONDE QUESTION.

(126.) On peut se proposer la question suivante:

Étant donnée la latitude vraie du lieu  $F$ , & l'angle que Fig. 2.  
fait la perpendiculaire à la Méridienne, avec le Méridien du  
lieu  $F$ ; déterminer, 1.<sup>o</sup> la distance  $M'M$  du lieu  $M$ , au  
point  $M'$ , où la ligne  $FM'$  perpendiculaire au Méridien du  
lieu  $M$ , rencontre ce Méridien; 2.<sup>o</sup> la distance  $FM'$  entre  
cette intersection  $M'$  & le lieu  $F$ , c'est-à-dire la longueur de  
la perpendiculaire sur le sphéroïde; 3.<sup>o</sup> la longitude du lieu  $F$   
par rapport au lieu  $M$ .

Pour résoudre cette question, on commencera par déterminer l'arc  $m'P$  du triangle  $m'PF'$  de la sphère inscrite, en observant que le côté  $PF'$  est le complément de la latitude corrigée du lieu  $F$ , & que l'angle  $m'F'P$  est égal à l'angle de la perpendiculaire à la Méridienne, avec le Méridien du lieu  $F$  sur le sphéroïde; on aura donc,

$$(1) \sin. m'P = \frac{\sin. (\text{ang. de la perp. avec le MÉR. du lieu } F) \cos. (\text{lat. corr. du lieu } F)}{r}.$$

On conclura  $k$ , au moyen de l'équation (1) du §. 34; on conclura  $K$ , au moyen de l'équation (2) du §. 28; on réduira  $K$  en toises, au moyen de l'équation (2) du §. 32, ou plutôt, l'on fera usage des Tables du §. 44, si l'on suppose que le lieu  $M$  est l'Observatoire de Paris; & l'on connoîtra la distance  $M'M$ .

On conclura le côté  $m'F'$ , ou la quantité  $p$ , qui lui est égale, au moyen de l'équation (1) du §. 54; on conclura  $P$ , au moyen de l'équation (1) du §. 52; on réduira  $P$  en toises, au moyen de l'équation (3) du §. 52; & l'on connoîtra la longueur de la perpendiculaire sur le sphéroïde.

On calculera la longitude corrigée du lieu  $F$ , au moyen de l'équation (1) du §. 58; l'on conclura enfin la longitude vraie du lieu  $F$ , au moyen de l'équation (15) du §. 74, & la question sera complètement résolue.

## TROISIÈME QUESTION.

(127.) On peut se proposer la question suivante:

Fig. 2. *Étant donnée la distance  $M'M$  du lieu  $M$  au point  $M'$  où la ligne  $FM'$  perpendiculaire au Méridien du lieu  $M$  rencontre ce Méridien, ainsi que la longueur  $FM'$  de la perpendiculaire sur le sphéroïde; déterminer la latitude du lieu  $F$ , & sa longitude par rapport au lieu  $M$ .*

Nous remarquerons que le cas dont il s'agit est de l'usage le plus général; c'est par lui que l'on peut calculer les latitudes & les longitudes des différens points de la Carte de France, d'après les opérations géodésiques de M.<sup>rs</sup> Cassini; puisqu'en effet chaque lieu est désigné par sa distance perpendiculaire à la Méridienne de Paris, & par la distance de l'intersection de cette perpendiculaire, à l'Observatoire de Paris.

(128.) Puisque l'on connoît le nombre  $T$  de toises que contient  $MM'$ , on conclura la valeur de  $K$ , au moyen de l'équation (2) du §. 32; on conclura la valeur de  $k$ , au moyen de l'équation (2) du §. 28, & enfin la valeur de  $m'P$ , au moyen de l'équation (1) du §. 34; ou plutôt l'on fera usage des Tables du §. 44, pour avoir directement la valeur de  $m'P$ , si l'on suppose que le lieu  $M$  est l'Observatoire de Paris.

On réduira en degrés la perpendiculaire  $FM'$ , au moyen de l'équation (3) du §. 52, & l'on conclura la valeur de  $p$ , au moyen de l'équation (1) du même paragraphe; on conclura ensuite la latitude corrigée du lieu  $F$ , au moyen de l'équation (1) du §. 57, & la longitude corrigée, au moyen de l'équation (1) du §. 58; on ramènera la latitude corrigée du lieu  $F$  à la latitude vraie, au moyen des Tables du §. 20, ou au moyen de l'équation (1) du §. 19; on conclura la longitude vraie au moyen de l'équation (15) du §. 75; & le Problème sera complètement résolu.

Si l'on vouloit de plus connoître l'angle de la perpendiculaire à la Méridienne avec le Méridien du lieu  $F$ , l'on feroit usage de l'équation (1) du §. 87.

Comme la question présente est du plus grand usage, je vais donner le type du calcul; je l'appliquerai à la détermination de la position de Brest.

### EXEMPLE.

(129.) On demande la longitude & la latitude de Brest, en supposant ce lieu situé à la distance de 259168 toises de la Méridienne de Paris, prise sur une perpendiculaire qui rencontre cette Méridienne à la distance de 14614 toises du côté du Midi. On suppose de plus que les axes de la Terre sont dans le rapport de 177 à 178.

### TYPE DU CALCUL

#### Détermination de $m'P$ .

Dans la première Table du §. 44, je vois que la valeur de  $m'P$  qui convient à la distance de 10105 toises du côté du Midi, est  $41^d 30'$ ; je soustrais 10105 du nombre 14614 donné, & j'ai pour différence 4509 toises. Suivant la même Table, la différence pour  $10'$  de variation de  $m'P$ , est de 9503 toises; j'ai donc, 9503 est à 600" comme 4509 est au nombre de secondes qu'il faut ajouter à  $41^d 30'$  pour avoir  $m'P$ .

$$\begin{array}{r} 2.7781513..... \log. 600". \\ 3.6540802..... \log. 4509. \\ \hline + 6.4322315. \\ \hline - 3.9778607..... \log. 9503. \\ \hline 2.4543708..... \log. 285. \end{array} \quad m'P = \left\{ \begin{array}{l} 41^d 30' 0". \\ + \quad 4. 45. \\ \hline 41. 34. 45. \end{array} \right.$$

#### Détermination de $p$ .

Je réduis en degrés le nombre 259168 de toises que contient  $P$ , au moyen de l'équation (3) du §. 52,

184 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE .  
& j'ai

$$\begin{array}{r} 5,4135813..... \log. 259168 \text{ toises} \\ - 1,1983286..... \log. \frac{3600''}{0} . \\ \hline 4,2152527..... \log. 16415'' . \\ P = 4^{\circ} 33' 35'' . \end{array}$$

Dans la première Table du §. 62, je vois 1.<sup>o</sup> que la différence entre l'arc de l'ellipse & l'arc correspondant du cercle inscrit, est de 81'',6 pour une valeur de  $P$  de 4<sup>d</sup>; 2.<sup>o</sup> que 10'',2 répondent à 30' de variation de  $P$ ; 3.<sup>o</sup> que 1'',7 répond à 5' de variation de  $P$ : donc

Différence entre l'arc de l'ellipse & l'arc correspondant du cercle inscrit, qui satisfait à la question = 93'',5.

J'ai donc

$$\begin{array}{r} 1,9708116..... \log. 93'',5. \\ 9,7478400..... \log. \cosin.^2 m'P. \\ \hline 1,7186516..... \log. 52'' . \end{array}$$

donc

$$P = 4^{\circ} 33' 35'' - 52'' = 4^{\circ} 32' 43'' = 16363''.$$

*Détermination de la Latitude.*

Je conclus la latitude corrigée, au moyen de l'équation (1) du §. 57: je ramène cette latitude à la latitude vraie, au moyen des Tables du §. 20.

$$\begin{array}{r} 9,8739200..... \cos. m'P. \\ 9,9986325..... \cos. p. \\ \hline 9,8725525..... \sin. \text{latit. corrigée.} \end{array}$$

$$\text{Latitude corr.} = 48^{\circ} 13' 4'',5$$

$$\text{Latitude vraie} = \left\{ \begin{array}{l} 48. 13. 4,5. \\ + 9. 37,5. \\ \hline 48. 22. 42,0. \end{array} \right.$$

*Détermination*

*Détermination de la Longitude.*

Je calcule la longitude corrigée, au moyen de l'équation (1) du §. 58; & je ramène cette longitude à la longitude vraie, au moyen de l'équation (15) du §. 75.

$$\begin{array}{rcl}
 & 4,2138629..... \log. p. & \\
 +18,9003500... \log. r \text{ tang. } p. & 9,8219420..... \log. \sin. m'P. & \\
 - 9,8219420... \log. \sin. m'P. & + 4,0358049. & \\
 \hline
 9,0784080... \log. \text{tang. long. corr.} & - 2,2516199..... \log. \frac{\Delta^{\circ}}{p^{\circ}}. & \\
 & 1,7841850..... \log. 61^{\circ}. &
 \end{array}$$

Longitude corrigée =  $6^{\circ} 49' 50''$ .

Longitude vraie =  $6. 49. 50. - 1' 1'' = 6^{\circ} 48' 49''$ .

Longit. vraie en temps = 27. 15.

*Détermination de l'angle de la perpendiculaire, avec le Méridien de Brest.*

Je calcule enfin l'angle de la perpendiculaire avec le Méridien de Brest, au moyen de l'équation (1) du §. 87.

$$\begin{array}{rcl}
 + 19,9480174..... \log. r \text{ tang. } m'P. & & \\
 - 8,8990000..... \log. \sin. p. & & \\
 \hline
 11,0490174..... \log. \text{tang. angle.} & &
 \end{array}$$

Angle de la perpendiculaire avec le Méridien de Brest =  $84^{\circ} 53' 43''$ .

(130.) Par de semblables calculs, on trouvera les valeurs suivantes :

*Rapport des axes de la Terre, comme 177 à 178.*

Latitude vraie de Brest..... =  $48^{\circ} 22' 42''$ .

Longitude en temps..... = 27. 15.

*Rapport des axes de la Terre, comme 200 à 201.*

Latitude de Brest..... =  $48^{\circ} 22' 42''$ .

Longitude en temps..... = 27. 16.

Mém. 1778.

Aa



*Rapport des axes de la Terre, comme 229 à 230.*

Latitude de Brest..... =  $48^{\circ} 22' 41''$  -

Longitude en temps..... = 27. 17 -

*Rapport des axes de la Terre, comme 299 à 300.*

Latitude de Brest..... =  $48^{\circ} 22' 40''$  -

Longitude en temps..... = 27. 18. 5 -

*Rapport des axes de la Terre, comme 1 à 1.*

Latitude de Brest..... =  $48^{\circ} 22' 39''$  -

Longitude en temps..... = 27. 23 -

#### QUATRIÈME QUESTION.

(131.) On peut se proposer la question suivante :

Fig. 7. *Étant donnée la distance perpendiculaire  $FM'$ , d'un lieu  $F$  à une ligne  $M'M'$  perpendiculaire au Méridien d'un lieu  $M$  ; ainsi que la distance  $M'M'$  du point  $M'$  au point  $M$  intersection des deux perpendiculaires  $M'M'$ ,  $FM'$  ; on demande la latitude du lieu  $F$ , & sa longitude relativement au lieu  $M$ . On suppose d'ailleurs que l'on connoît la position du point  $M'$  pris sur le Méridien du lieu  $M$ , relativement au lieu  $M$ .*

Cette question se résout par les méthodes précédentes ; il ne s'agit que de décomposer la solution en deux parties. On regardera d'abord l'intersection  $M'$  des deux perpendiculaires, comme un premier lieu dont on déterminera la position par les méthodes précédentes ; c'est-à-dire par les méthodes relatives au cas où la ligne est perpendiculaire au Méridien au point de départ. Et en effet, ces méthodes s'y appliquent, puisque, relativement à cette intersection, l'on connoît la distance perpendiculaire  $M'M'$  au Méridien du lieu  $M$ , ainsi que la position du point  $M'$  pris sur ce Méridien, par rapport au lieu  $M$ . On déterminera donc la position du point  $M'$ , c'est-à-dire sa latitude, & sa longitude par rapport

au lieu  $M$ ; on déterminera de plus l'angle de la perpendiculaire  $MM'$  avec le Méridien  $M'P$ . Fig. 7.

Quand on aura ces données, on regardera le point  $M'$  comme un lieu relativement auquel il s'agira de déterminer la position du point  $F$ . Il est bien évident qu'il faudra alors faire usage des méthodes relatives aux lignes inclinées sur le Méridien au point de départ; & comme la ligne  $FM'$  est perpendiculaire à la ligne  $M'M'$ , elle fait évidemment, avec le Méridien  $M'P$ , un angle qui diffère de  $90^\circ$  de celui que fait la ligne  $M'M'$  avec le même Méridien  $M'P$ .

(132.) Pour rendre cette solution plus sensible, cherchons la position d'un lieu  $F$ , par rapport à Paris, d'après la condition que la distance perpendiculaire  $FM'$  de ce lieu, à la ligne  $M'M'$  perpendiculaire au Méridien de Paris & menée par Paris, est de 14614 toises du côté du Midi; & que de plus la distance  $M'M$  de l'intersection  $M'$  des deux perpendiculaires, au point  $M'$  où la perpendiculaire  $M'M'$  coupe le Méridien de Paris, est de 259168 toises.

(133.) Je cherche d'abord, conformément à ce qui a été dit, la position de l'intersection  $M'$ , par rapport à Paris; c'est-à-dire, je cherche la position du lieu situé sur la perpendiculaire passant par Paris, à une distance de 259168 toises du côté de l'Occident, & j'ai, en supposant les axes de la Terre dans le rapport de 177 à 178,

Latitude corrigée de l'intersection $M'$ .....	$\equiv 48^\circ 28' 22''$
Latitude vraie de l'intersection $M'$ .....	$\equiv 48. 37. 59.$
Longitude corrigée de l'intersection $M'$ .....	$\equiv 6. 51. 53.$
Longitude vraie de l'intersection $M'$ .....	$\equiv 6. 50. 52.$
Longitude en temps.....	$\equiv 27. 24.$
Angle de la perpendic. avec le Méridien $M'P$ .	$\equiv 84. 51. 0.$

Il ne s'agit plus que de déterminer la position du lieu  $F$ , relativement au point  $M'$ .

(134.) Pour y parvenir, j'observe, conformément au §. 131, que puisque l'angle de la perpendiculaire  $FM'$ ,

Fig. 7. avec le Méridien  $M'P$ , diffère de 90 degrés de l'angle de la perpendiculaire  $M'M'$  avec le même Méridien, on a angle  $D = 174^{\text{d}} 51' 0''$ . Il faut donc chercher la position du point  $F$ , par rapport au point  $M'$ , en regardant la ligne  $FM'$  comme une courbe du genre des perpendiculaires, mais qui fait avec le Méridien  $M'P$ , un angle de  $174^{\text{d}} 51' 0''$  au point de départ.

(135.) Si l'on calcule dans cette dernière hypothèse, on aura  $P = 15' 26''$ ;  $m'P =$  complément de la latitude corrigée de l'intersection  $m' = 41^{\text{d}} 31' 38''$ . D'ailleurs, à cause de l'équation (1) du §. 68,  $\mu'P = 3^{\text{d}} 24' 43''$ ; à cause de l'équation (1) du §. 69,  $A' = 48^{\text{d}} 35' 12''$ ; à cause des équations du §. 73,  $\gamma = 713'',3$ ;  $\gamma' = 710'',4$ ;  $p = 15' 23''$ ; à cause des équations (2), (3) & (4) du §. 72,  $A = 48^{\text{d}} 19' 49''$ ; latitude corrigée du lieu  $F = 48^{\text{d}} 12' 59''$ ; longitude corrigée du lieu  $F = 2' 5''$ ; à cause de l'équation (1) du §. 19, latitude vraie du lieu  $F = 48^{\text{d}} 22' 36''$ ; & enfin, à cause de l'équation (3) du §. 80, longitude vraie du lieu  $F$  par rapport au point  $M' = 2' 5''$ ; longitude vraie en temps  $= 8''$ .

Ces résultats ne diffèrent que de  $6''$  en latitude, & de  $1''$  de temps en longitude, des résultats trouvés précédemment.

*Remarque sur le calcul des Longitudes.*

(136.) Lorsque l'on calcule la position du point  $M'$  relativement au point  $M$ , ainsi que la position du lieu  $F$  relativement au point  $M'$ , on peut remarquer que les formules qui donnent les longitudes, sont absolument indifférentes au sens dans lequel ces longitudes sont comptées. Que la longitude du point  $M'$  soit orientale ou occidentale par rapport au lieu  $M$ , que la longitude du lieu  $F$  soit orientale ou occidentale par rapport au point  $M'$ , les formules sont absolument les mêmes. Comme cependant ces résultats doivent être combinés, il est indispensable de fixer le sens respectif des longitudes. En général, si le lieu  $F$  est plus boréal que

L'intersection  $M'$  des perpendiculaires  $FM'$ ,  $M'M'$ , il faudra Fig. 7.  
 ajouter à la différence en longitude du point  $M'$  par rapport  
 au lieu  $M$ , la différence en longitude du lieu  $F$  par rapport  
 au point  $M'$ ; il faudra au contraire soustraire la différence en  
 longitude du lieu  $F$  par rapport au point  $M'$ , de la différence  
 en longitude du point  $M'$  par rapport au lieu  $M$ , si le lieu  $F$   
 est plus austral que l'intersection  $M'$  des perpendiculaires  $FM'$ ,  
 $M'M'$ . Ce dernier cas est celui de l'exemple proposé.

*Examen d'une Question importante.*

(137.) Lorsque l'on veut calculer la position d'un lieu  $F$  par  
 rapport à un lieu  $M$ , peut-on indifféremment regarder ce  
 lieu comme situé sous une certaine perpendiculaire  $F\mu$ , qui  
 coupe le Méridien du lieu  $M$  à la distance  $\mu M$  du lieu  $M$ ,  
 & dont la distance perpendiculaire au Méridien du lieu  $M$   
 égale  $F\mu$ ; ou doit-on considérer absolument la distance  
 perpendiculaire  $FM'$ , du lieu  $F$ , à la ligne  $M'M'$  perpen-  
 diculaire au Méridien du lieu  $M$ , ainsi que la distance  
 $M'M'$  de l'intersection  $M'$ , au Méridien du lieu  $M$ ? En un  
 mot peut-on rapporter sur le Méridien du lieu  $M$ , la  
 distance  $FM'$  du lieu  $F$  à la perpendiculaire  $M'M'$ !

(138.) Les calculs auxquels nous venons de nous livrer,  
 nous mettent en état de résoudre cette question. Il suit de  
 ces calculs, que ces deux Problèmes sont réellement différens.  
 Si cependant les distances que l'on considère n'étoient que  
 d'un petit nombre de degrés, l'on pourroit, sans erreur notable,  
 substituer l'une des questions à l'autre; il seroit néanmoins  
 nécessaire d'avoir égard à cette différence dans des calculs  
 très-rigoureux.

CINQUIÈME QUESTION.

(139.) On peut encore se proposer la question suivante:

*Étant données la latitude vraie de deux lieux  $M$ ,  $F$ , & Fig. 8.  
 leur différence en longitude, déterminer la distance de ces deux  
 lieux, sur le sphéroïde.*

Fig. 3. Pour résoudre cette question, on se rappellera que l'on a l'équation suivante,

$$(1) \text{ longit. corr.} = \text{long. vraie} + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\rho^2} \frac{\sin. m'P \times \sin. D}{\rho} \text{perpend. corr.}$$

Dans cette équation,  $m'P$  est le complément de la latitude corrigée du lieu  $M$ ; quant à l'angle  $D$ , c'est l'angle de la perpendiculaire vraie avec le Méridien du lieu  $M$ ; & cet angle est égal à l'angle de la perpendiculaire corrigée avec le Méridien corrigé du lieu  $M$ ; de plus, la perpendiculaire corrigée n'est autre chose que la ligne qui, sur le sphéroïde, joint les points  $m$ ,  $F'$ . Il est évident, que dans le triangle sphérique  $mPF'$ , le côté  $mP$  est le complément de la latitude corrigée du lieu  $M$ , le côté  $PF'$  est le complément de la latitude corrigée du lieu  $F$ , & l'angle  $P$  est la différence en longitude corrigée de ces deux lieux; si donc l'on prend pour valeur de l'angle  $P$ , la longitude vraie, l'on aura des expressions de l'angle  $PmF'$ , & du côté  $mF'$ , qui ne différeront des véritables valeurs, que par des termes de l'ordre  $\frac{\Delta^2}{\rho^2}$ ; & comme ces quantités entrent dans un terme multiplié par  $\frac{\Delta^2}{\rho^2}$ , on aura une valeur de la longitude corrigée, exacte aux termes près de l'ordre  $\frac{\Delta^2}{\rho^2}$ . D'ailleurs, l'angle que nous avons nommé  $D$ , n'est autre chose que l'angle  $PmF'$ .

(140.) La Trigonométrie sphérique nous apprend que l'on a

$$(1) \text{ tang. } \left( \frac{1}{2} D - \frac{1}{2} PF'm \right) = \frac{\cotang. \left( \frac{1}{2} \text{long.} \right) \sin. \frac{1}{2} (\text{lat. corr. } M - \text{lat. corr. } F)}{\cosin. \frac{1}{2} (\text{latitude corr. } M + \text{latitude corr. } F)}$$

$$(2) \text{ tang. } \left( \frac{1}{2} D + \frac{1}{2} PF'm \right) = \frac{\cotang. \left( \frac{1}{2} \text{long.} \right) \cos. \frac{1}{2} (\text{lat. corr. } M - \text{lat. corr. } F)}{\sin. \frac{1}{2} (\text{latitude corrigée } M + \text{latitude corrigée } F)}$$

$$(3) \sin. (\text{perpend. corrigée}) = \frac{\sin. (\text{longitude}) \times \cos. (\text{latitude corrigée du lieu } F)}{\sin. D}$$

Nous pouvons donc connoître exactement la longitude

corrigée du lieu  $F$  par rapport au lieu  $M$ , au moyen de Fig. 8. l'équation (1) du §. 139.

(141.) On connoîtra pareillement le véritable angle  $D$  & la véritable perpendiculaire corrigée qui satisfont au Problème, au moyen des équations (1), (2), (3) du §. 140, dans lesquelles on emploiera la longitude corrigée déterminée ci-dessus, au lieu de la longitude vraie dont on aura fait usage dans le premier calcul. Au moyen des équations (1) des §§. 68 & 69, on calculera la valeur de  $\mu'P$  & de  $A'$ , en remarquant que  $m'P$  qui entre dans l'expression de  $\mu'P$  est le complément de la latitude corrigée du lieu  $M$ ; on déterminera ensuite la valeur de  $P$ , au moyen des équations du §. 73, en observant que dans la valeur de  $\gamma$  l'on peut substituer  $p$  à  $P$ ; l'on réduira  $P$  en toises, au moyen de l'équation (3) du §. 52, & la question sera résolue.

On n'oubliera pas aussi que nous entendons par  $F$ , celui des deux lieux dont la latitude est la plus petite, & par  $M$  celui dont la latitude est la plus grande.

*Remarques sur les Questions résolues dans ce Mémoire.*

(142.) Dans la Connoissance des Temps, on donne pour longitude occidentale de Brest,  $27' 23''$  de temps; & pour latitude,  $48^d 22' 55''$ .

Les Éclipses du 1.<sup>er</sup> Avril 1764 & du 4 Juin 1769, m'ont donné chacune pour longitude de Brest,  $23' 14'',5$  de temps. Cet accord m'a paru d'autant plus frappant, que dans mon calcul, tout ce qui dépend des élémens de la Lune est évanoui, & qu'il ne reste absolument que les erreurs des observations; de sorte que, si les Observateurs ont bien observé, ainsi qu'ils l'attestent, les résultats sont hors de toute atteinte. J'ajouterai que le dernier passage de Vénus sur le disque du Soleil, a conduit M. de la Lande à une semblable conclusion, quoiqu'il ait cru devoir s'y refuser & suspecter les observations.

Fig. 3. (143.) Si l'on rapproche ces déterminations, des calculs de ce Mémoire, on conclura que les mesures géodésiques calculées rigoureusement, ne s'éloignent pas du résultat trouvé par les observations astronomiques; & que même un des rapports des axes de la Terre, regardé comme probable (celui de 177 à 178), donne à une demi-seconde près la longitude de Brest trouvée astronomiquement.

(144.) Ne doit-on pas conclure de ces recherches, qu'en combinant de très-bonnes observations astronomiques avec des opérations géodésiques très-exactes, & des calculs rigoureux, il ne seroit peut-être pas impossible de déterminer le degré d'aplatissement de la Terre, qui satisfait aux observations faites en France?

(145.) Je ne puis cependant dissimuler que, si l'on suppose avec M.<sup>rs</sup> Cassini, la distance de Perpignan à la Méridienne de Paris, de 23805 toises du côté de l'Orient, la distance du pied de cette perpendiculaire, à l'Observatoire de Paris, de 350098 toises du côté du midi, & la latitude de Perpignan de  $42^{\circ} 41' 55''$ ; cette latitude est plus grande de  $13''$ ,  $10''$ ,  $7''$ ,  $2''$ , & plus petite de  $12''$ , que la latitude que l'on conclut respectivement des rapports de 177 à 178, de 200 à 201, de 229 à 230, de 299 à 300 & de 1 à 1. Je soumets ces réflexions aux Astronomes.

(146.) Je ne m'étendrai pas davantage sur les perpendiculaires à la Méridienne. Je crois n'avoir omis aucune des considérations qui peuvent être utiles dans la pratique; & l'on peut regarder ce Mémoire, comme un Traité complet de ces courbes.



**OBSERVATIONS**

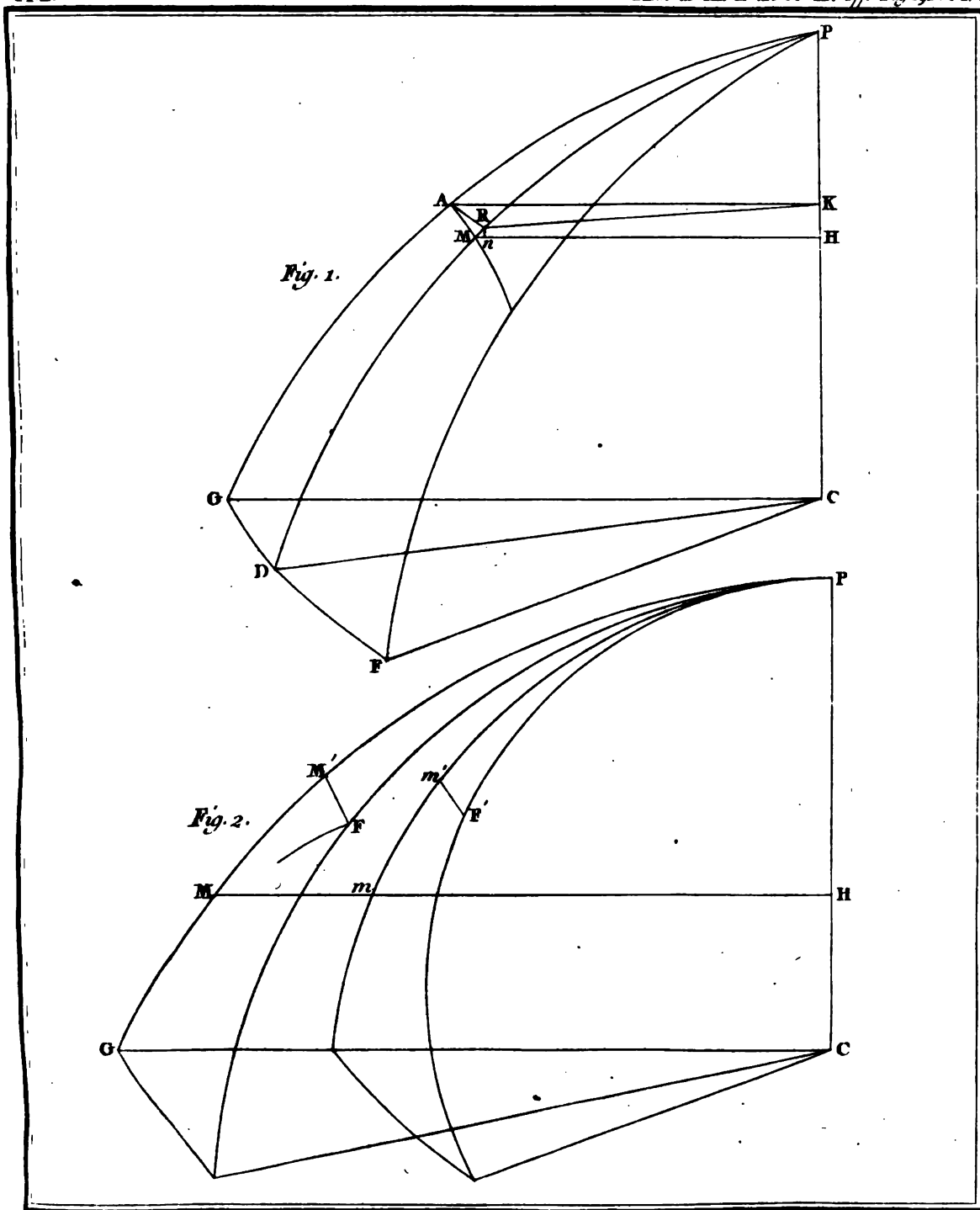






Fig. 3.

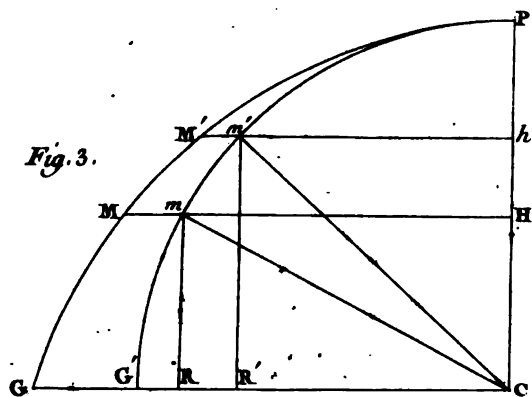


Fig. 4.

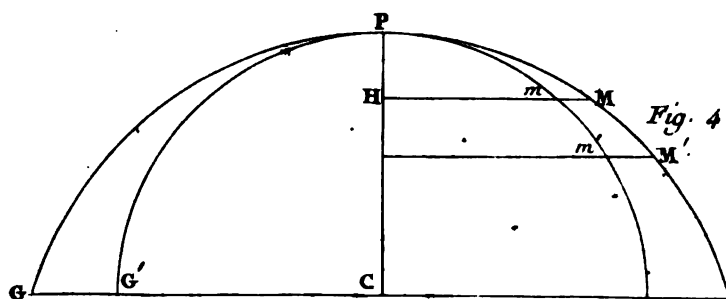
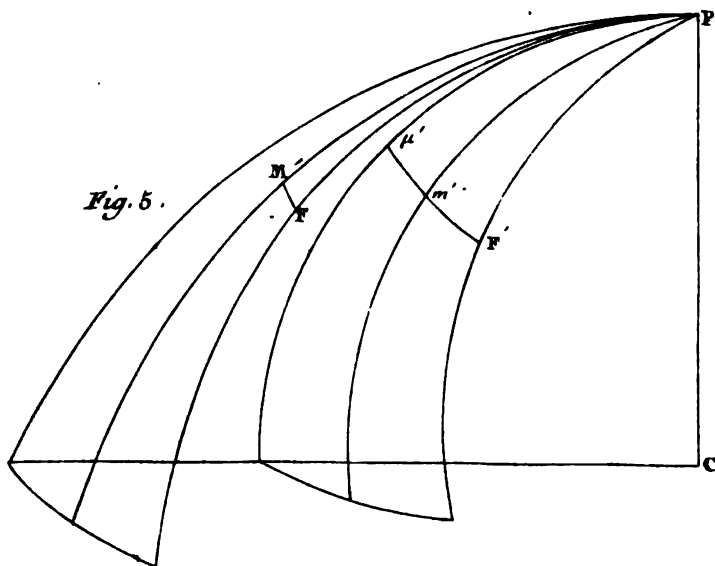
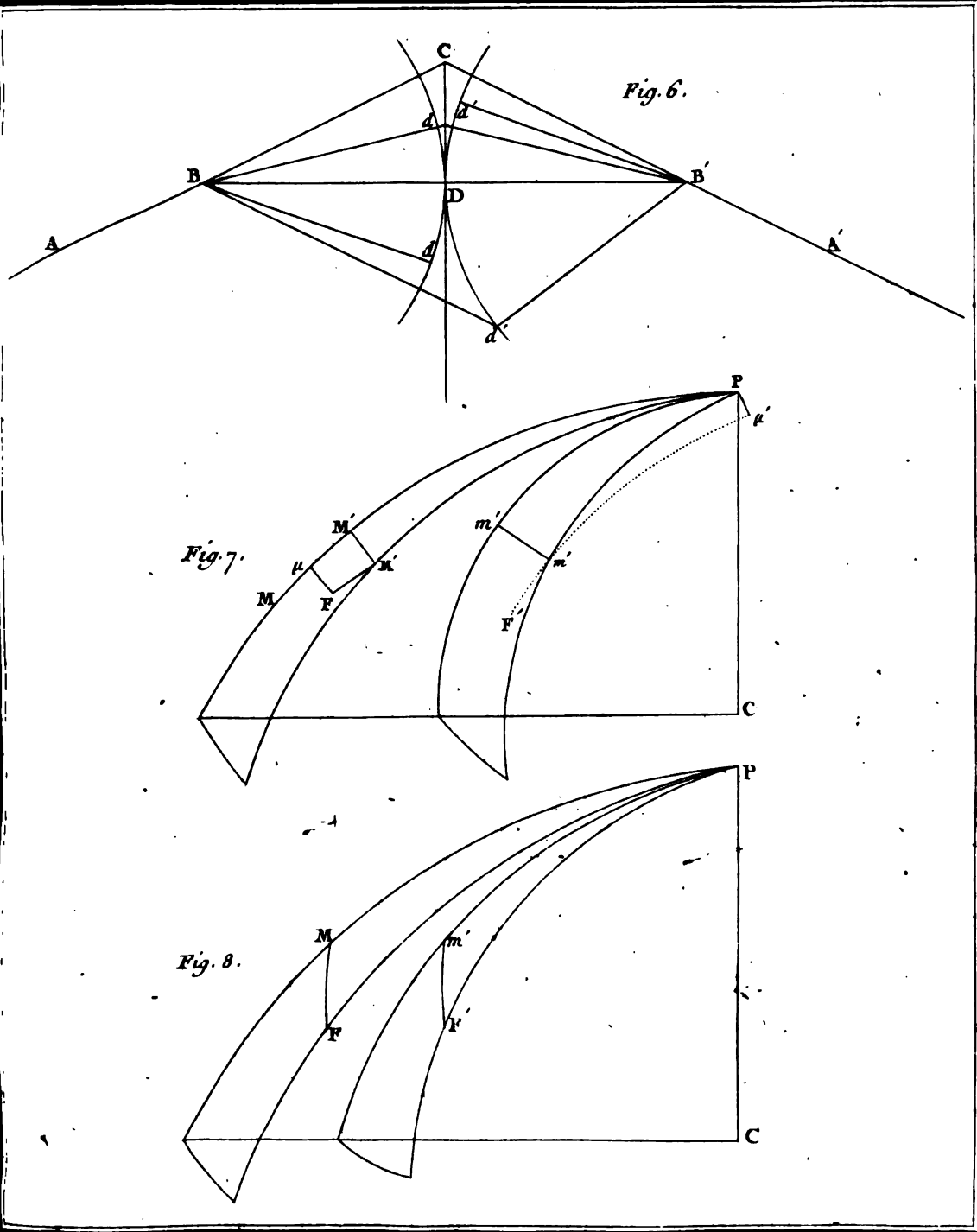


Fig. 5.









**OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES**  
**FAITES AU CHÂTEAU DE SARON (a),**  
**PENDANT L'AUTOMNE DE 1778.**

Par M. MESSIER.

**J**E passai les Vacances de notre Académie dans la Terre de Saron, qui appartient à M. le Président Bochart de Saron, située en Champagne à vingt-cinq lieues de Paris, & presque à la réunion des deux rivières de la Seine & de l'Aube.

Présenté  
le 23 Déc.  
1778.  
Lu  
le 4 Août  
1779.

Par plusieurs Observations, faites précédemment à Saron, la position du Château avoit déjà été déterminée d'une manière fort précise ; & principalement lors de l'Observation du passage de Vénus au-devant du Soleil, le 3 Juin 1769 : elle fut faite par M. de Saron, avec sa lunette achromatique de 3 pieds  $\frac{1}{2}$ , qui grossissoit soixante-huit fois. Voici les détails de cette Observation. « Des nuages très-épais & très-noirs, empêchèrent d'observer le premier contact de Vénus ; mais au-dessous de ces nuages, qui formoient comme un rideau, l'horizon étoit fort net, & M. de Saron vit aussi bien qu'il fut possible de voir, le contact du bord intérieur de Vénus avec le Soleil ; mais l'ondulation excessive, causée par les vapeurs de l'horizon, rendoit le disque du Soleil très-mal terminé, & Vénus paroissoit toute raboteuse, ce qui pouvoit produire sur cette observation une incertitude estimée d'environ 10 secondes de temps. »

Temps vrai à Saron du dernier contact de Vénus, à 7<sup>h</sup> 44' 2" du soir (b).

(a) Ce château est à l'Orient de Paris de 52,902 toises, & plus au Sud de 14,823 : la différence des Méridiens entre l'Observatoire royal, de 5' 39" de temps à l'Orient, & la hauteur du Pôle de 48<sup>d</sup> 33' 45".

(b) Cette observation est rapportée & discutée dans nos Mémoires, par M. le Monnier, année 1770, page 232.

Mém. 1778.

194 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

La Pendule à secondes avoit été réglée le même jour par des hauteurs correspondantes du Soleil.

L'éclipse de Soleil, le lendemain du passage de Vénus le 4 Juin matin, y fut aussi observée par M. de Saron, avec la même lunette achromatique.

M. du Séjour a déduit de cette Observation, la différence des Méridiens entre l'Observatoire royal de Paris & le château de Saron; par le commencement de l'Éclipse, a trouvé  $5' 39''$ , & par la fin, également  $5' 39''$  (c).

La hauteur du Pôle du château de Saron, a été déterminée en 1766 & 1767, par des hauteurs méridiennes du Soleil & par des hauteurs d'Étoiles circonpolaires dans leurs méditations inférieures & supérieures, prises avec deux quarts de cercle de 18 pouces & d'un pied de foyer, faits à Londres par Bird.

*Résultat des Observations pour la hauteur du Pôle de Saron.*

1766. Septembre 29, par le Soleil.....	48 <sup>d</sup> 33' 56"
Septembre 30, <i>idem</i> .....	48. 33. 47.
Octobre 2, <i>idem</i> .....	48. 33. 51.
Octobre 3, <i>idem</i> .....	48. 33. 50.
Octobre 4, <i>idem</i> .....	48. 33. 48.
Octobre 4, par γ du Capricorne...	48. 33. 16.
Octobre 4, par ε de Pégase.....	48. 33. 5.
Octobre 23, par le Soleil.....	48. 33. 48.
Octobre 27, <i>idem</i> .....	48. 34. 2.
Octobre 27, <i>idem</i> .....	48. 34. 4.
Novembre 10, <i>idem</i> .....	48. 34. 10.
1767. Novembre 28, par l'Étoile polaire....	48. 33. 42.
Décembre 3, <i>idem</i> .....	48. 33. 23.
Par un milieu.....	48. 33. 45.

M. de Saron avoit réuni à sa Terre, l'automne dernière 1778, plusieurs instrumens, savoir, sa lunette achromatique

---

(c) Mémoires de l'Académie, année 1771, page 235.

de 3 pieds  $\frac{1}{2}$ ; un petit télescope Grégorien d'un pied de foyer, monté sur une machine parallactique, garnie d'un micromètre filaire; un quart-de-cercle d'un pied de rayon, & plusieurs Pendules à secondes.

Le ciel fut presque continuellement couvert, avec pluie & grand vent pendant l'automne: ces mauvais temps rendirent les observations peu nombreuses.

Le 29 Septembre, j'arrivai au château de Saron; le soir, le ciel étoit beau & serein: je dirigeai à la Lune, la lunette achromatique, & je vis dans le voisinage de cette Planète, deux Étoiles de cinquième & de sixième grandeur, toutes deux appartenantes à la constellation du Sagittaire, désignées dans les Catalogues, sous la lettre *h* 1 & 2, & je reconnus que l'une des deux *h*, sixième grandeur, seroit éclipsée par le bord obscur de la Lune: elle n'étoit pas annoncée.

M. de Saron fit l'observation avec son télescope d'un pied, & il observa

L'immersion au bord obscur à..... 9<sup>h</sup> 26' 17<sup>"</sup>  $\frac{1}{2}$ .

Je l'observai avec la lunette achromatique à..... 9. 26. 16  $\frac{1}{2}$ .

L'Étoile *h* passa au-dessous du bord de la Lune.

Le même soir, comme la Pendule n'étoit pas encore réglée, M. de Saron, pour avoir l'heure, prit des hauteurs de deux Étoiles, l'une au Levant, l'autre au Couchant: ces deux Étoiles étoient  $\alpha$  du Bélier &  $\alpha$  d'*Ophiucus*; les hauteurs observées ayant été calculées, il en conclut l'heure de la Pendule; & les résultats entre l'heure déduite des hauteurs observées de  $\alpha$  du Bélier & l'heure déduite des hauteurs observées de  $\alpha$  d'*Ophiucus*, ne différant que d'environ 3 secondes: par un milieu, il a conclu l'heure aussi exactement qu'on l'obtiendrait par des hauteurs correspondantes à la manière ordinaire, & l'erreur qui auroit pu se trouver dans les hauteurs absolues, se trouve détruite, ou du moins corrigée.

M. Méchain, attaché au Bureau des Plans de la Marine, observa à Paris, le 29 Septembre 1778, la même Étoile *h* du



Sagittaire au bord obscur de la Lune, à  $9^h 17' 50''$  de temps vrai; l'Observation fut faite à 6 secondes  $\frac{1}{2}$  de temps à l'Orient de l'Observatoire royal. De l'Observation de M. de Saron & de la sienne, il a déduit la différence des Méridiens entre le château de Saron & l'Observatoire royal de Paris, de  $5' 38''\frac{1}{2}$  de temps, Saron à l'Orient; ce qui s'accorde avec ce qu'a donné l'Observation de l'éclipse de Soleil du 4 Juin 1769.

Le 19 Octobre matin, j'observai, par un beau temps, l'immersion du premier satellite de Jupiter; j'employai pour cette Observation, la lunette achromatique qui grossissoit soixante-huit-fois; je cessai de voir le Satellite entrant dans l'ombre, à  $5^h 48' 15''$  de temps vrai: observation excellente.

Le 27 Novembre matin, par un beau temps, mais le ciel n'étoit pas pur, Jupiter paroïssoit mal terminé, & les bandes se voyoient avec peine; j'observai l'immersion du premier Satellite avec la lunette achromatique; je cessai de le voir entrant dans l'ombre à  $4^h 9' 52''$ , temps vrai: Observation un peu douteuse.

On avoit annoncé une Éclipse de Lune pour le 4 Décembre matin; nous avons préparé nos instrumens pour faire cette observation; le mauvais temps de la veille & des jours précédens ne donnoient presque aucune espérance de pouvoir la faire; le Ciel fut constamment couvert jusqu'à 6 heures du matin qu'il commença à s'éclaircir, & peu de minutes après il devint presque entièrement serein: l'éclipse étoit dans son milieu alors; l'ombre étoit terminée, & elle se distinguoit très-bien de la pénombre. J'observois la sortie des taches de l'ombre avec la lunette achromatique qui grossissoit soixante-huit fois, tandis que M. de Saron observoit la distance des cornes de l'ombre, avec son télescope d'un pied, au moyen du micromètre filaire qui y étoit adapté. Voici nos Observations:

*Observations des TACHES.*

TEMPS VRAI.	NUMÉR. des TACHES.	
6 <sup>h</sup> 12' 20"	3	<i>Aristarchus</i> quitte l'ombre.
6. 15. 35	11	<i>Copernicus</i> quitte l'ombre.
6. 17. 20	G	<i>Mare secunditatis</i> presque à moitié sortie.
6. 19. 20	E	<i>Mare tranquillitatis</i> à moitié sortie.
6. 26. 52	24	<i>Manilius</i> sort.
6. 28. 52	32	<i>Promontorium acutum</i> quitte l'ombre.
6. 32. 22	8	<i>Heraclides</i> au bord de l'ombre.
6. 33. 32	7	<i>Harpalus</i> au bord de l'ombre.
6. 36. 56	25	<i>Menelaüs</i> au bord de l'ombre.
6. 38. 8	12	<i>Helicon</i> au bord de l'ombre.
6. 38. 53	C	<i>Mare imbrium</i> à moitié sortie.
6. 40. 53	F	<i>Mare serenitatis</i> commence à sortir.
6. 40. 53	18	<i>Archimedes</i> au bord de l'ombre.
6. 46. 9	17	<i>Plato</i> à moitié sorti.
6. 47. 9	G	<i>Mare secunditatis</i> quitte l'ombre.
6. 48. 24	F	<i>Mare serenitatis</i> à moitié sortie.
6. 50. 24	34	<i>Promontorium somnii</i> quitte l'ombre.
6. 54. 24	H	<i>Mare crisum</i> commence à sortir.
6. 54. 24	F	<i>Mare serenitatis</i> quitte l'ombre.
6. 55. 25	27	<i>Possidonius</i> quitte l'ombre.
6. 59. 5	H	<i>Mare crisum</i> à moitié sortie.
7. 1. 25	36	<i>Cleomedes</i> quitte l'ombre.
7. 3. 45	H	<i>Mare crisum</i> quitte l'ombre.
7. 5. 55	33	<i>Messahala</i> quitte l'ombre.

Quelques secondes après cette dernière Observation, un nuage épais qui bordoit l'horizon au-dessous de la Lune, s'éleva & la couvrit entièrement, peut-être une minute ou deux au plus, avant la fin; & l'observation de la fin ne pût avoir lieu.

*Distances des Cornes de l'Ombre.*

TEMPS VRAI.	PARTIES du MICROM.	DISTANCE des CORNES.
6 <sup>h</sup> 24' 24"	2400	30' 37"
6. 26. 14	un peu moins.	
6. 27. 34	2374	30. 17
6. 29. 44	un peu moins.	
6. 30. 40	<i>idem.</i>	
6. 31. 30	<i>idem.</i>	
6. 42. 0	2236	28. 31
6. 44. 40	2194	27. 59
6. 46. 30	2021	25. 47
6. 52. 30	1790	22. 23
6. 54. 30	1704	21. 17
7. 1. 50	1055	13. 27
7. 6. 14	726	9. 16

Les premières distances des cornes , ainsi que les premières Observations des taches, sont un peu douteuses : l'ombre vers son milieu paroissoit comme stationnaire.

La marche de la Pendule à secondes , pendant le cours des Observations, avoit été connue par des hauteurs correspondantes du Soleil & par des hauteurs d'Étoiles, savoir, les 29 Septembre, 5, 10 & 27 Octobre, 2 Novembre, 2, 3 & 4 Décembre.



*M É M O I R E*  
*SUR LE MOUVEMENT D'UN PENDULE*  
*DONT LA LONGUEUR EST VARIABLE.*

Par M. l'Abbé BOSSUT.

I.

**L**E mouvement des Pendules simples ou composés, qui oscillent autour d'un axe, en demeurant constamment à la même distance de cet axe, est connu depuis long temps des Géomètres; mais personne, du moins que je sache, n'a encore examiné le mouvement d'un poids suspendu par un fil, qui se raccourcit ou s'allonge suivant une certaine loi, tandis que le corps oscille à droite & à gauche de la verticale. On trouve à la vérité dans le Recueil de l'Académie pour l'année 1707, un Écrit de M. Carré sur le mouvement d'un Pendule qui se raccourcit uniformément; mais l'auteur suppose que le raccourcissement se fait par intervalles, & lorsque le fil est arrivé à la verticale, de manière que le poids décrit toujours des arcs-de-cercle: ici je suppose que le fil se raccourcit ou s'allonge continuellement pendant que le poids oscille, ce qui change totalement la nature de la question. Ce nouveau Problème n'a paru curieux en lui-même; & je crois qu'il peut avoir quelque application dans la mécanique-pratique: par exemple, qu'un seau d'eau attaché à une longue corde qui le tire, ait été détourné par une cause quelconque de la verticale, & qu'en conséquence il oscille en montant, on peut avoir intérêt de connoître si ces oscillations ne ralentiront pas d'une manière sensible le mouvement ascensionnel du seau; on peut demander aussi les variations que le mouvement oscillatoire produira dans les tensions de la corde, &c. Ces considérations me font espérer que l'Académie voudra bien accorder quelques momens d'attention à l'examen

Lû le  
5 Septembre  
1778.

200 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
théorique de ces différentes questions, que j'ai l'honneur de  
mettre sous ses yeux.

I I.

Fig. 1 & 2. Soit donc un seau  $S$  attaché à une corde considérée comme non-pesante, qui va passer sur la poulie fixe  $C$ , & qui est tirée continuellement par un agent quelconque; cet agent est, par exemple, une main appliquée à la manivelle d'un cylindre  $K$ , autour duquel la corde s'enveloppe, ou bien un poids  $N$  qui descend verticalement. Que ce seau, au lieu de monter directement suivant la verticale  $AC$ , ait été détourné, au premier instant, de cette ligne, par telle cause qu'on voudra, & qu'il décrive la courbe  $SMB$ ; on demande la nature de cette courbe, & tout ce qui est relatif au mouvement du seau, en supposant que le fil conserve toujours la direction rectiligne?

I I I.

Je suppose que le seau partant du point donné  $S$  & parvenu au point indéterminé  $M$  au bout d'un certain temps, décrive l'élément  $Mm$  pendant le premier élément de ce temps. Ayant prolongé  $Mm$ , je prends sur ce prolongement la petite partie  $mh$ , pour exprimer l'espace que le corps  $M$  décrirait pendant le second élément du temps, si étant arrivé en  $m$ , il conservait simplement par son inertie sa vitesse suivant  $Mm$ ; de plus, je représente par la petite verticale  $mr$ , l'espace que la gravité fait parcourir au corps  $M$  pendant qu'il décrirait  $mh$ . On voit, en construisant le parallélogramme  $mrqh$ , que la diagonale  $mq$  exprimera l'espace que le corps  $M$  parcourrait librement, en vertu des deux vitesses  $mh$ ,  $mr$  combinées ensemble: mais réellement le corps sera ramené de  $q$  en  $m'$  par la puissance qui tire le fil & décrira la diagonale  $mm'$  du second parallélogramme  $mqm't$ , laquelle est ainsi l'élément de la courbe consécutif à  $Mm$ ; d'où l'on voit que si l'on nomme  $M$  la masse du seau,  $T$  la tension accélératrice du fil,  $dt$  l'élément variable du temps, on aura d'abord  $T = \frac{M \times qm'}{(dt \pm ddt)^2}$ .

IV.

## I V.

Du point  $S$ , soit menée la perpendiculaire  $SA$  à  $CA$ ; & soient  $AP$ ,  $PM$  les coordonnées perpendiculaires pour le point  $M$  de la courbe  $SMB$ ; qu'on décrive du point  $C$ , avec les rayons  $CM$ ,  $Cm$ , les arcs  $QMZ$ ,  $qm$ , dont le premier rencontre en  $Z$  la droite  $Cm$  prolongée; du point  $m$ , avec les rayons  $mq$ ,  $mm'$ , soient décrits les petits arcs  $qu$ ,  $m'l$  dans les angles  $qmh$ ,  $m'mh$ ; & des points  $M$ ,  $m$ , soient menées les perpendiculaires  $MR$ ,  $mR$ , l'une à l'ordonnée  $MP$ , l'autre à l'axe  $CP$ .

$$\text{Supposons } \left\{ \begin{array}{l} \text{la distance initiale du feu } S \text{ au point } C \dots \approx a. \\ \text{la droite donnée } CA \dots \dots \dots = b. \\ AP \dots \dots \dots = x. \\ PM \dots \dots \dots = y. \\ SQ \dots \dots \dots = q. \\ CM \dots \dots \dots = a - q = r. \\ \text{l'angle } PCM \text{ pour le rayon } 1 \dots \dots \dots = z. \\ Mm \dots \dots \dots = ds. \\ \text{la gravité} \dots \dots \dots = g. \end{array} \right.$$

Chacune des deux petites lignes égales  $mr$ ,  $hq$ , aura pour expression  $g(dt + ddt)^2$ : de plus, on aura la proportion

$$dt : d\dot{t} + ddt :: Mm(ds) : mh = \frac{ds(dt + ddt)}{dt}.$$

Les deux triangles rectangles semblables  $MRm$ ,  $huq$ , donnent  $hu = \frac{MR \times hq}{Mm}$ ;  $qu = \frac{mR \times hq}{Mm}$ : donc, en substituant pour les lignes  $Mm$ ,  $MR$ ,  $mR$ ,  $hq$ , leurs valeurs analytiques, on aura  $hu = \frac{gdx(dt + ddt)^2}{ds}$ ;  $qu = \frac{gdy(dt + ddt)^2}{ds}$ . Ainsi  $mu = mh - hu = \frac{ds(dt + ddt)}{ds} - \frac{gdx(dt + ddt)^2}{ds}$ ; &  $ul = ml - mu$

Mém. 1778.

Cc

$$\begin{aligned}
&= mm' - mu = (ds + dds) - \frac{ds(d + ddt)}{dt} + \frac{gdx(dt + ddt)^2}{ds} \\
&= dds - \frac{dsddt}{dt} + \frac{gdx(dt + ddt)^2}{ds}.
\end{aligned}$$

V.

Les trois triangles rectangles semblables  $qui, m'li, MZm$ ,  
 donnent  $qm' = ul \times \frac{iq}{iu} = ul \times \frac{Mm}{mZ} = \frac{dsdds}{dq}$   
 $-\frac{ds^2ddt}{dqdt} + \frac{gdx(dt + ddt)^2}{dq}$ ; &  $uq + lm' = ul \times \frac{uq}{iu}$   
 $= ul \times \frac{MZ}{mZ}$ ; ou bien  $lm' = ul \times \frac{MZ}{mZ} - uq$   
 $= \frac{rdz}{dq} [dds - \frac{dsddt}{dt} + \frac{gdx(dt + ddt)^2}{ds}] - \frac{gdy(dt + ddt)^2}{ds}.$

V I.

Cela posé, en substituant pour  $qm'$  sa valeur dans l'équation  
 $T = \frac{M \times qm'}{(dt + ddt)^2}$ , & négligeant les infiniment petits du  
 troisième ordre, on aura.

$$(A) T = M \left( \frac{dsdds}{dqdt^2} - \frac{ds^2ddt}{dqdt^2} + \frac{gdx}{dq} \right);$$

quantité qu'on pourra changer en une autre qui ne contienne  
 qu'une seule variable, lorsqu'on aura l'expression du temps,  
 & l'équation de la courbe  $SMB$ .

De plus, en égalant la valeur trouvée ci-dessus pour  $lm'$ ,  
 à sa valeur générale, qui est, comme on fait,  $\frac{dydds - dxddy}{ds}$ ,  
 on aura l'équation

$$\frac{rdz}{dq} \left( dds - \frac{dsddt}{dt} + \frac{gdxdt^2}{ds} \right) - \frac{gdydt^2}{ds} = \frac{dydds - dxddy}{ds},$$

laquelle devient (en observant que  $dq = -dr$ ;  
 $x = b - r \cos. \zeta$ ;  $y = r \sin. \zeta$ ;  $ds^2 = dr^2 + rrd\zeta^2$ )

$$rdr^2dtddz + 2dr^2dtdz + r^2dtdz^2ddz + 2r^2drdz^2dt \\ + g \sin. z dr^2 dt^3 + g \sin. z . r^2 dz^2 dt^3 - r dr^2 dz ddt \\ - r^2 dz^2 ddt = 0;$$

ou bien (en divisant tout par  $dr^2 + rrdz^2$ ),

$$(B) rdtddz + 2drdzdt - rdzddt + gdr^2 \sin. z = 0.$$

Substituant dans cette dernière équation pour  $dt$  &  $ddt$ , leurs valeurs données par la nature du mouvement de la puissance qui tire la corde, on aura l'équation de la courbe  $SMB$ , exprimée en  $r, z, dr, dz, ddr$  &  $ddz$ .

## V I I.

Supposons, par exemple, que le fil soit tiré par un cylindre *K*, autour duquel il s'enveloppe, & qui tourne uniformément sur son axe; alors on a  $dt = \frac{dq}{n} = - \frac{dr}{n}$ ,  $n$  étant la quantité dont le fil se raccourcit ou s'enveloppe sur le cylindre *K* pendant l'unité de temps. Faisons  $dt$  constant, ou  $ddt = 0$ , & par conséquent aussi  $ddr = 0$ , l'équation (B) deviendra

$$(C) rddz + 2drdz + \frac{gdr^2}{n^2} \sin. z = 0;$$

ou bien, en supposant  $\frac{g}{n^2} = m$ , cos.  $z = p$ ,

$$(D) rddp (1 - pp) + 2drdp (1 - pp) + rpdp^2 \\ - mdr^2 (1 - pp)^2 = 0.$$

## V I I I.

L'équation (D) n'est généralement intégrable par aucune méthode connue; mais si on suppose que les oscillations du corps *M* soient fort petites, alors, en prenant  $\sin. z = z$ , l'équation (C) deviendra  $rddz + 2drdz + mzd r^2 = 0$ ; d'où il suit que si l'on suppose  $z = c^{sr^2}$ , on aura l'équation différentielle du premier ordre,

Cc ij



$$(E) \quad rdp + pprdr + 2pdr + mdr = 0.$$

Maintenant je fais  $p = u - \frac{1}{r}$ , & j'obtiens la transformée

$$(F) \quad du + udr + mr^{-1}dr = 0,$$

qui se rapporte à l'un des cas de l'équation de *Riccati*; mais ce cas est un de ceux où l'équation n'est pas intégrable par les méthodes connues jusqu'ici. Ainsi, pour achever la solution de notre Problème, on sera réduit à construire l'équation précédente par points, ou à l'intégrer par approximation, au moyen des séries. Voyez le *Calcul intégral* de *M. Euler*, t. I.

# X.

Le cylindre  $K$  tournant uniformément sur son axe, on voit, par l'équation  $(A)$  de l'article VI, c'est-à-dire ici,  $T = -M \left( \frac{r^2 ds dds}{dr^3} + \frac{g ds}{dr} \right)$ , que la tension du fil est variable d'un instant à l'autre, & que par conséquent l'agent qui fait tourner le cylindre est aussi variable.

# X.

Supposons maintenant que les oscillations du seau  $M$  étant toujours fort petites, la puissance qui fait tourner le cylindre soit constante, en sorte que le mouvement de rotation du cylindre ne soit plus uniforme; alors en nommant  $f$  la tension constante du fil, & faisant  $dt$  constant, on aura  $f = -M \left( \frac{ds dds}{dt^2 dr} + \frac{g ds}{dr} \right)$ ; ce qui donne sensiblement  $dt^2 = \frac{-M ddr}{f - gM}$ . Donc (en faisant, pour abréger,  $\frac{f - gM}{M} = k$ ),  $d dr = -k dt^2$  &  $dr = A dt - k t dt$ , la constante  $A$  doit être telle, qu'à l'origine  $S$  lorsque  $t = 0$ , la vitesse  $\frac{dr}{dt}$  soit donnée. Nommons  $n$  cette vitesse; on

aura  $A = n$ ; donc  $dr = ndt - ktdt$  &  $r = B + nt - \frac{ktt}{2}$ . La constante  $B$  doit être telle, que  $t = 0$  donne  $r = a$ ; donc en général  $r = \frac{2a + 2nt - ktt}{2}$ , &  $t = \frac{n \pm \sqrt{[n^2 + 2k^2(a-r)]}}{k}$ ;  $dt = \frac{-kdr}{\sqrt{[n^2 + 2k^2(a-r)]}}$ ; on a donc  $r$  en  $t$ , & réciproquement  $t$  en  $r$ .

Cela posé, en faisant  $dt$  constant, & supposant  $z = cspdt$ , l'équation (B) devient  $rdp + pprdr + 2pdr + gdt = 0$ ;

ou bien  $dp + pprdr + 2pr^{-1}dr - \frac{gkdr}{r\sqrt{[n^2 + 2k^2(a-r)]}} = 0$ .

Soit  $p = u - \frac{1}{r}$ ; on aura la transformée  $du + uudr - \frac{gkdr}{r\sqrt{[n^2 + 2k^2(a-r)]}} = 0$ , qui se rapporte encore à un cas non intégrable de l'équation de *Riccati*: on aura donc recours aux méthodes d'approximation de M. Euler.

## X I.

Si le seau  $M$ , toujours oscillant, au lieu de monter en Fig. 2. vertu du mouvement de rotation du cylindre  $K$ , étoit tiré par un poids  $N$  attaché à une corde qui va passer sur la poulie  $D$  de renvoi, & descendant verticalement en ligne droite, le Problème se résoudroit par les mêmes principes. En effet, que le seau  $M$  partant de  $S$ , le poids  $N$  parte de  $D$ , en sorte qu'on ait toujours  $DN = SQ$ ; soit faite pour le corps  $M$ , la même construction que dans les *articles III & IV*; & supposons ici pour le corps  $N$ , que  $Nn$  est l'élément correspondant à  $Mm$ ;  $nk$  le petit espace correspondant à  $mh$ ;  $kf$  l'espace parcouru en un instant, en vertu de la gravité;  $nn'$  l'élément consécutif à  $Nn$ .

Faisons  
comme ci-dessus  $\left\{ \begin{array}{l} CS. \dots\dots\dots = a. \\ CA. \dots\dots\dots = b. \\ AP. \dots\dots\dots = x. \\ PM. \dots\dots\dots = y. \\ SQ \text{ ou } DN. \dots\dots\dots = q. \end{array} \right.$

Faisons  
comme ci-dessus

$$\left\{ \begin{array}{l} CM \dots\dots\dots = a - q = r. \\ \text{L'angle } PCM \text{ pour le rayon} \dots\dots\dots = \varphi. \\ Mm \dots\dots\dots = ds. \\ \text{La gravité} \dots\dots\dots = g. \\ \text{L'élément variable du temps } t \dots\dots\dots = dt. \end{array} \right.$$

Il est clair qu'en nommant  $T$  la tension absolue du fil  $MCDN$ , on aura, comme dans l'*art. III*,  $T = \frac{M \times qm'}{(dt + ddt)^2}$ .

Semblablement on aura pour le corps  $N$ ,  $T = \frac{N \times n'f}{(dt + ddt)^2}$ .

donc  $M \times qm' = N \times n'f$ : or  $(V)$   $qm' = \frac{ds dds}{dq}$

$= \frac{ds^2 ddt}{dq dt} + \frac{g dx (dt + ddt)^2}{dq}$ ; & on voit que  $n'f = nf - nn'$

$= nk + kf - nn' = \frac{dq (dt + ddt)}{dt} + g (dt + ddt)^2$

$= (dq + ddq) = \frac{dq ddt}{dt} + g (dt + ddt)^2 - ddq$ .

Substituant ces valeurs de  $qm'$  & de  $n'f$  dans l'équation

$M \times qm' = N \times n'f$ , on aura

$$M \left( \frac{ds dds}{dq} - \frac{ds^2 ddt}{dq dt} + \frac{g dx dt^2}{dq} \right) = N \left( \frac{dq ddt}{dt} + g dt^2 - ddq \right),$$

ou bien,

$$M \left( \frac{dt^2 ds dds - ds^2 dt ddt}{dt^2} \right) + N \left( \frac{dt^2 dq ddt - dq^2 dt ddt}{dt^2} \right) = g N dt - g M dx,$$

dont l'intégrale est

$$\frac{M ds^2 + N dq^2}{2 dt^2} = g N q - g M x + C;$$

équation que donneroit immédiatement le principe de conservation des forces vives.

Je suppose qu'aux points  $S$  &  $D$ , les vitesses des deux corps soient nulles; ainsi  $C = 0$ , & l'équation précédente devient

$$M ds^2 + N dq^2 = 2 g dt^2 (N q - M x),$$

ou (parce que  $ds^2 = dr^2 + rrdz^2$ ,  $x = b - r \cos. z$ ,  
 $y = r \sin. z$ ,  $q = a - r$ ),

$$(G) (M + N) dr^2 + M r r dz^2 = 2 g dt^2 [N(a - r) - M(b - r \cos. z)].$$

Au moyen de cette équation, on pourra éliminer  $dt$  &  $ddt$  de l'équation (B) de l'article VI, qui a également lieu ici, & l'on aura la nature de la courbe  $SMB$ , exprimée en  $r, z, dr, dz, ddr, ddz$ .

## X I I.

Comme on ne peut pas espérer d'intégrer en général l'équation que je viens d'indiquer pour la courbe  $SMB$ , revenons au cas où les oscillations du corps  $M$  sont très-petites; alors on aura sensiblement  $\sin. z = z$ ,  $ds^2 = dr^2$ . De plus, dans le dénominateur de l'équation.....

$$dt^2 = \frac{(M + N) dr^2 + M r r dz^2}{2g[N(a - r) - M(b - r \cos. z)]},$$

on pourra faire  $a = b$ ,  $r \cos. z = r$ ; donc cette équation

deviendra  $dt^2 = \frac{M + N}{2g(N - M)} \times \frac{dr^2}{a - r}$ , ou bien

$dt = -\sqrt{\left(\frac{M + N}{2g(N - M)}\right)} \times \frac{dr}{\sqrt{a - r}}$ , dont l'intégrale

est  $t = 2\sqrt{\left(\frac{M + N}{2g(N - M)}\right)} \times \sqrt{a - r}$ , en supposant

$t = 0$  lorsque  $r = a$ ; ainsi on a l'expression du temps.

Faisons  $dt$  constant, & supposons  $z = e^{ipdt}$ ; l'équation (B) devient  $r dp + p p r dr + 2 p dr + g dt = 0$ ; ou bien

$$dp + p p dr + 2 p r^{-1} dr - g \sqrt{\left(\frac{N + M}{2g(N - M)}\right) \times \frac{dr}{r(a - r)}} = 0;$$

ou bien (en supposant  $p = u - \frac{1}{r}$ ),

$$du + u u dr - g \sqrt{\left(\frac{N + M}{2g(N - M)}\right) \times \frac{dr}{r(a - r)}} = 0;$$

qui se rapporte, comme les précédentes, à l'équation de *Riccati*.

## X I I I.

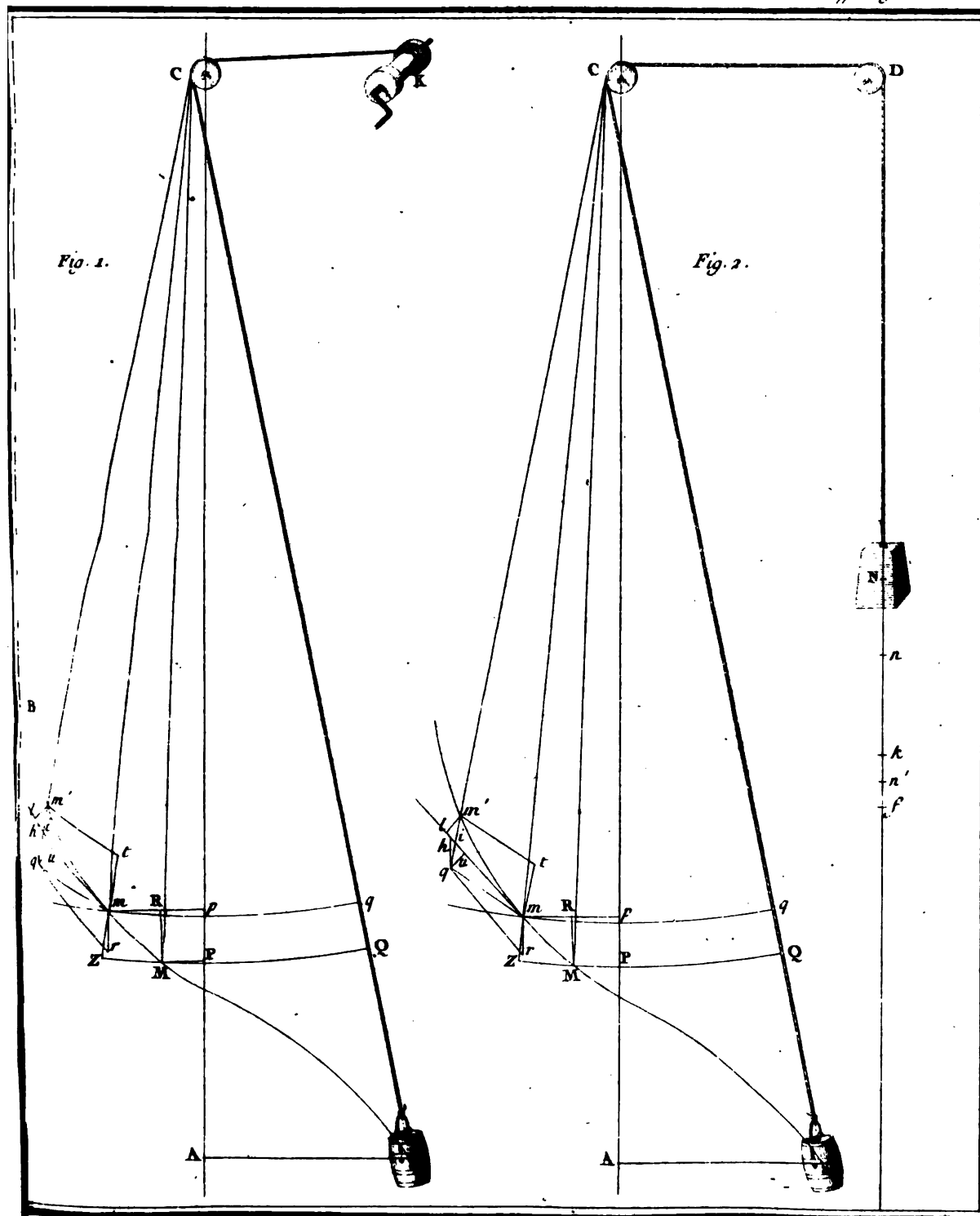
Les questions que nous avons examinées jusqu'ici deviendroient beaucoup plus simples, s'il étoit permis de négliger la pesanteur du corps  $M$ , ou si cette pesanteur étoit soutenue d'une manière quelconque. Par exemple, supposons que le corps  $M$  se meuve sur un plan horizontal; que ce corps ait reçu une impulsion quelconque, oblique à la direction du fil, & que le fil s'enveloppe, comme dans l'article *VII*, autour d'un cylindre  $K$  qui tourne uniformément; alors, dans l'équation (C), il faudra faire  $\frac{g}{n^2}$  ou  $m = 0$ , & on aura simplement  $rddz + 2drdz = 0$ , ou bien  $rrddz + 2rdrdz = 0$ , dont l'intégrale est  $rrdz = Adt = \frac{Adr}{n}$ ; donc  $\frac{dr}{rr} = \frac{n dz}{A}$ , dont l'intégrale est  $\frac{1}{r} = B - \frac{n z}{A}$ , équation de la courbe droite par le corps  $M$ .

Les deux constantes  $A$  &  $B$  doivent être telles, 1.<sup>o</sup> qu'à l'origine  $S$ , la vitesse du corps  $M$  soit donnée; 2.<sup>o</sup> qu'en faisant  $r = a$ , l'angle  $z$ , pris négativement, soit l'angle donné  $ACS$ .

## X I V.

Supposons, pour second exemple, que le corps  $M$  étant toujours posé sur un plan horizontal & ayant reçu une impulsion quelconque, le fil soit tiré par le corps  $N$  qui descend verticalement en ligne droite par la pesanteur; alors, en faisant  $dt$  constant dans l'équation (B) de l'article *VI*, & effaçant le terme qui contient  $g$ , on aura  $rddz + 2drdz = 0$ ; d'où l'on tire  $rrdz = Adt$ , ou  $dt^2 = \frac{r^2 dz^2}{A^2}$ .

D'un autre côté, l'équation (G) de l'article *XI* donne  $dt^2 = \frac{(M + N) dr^2 + Mr^2 dz^2}{2gN(a - r)}$ , en négligeant ici le terme  $2gM$





$2gM(b - r \cos. z)$ ; ainsi on aura

$$\frac{r^2 dz^2}{A^2} = \frac{(M+N) dr^2 + Mrr dz^2}{2gN(a-r)};$$

d'où l'on tire

$$dz = \frac{A\sqrt{M+N} \cdot dr}{r\sqrt{2gNr^2(a-r) - MA^2}},$$

équation séparée qui exprime la nature de la courbe décrite par le corps  $M$ .

Substituant pour  $dz$  la valeur dans l'équation  $Adt = rrdz$ , on aura  $dt = \frac{rdr\sqrt{M+N}}{\sqrt{2gN(a-r) - MA^2}}$ , équation qui donne le temps en  $r$ .





## OBSERVATIONS SUR LA MINE ROUGE DE CUIVRE

Par M. SAGE.

La  
le 6 Mai  
1778.

LES Expériences dont je vais rendre compte, feront connoître que la mine rouge de Cuivre, n'est qu'une altération du cuivre natif, ou ce métal privé d'une portion de son phlogistique, & tendant à se décomposer par l'efflorescence, ce qui est conforme à ce que Cronstedt a dit dans la Minéralogie, où il définit la mine rouge de cuivre: *Minera cupri calaformis pura friabilis vel indurata, colore rubro.*

La plus belle espèce de ces mines rouges de cuivre, se trouve dans la mine de Prédannah, dans la province de Cornouailles. M. Lehmann dit que la couleur, son tissu & ses cristaux font qu'elle ressemble parfaitement à la mine d'argent rouge \*: c'est ce qu'on peut vérifier en examinant les morceaux que je présente à l'Académie; la mine rouge se trouve dans trois états.

1.° En cristaux octaèdres transparens, d'un rouge de rubis: cette espèce a été nommée par Henckel, *mine de cuivre vitreuse rouge*. Il dit qu'elle est si riche en cuivre que ce métal y est presque tout pur; *Introduction à la Minéralogie, tome II, page 218.*

2.° En mamelons d'un rouge mat.

3.° En fibres ou petits filets opaques, dont la couleur approche de celle du cinabre: cette dernière espèce est connue sous le nom de *fleurs de cuivre rouge*.

La mine rouge de cuivre cristallisée & transparente, se trouve presque toujours avec le cuivre natif, dont elle n'est qu'une altération: c'est une vraie chaux de cuivre qui devient

---

\* Art des Mines métalliques, 1.<sup>er</sup> volume, page 121.

noirâtre après avoir été exposée au feu, & passe aussi-tôt à l'état de verre brun & chatoyant, lorsqu'on lui fait éprouver un degré de feu propre à faire rougir le creuset.

Lorsque le cuivre passe de l'état métallique à celui de rouille verte, qu'on nomme *patine*, on trouve que sous cette espèce de malachite solide, le cuivre est friable, & qu'il a pris une couleur d'un rouge mat; cette chaux rouge de cuivre cristallise souvent lorsqu'elle n'est point couverte de patine: c'est ce que je viens d'avoir occasion d'observer dans des fragmens de cuivre doré, qui avoient fait partie de la jambe de cheval qui fut trouvée en 1766 dans la Saône, auprès de S.<sup>te</sup> Claire. En rompant ces morceaux de cuivre on trouve de petites cavités tapissées de cristaux rouges octaèdres, transparens: la surface de ce cuivre, qui n'étoit point doré, étoit enduite de patine très-fine.

Un fragment de jambe de cheval en cuivre doré que M. Rigot de Terrebasse a trouvé dans la ville de Lyon, au mois de Novembre 1777, présente dans la fracture des cavités avec des cristaux rouges transparens, & quelquefois des cristaux blancs transparens qui m'ont paru séléniteux: M. de la Tourette, qui a rendu compte à M. Bertin de la découverte de cette jambe, dit qu'elle n'a aucun rapport avec celle qui a été trouvée dans la Saône, que leurs proportions sont entièrement différentes.

L'analyse comparée de la mine rouge de cuivre & des cristaux rouges de cuivre que j'ai trouvés dans les fragmens de la jambe de cheval, m'ont fait connoître qu'il n'y avoit point de différence entre ces deux productions.

Ces cristaux rouges de cuivre étant exposés au feu dans un creuset, décrépitent, noircissent & deviennent opaques; par un feu plus violent, ils se changent en un émail brun chatoyant.

J'ai fondu de ces cristaux rouges avec deux parties de poudre de charbon, & j'ai reconnu qu'ils produisoient par quintal soixante-dix livres de cuivre.

L'expérience suivante démontre que ces cristaux rouges

212 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

ne contiennent que du cuivre. J'ai pulvérisé de ces cristaux, je les ai mis dans de l'alkali volatil, ils s'y sont dissous entièrement; l'alkali volatil a pris la plus belle couleur bleue.

Il résulte de ce que je viens de rapporter, que la mine rouge de cuivre est semblable, non-seulement par sa forme, mais encore par les parties intégrantes, aux cristaux rouges de cuivre trouvés dans les fragmens de la cuisse de cheval; & l'un & l'autre paroissent produits par l'altération du cuivre le plus pur.



**R E M A R Q U E S**  
**SUR LE MOUVEMENT DES CÔTES**  
**DANS LA RESPIRATION.**

Par M. B O R D E N A V E.

**L'**ACTION des organes qui servent à la Respiration a mérité jusqu'à présent l'attention des Anatomistes. Depuis Galien jusqu'à nous, cette fonction importante a été l'objet d'une infinité de recherches. On a tâché d'établir par l'inspection anatomique, par l'observation & les expériences, l'usage des parties qui y sont destinées; mais, malgré ces travaux, nous croyons pouvoir avancer qu'il y a encore beaucoup de choses incertaines & beaucoup d'éclaircissémens à désirer.

Présenté  
le 20 Déc.  
1777,  
achevé de lire  
le 21 Mars  
1778.

On fait que la respiration est composée de deux mouvemens: l'un d'inspiration, dans lequel les dimensions de la poitrine sont augmentées; l'autre d'expiration, dans lequel elles sont diminuées. Le premier de ces mouvemens a été attribué à l'élévation des côtes & à leur rapprochement en même temps, & le second a été regardé comme l'effet de leur abaissement & de leur écartement: mais toutes les côtes s'élèvent-elles & se rapprochent-elles également dans l'inspiration? S'abaissent-elles & s'écartent-elles de même dans l'expiration? C'est ce que je me propose de discuter particulièrement dans ce Mémoire.

La respiration douce & naturelle pouvant se faire d'une manière presque insensible de la part des côtes, nous considérerons spécialement l'action des côtes dans la respiration forte ou forcée.

Galien, en traitant de l'usage des parties (a), après avoir

(a) De usu partium, lib. VII, cap. xx. *Monstrata sanè in illis sunt multa & admiranda naturæ in Thoracis actione artificia; nam & in inspirationibus partium ejus alias quidem sursùm*

*ferri, alias verò deorsùm: & rursùm in expirationibus quæ priùs deorsùm ferebantur, contra sursùm tendere; quæ verò ante sursùm ferebantur, tunc in suam pristinam sedem reverti.*

## 214 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

exposé le mécanisme admirable de la Nature dans l'action de la poitrine, a avancé « que pendant l'inspiration, quelques-unes de ses parties sont portées en haut & les autres en bas ; & qu'au contraire dans l'expiration, celles qui ont été portées en haut s'abaissent, & celles qui ont été abaissées retournent au lieu où elles étoient auparavant. »

On n'observe pas cette diversité d'action dans les côtes, à moins qu'on ne regarde comme une espèce d'abaissement, le défaut d'action des dernières fausses côtes qui ne suivent pas l'élévation des autres : toutes les côtes ont une action qui tend à la même fin, c'est-à-dire, à l'augmentation ou à la diminution de la capacité de la poitrine ; mais elles opèrent cette augmentation ou cette diminution en agissant d'une façon différente relativement à leur disposition.

Si toute la poitrine paroît s'élever, en même temps dans les inspirations fortes, subites & étendues, ce mouvement dépend beaucoup plus de la partie moyenne antérieure des côtes, que de la postérieure qui est retenue par des ligamens courts & forts, & par une double articulation avec le corps des vertèbres & leurs apophyses transverses ; cette jonction, naturellement disposée en une direction oblique, est si ferme que, selon les expériences de M. de Haller, elle peut à peine permettre un mouvement égal à la sixième partie d'une ligne (b) ; cependant elle n'empêche pas les côtes d'être élevées & déjetées en dehors en même temps.

Il n'en est pas de même de la partie antérieure des côtes ; quoique terminée par un cartilage qui s'insère au sternum par une arthrodie si serrée, qu'on peut presque douter qu'il en résulte une articulation mobile, elle est beaucoup plus susceptible de mouvement ; ces cartilages qui font angle plus ou moins obtus avec la portion osseuse des côtes, ainsi qu'avec le sternum, éprouvent quelque changement dans leur disposition pendant l'inspiration, par l'action simultanée de la poitrine, & en conséquence l'insertion solide des cartilages

---

(b) *Opuscul. anat.* pag. 86 & 87.

n'empêche pas que le mouvement ne s'opère particulièrement à la partie moyenne & antérieure des côtes.

La première côte étant plus courte que les autres, & n'ayant qu'une portion cartilagineuse très-peu étendue, insérée au sternum immédiatement au-dessous de l'extrémité antérieure de la clavicule qui y est contiguë, est à peine susceptible d'aucun mouvement sensible, & elle peut être regardée comme fixe, relativement aux autres côtes dont le mouvement est dirigé vers celle-ci.

Le mouvement de ces côtes n'est pas le même dans toutes; la seconde & la troisième s'élèvent peu & s'approchent moins vers la première proportionnellement; la quatrième & les suivantes s'élèvent davantage en dehors, & proportion gardée, s'approchent plus vers la première par leur partie moyenne. Disposées obliquement pendant l'expiration, elles quittent cette obliquité pour prendre une direction qui approche plus alors de celle d'un cercle, & les angles remarquables à leur articulation avec les vertèbres & le sternum deviennent seulement un peu plus grands. Ce mouvement paroît dépendre des arcs postérieurs des côtes, dont l'inclinaison est manifeste, mais qui dans l'inspiration sont un peu tirées vers le haut & jetées en dehors. Les fausses-côtes dont les cartilages ne s'insèrent pas immédiatement au sternum, ne s'élèvent pas autant que les vraies; les deux dernières flottantes se déjettent simplement en dehors.

Cette diversité dans le mouvement des côtes paroît dépendre de ce que les supérieures ont sur le corps des vertèbres de petites facettes articulaires sur lesquelles elles sont plus appuyées par la facette inférieure, par conséquent plus libre vers le haut par la facette supérieure. Les côtes inférieures, par une disposition différente, ayant leurs facettes supérieures plus appuyées sur le corps des vertèbres, résistent davantage au mouvement vers le haut & s'abaissent plus aisément (c). De-là il suit que

---

(c) Vésale, & Winslow, Mémoires de l'Académie des Sciences, année 1738, page 88.

les vraies côtes s'élèvent ; que les fausses, & sur-tout les inférieures, s'élèvent peu, & s'écartent seulement en dehors ; on peut même dire, avec raison, que les dernières ne s'élèvent point, & même ne peuvent s'élever, étant retenues par le muscle quarré des lombes qui s'oppose à ce mouvement ; ce qui confirme en quelque sorte le sentiment de Galien sur le défaut d'élévation qu'éprouvent les côtes inférieures, pendant que les supérieures s'élèvent.

Le mouvement des côtes est en général plus remarquable vers leur partie moyenne & un peu antérieure, c'est le lieu où elles s'élèvent davantage ; ce qui doit être ainsi, leur écartement étant plus considérable en cet endroit. On auroit tort de les regarder comme des leviers, dont le centre du mouvement est à leur articulation avec les vertèbres, & qui décrivent des arcs d'autant plus grands par leurs extrémités, qu'elles en sont plus éloignées ; leur distance n'étant pas parallèle dans toute leur étendue, elles ne peuvent conserver un rapport égal entr'elles pendant leur élévation. D'ailleurs, elles ne sont point libres vers leur extrémité antérieure ; les cartilages qui les attachent au sternum permettent à peine en ce lieu aucun mouvement : elles ne peuvent donc être mues qu'en faisant éprouver au cartilage une légère torsion, qui permet au bord supérieur de la côte de se contourner un peu en dedans, pendant que le bord inférieur se déjette en dehors ; en conséquence, elles diminuent l'angle qu'elles forment avec le cartilage.

Ainsi, le mouvement des côtes, peu considérable dans l'extrémité vertébrale, encore moins sensible du côté du sternum, se trouve être plus remarquable dans le milieu de ces os, particulièrement dans la partie antérieure voisine des cartilages (*d*) : c'est la partie moyenne antérieure des côtes qui parcourt le plus grand espace ; c'est elle qui véritablement s'élève, pendant que les extrémités postérieures, perdant seulement de leur obliquité, deviennent plus parallèles entre

---

(*d*) *Fabricius ab Aquapendente, de respirat. & ejus instrumentis*, lib. II, cap. VI.  
elles

elles, en se portant en dehors en même temps, & étant ainsi un peu tirées vers le haut, elles sont dans un état violent. L'inspiration forte est donc un état qu'accompagne l'élévation simultanée des côtes, & dans lequel elles sont même un peu écartées les unes des autres postérieurement; mais le mouvement qui se passe particulièrement vers la partie antérieure voisine des cartilages, diminue avec l'âge; & alors, les cartilages étant durcis & même ossifiés, la respiration devient plus lente & plus difficile.

On pourroit conclure de-là, qu'en général dans l'inspiration, la poitrine augmente ainsi dans toutes ses dimensions, c'est-à-dire, & de capacité & de longueur. Nous conviendrons que la capacité de la poitrine augmente dans cet état, ses diamètres de devant en arrière, & d'un côté à l'autre, étant plus étendus; mais elle ne peut augmenter en longueur, la première côte étant à peu-près fixe, & les dernières fausses-côtes étant plutôt susceptibles d'élévation que d'abaissement.

C'est ce que l'inspection paroît démontrer sur les animaux vivans: si la longueur de la poitrine augmente intérieurement, cela ne peut être que par l'aplanissement du diaphragme pendant la contraction; & on ne peut pas admettre avec Borelli, que ce muscle contracté entraîne vers le bas la portion osseuse & cartilagineuse des côtes, ainsi que le sternum, auxquels il est attaché, pour augmenter la longueur de la poitrine (e). Autrement, les côtes éprouveroient deux actions contraires pendant l'inspiration, ou si les côtes étoient abaissées, le diaphragme agiroit comme expirateur. En élevant les côtes pour imiter l'inspiration, on peut se convaincre, sur un cadavre, que la poitrine a plus de longueur pendant l'expiration, les côtes étant redescendues & ayant repris leur obliquité naturelle.

Fabrice d'Aquapendente a avancé que dans les oiseaux, les intervalles des côtes sont augmentés par leur mouvement vers le haut, & que par leur mouvement en bas, leurs

---

(e) *De motu animalium*, part. II, prop. 90.

*Mém.* 1778.



intervalles se resserrent : *Clarè conspicies*, a-t-il dit, *ad motum costarum sursùm intercostalia spatia dilatari, contrà verò costis deorsùm motis angustari (f)*. Tous les Anatomistes paroissent avoir admis ce même mouvement dans l'homme; mais la disposition de toutes les côtes n'étant pas également solide, & leur direction, ainsi que leur longueur, étant aussi différentes, elles ne doivent pas se mouvoir également, ni garder dans leurs mouvemens le même rapport entre elles.

La première côte étant à peu-près fixe, le mouvement de toutes les autres doit se rapporter vers celle-ci, en proportion de leur mobilité : la seconde côte, moins mobile que les suivantes, terminée par un cartilage assez court, qui s'insère au sternum dans une direction droite, s'approche un peu de la première pendant l'inspiration, & diminue l'espace intercostal qui les séparoit pendant l'expiration : la troisième côte, plus mobile que la seconde, en s'approchant un peu de celle-ci, s'élève plus en dehors : les choses se passent de même de la quatrième côte vers la troisième, de la cinquième vers la quatrième, & ainsi des autres; en sorte que depuis la quatrième jusqu'aux dernières, l'intervalle des côtes devient plus grand pendant l'inspiration entre leur partie postérieure, quoiqu'il diminue réellement entre la partie antérieure à sa jonction au cartilage. Les sixième, septième & huitième côtes étant à peu-près également longues, s'élèvent, s'écartent également, & conservent une direction presque parallèle; enfin les trois dernières fausses-côtes étant un peu moins susceptibles d'élévation, s'approchent moins vers le haut proportionnellement, sur-tout la dernière qui est retenue par le muscle carré des lombes; elles se jettent seulement un peu en-dehors.

Ainsi nous croyons pouvoir avancer que l'écartement des côtes n'a pas également lieu dans toutes; que les trois ou quatre premières se rapprochent véritablement dans l'inspiration, & que l'écartement postérieur n'est remarquable que dans les suivantes. Cette observation ne paroît pas avoir été

---

(f) *De Respirat. & ejus instrumentis*, lib. II, cap. 10.

faite, & nous ne connoissons que M. Haller qui ait semblé l'indiquer : *In universum superiora intervalla vidi diminui* (g).

Pour établir cette diversité d'action des côtes, qui cependant tend à la même fin, nous avons cru devoir tenter quelques expériences sur les animaux vivans; mais le mouvement continu de la poitrine dans un animal qui souffre; peut souvent en imposer, ne permet pas d'obtenir des résultats assez certains, & l'observation de la Nature échappe pour ainsi-dire : il n'en est pas de même après la mort, & dès-lors j'ai cru qu'en cet état je pourrois obtenir des notions plus positives. La vie étant terminée par une expiration, l'inspection de l'état des côtes sur des cadavres nous a paru plus propre à éclaircir notre objet, & à déterminer d'une manière fixe ce qui doit arriver dans l'inspiration, l'une étant un état contraire de l'autre : or en examinant des cadavres, nous avons remarqué que les vraies côtes étoient écartées en-devant & qu'elles étoient rapprochées en arrière; que les espaces entre la première & la seconde, la seconde & la troisième côtes, même entre la troisième & la quatrième, étoient en général beaucoup plus considérables dans toute leur étendue; enfin que les muscles intercostaux placés dans les premiers espaces, étoient comme distendus, pendant que ceux qui occupent l'intervalle des autres côtes étoient sensiblement raccourcis : les deux dernières fausses-côtes nous ont paru écartées, & les muscles qui en occupent les espaces comme tendus.

Cette considération qu'il faut faire sur des cadavres bien conformés, morts naturellement, particulièrement sur ceux des hommes, nous a paru propre à faire connoître le mécanisme de l'inspiration, & à démontrer que dans cet état les premières côtes s'approchent dans presque toute leur étendue; que les suivantes se rapprochent par leur portion antérieure particulièrement; qu'en s'élevant par leur partie moyenne, elles restent plutôt un peu écartées entre elles postérieurement,

---

(g) Dans une note, *Phys. element.* tom. III, p. 25.

& que les dernières fausses-côtes se rapprochent; qu'en conséquence on ne peut pas dire, comme on l'a avancé trop généralement, que toutes les côtes s'élèvent également, & se rapprochent dans toute leur étendue pendant l'inspiration.

La poitrine, considérée dans l'état d'expiration sur deux cadavres féminins, a fait voir de même les côtes écartées en-devant, même dans la partie cartilagineuse des dernières vraies côtes, & plus rapprochées dans la partie postérieure. L'écartement étoit plus grand & à peu-près égal dans toute l'étendue; entre la première & la deuxième, la seconde & la troisième côtes; il étoit moindre postérieurement entre la troisième & la quatrième côtes & les suivantes. Les muscles intercostaux étoient tendus entre les côtes supérieures; entre les autres côtes, depuis la quatrième en descendant, ces muscles étoient resserrés postérieurement, & distendus antérieurement. Les dernières fausses-côtes rentroient en-dedans, ce qui est évidemment l'effet des corps à baleine, ou des corsets.

Malgré cette diversité d'action dans les côtes, il n'en résulte pas moins une uniformité dans le mouvement de la poitrine. Sans entrer dans le détail de la disposition particulière de chaque côte, sur-tout des supérieures, dont la première est presque horizontale, la seconde est contournée obliquement, la troisième & les suivantes sont presque posées de champ, on conçoit, qu'afin que la surface de la poitrine reste lisse & égale en augmentant sa capacité, il faut que les côtes supérieures s'élèvent & se rapprochent, pendant que les autres, en se déjetant en-dehors, s'écartent. Le rapprochement des premières est une suite nécessaire du défaut de mobilité de la première côte & de la contraction des muscles qui occupent les deux espaces supérieurs, & qui, étant trouvés tendus sur le cadavre, ne peuvent se contracter sans diminuer l'intervalle qu'ils occupent.

De même, les côtes suivantes vraies, étant plus écartées en-devant qu'en arrière, ont les muscles intercostaux tendus en-devant, pendant qu'ils sont sensiblement relâchés en arrière;

mais ces muscles ne peuvent agir & se contracter en-devant sans rapprocher l'espace antérieur des côtes, qui sera au contraire écarté postérieurement par le changement qui arrive dans la continuité de la côte & dans la direction des fibres des muscles intercostaux, qui est fort oblique en cet endroit. D'ailleurs, l'espèce de torsion qu'éprouvent les cartilages dans l'inspiration, contribue encore à favoriser l'écartement des côtes postérieurement, aidé en ces endroits de l'action des muscles intercostaux.

La disposition des muscles intercostaux semble démontrer intuitivement ce que nous venons d'avancer. On voit que le plan interne, qui se porte obliquement de devant en arrière, & qui remplit antérieurement l'intervalle des côtes, doit opérer presque seul le rapprochement de la portion cartilagineuse. Le plan externe, en se portant obliquement de derrière en-devant, présente en quelques endroits des fibres si obliques, qu'elles approchent presque de la direction transversale; & comme en se contractant, ces fibres diminuent de leur obliquité pour approcher d'une direction plus droite, dès-lors elles doivent favoriser l'écartement des côtes, vers la partie postérieure. Enfin, l'intervalle des dernières fausses-côtes étant rempli par un plan de fibres presque droit, que forment souvent seuls les intercostaux externes, elles doivent être un peu rapprochées. Ces observations, que nous faisons en passant seulement sur l'usage des muscles intercostaux, confirment de plus en plus ce que de savans Anatomistes ont avancé sur l'usage de ces muscles pour l'inspiration.

Le mouvement des côtes est plus remarquable à la partie antérieure & latérale de la poitrine, que dans le reste de leur étendue, & il se passe plus particulièrement vers l'angle qu'elles forment avec le cartilage. En effet, les vraies côtes étant inclinées de derrière en-devant, excepté les deux supérieures, leur inclinaison cesse dans l'endroit où elles s'unissent avec le cartilage qui remonte vers le sternum; elles forment ainsi un angle qui devient moins aigu pendant l'inspiration, & en conséquence de cette disposition, non-seulement

l'élasticité naturelle de ces parties , mais encore l'angle qui avoit été diminué , tendant à se rétablir , contribuent à produire en cet endroit un mouvement sensible. De-là il suit , que ce mouvement se passe particulièrement à la partie moyenne antérieure des côtes , où l'élévation de leur arc peut aller à quelques lignes , & que s'il y a du mouvement vers les extrémités postérieures , ce ne peut être qu'un mouvement peu sensible & sur un même point.

Les côtes étant terminées au sternum , elles lui communiquent une partie de leur mouvement , qui , en conséquence , est plus sensible vers la partie inférieure de cet os , lieu où les côtes ont plus de mobilité. Pendant une inspiration forte , le sternum est seulement un peu élevé par la partie supérieure , qui suit en cela le mouvement peu sensible de la première côte , sans être jeté en-dehors ; mais les vraies côtes , depuis la troisième jusqu'aux dernières , qui sont fort mobiles , en augmentant la capacité de la poitrine , pendant leur élévation , lui font faire une saillie qui est d'autant plus sensible , que le mouvement se passe plus près du cartilage xiphoïde : ce mouvement est fort remarquable dans les enfans.

Le mouvement des côtes & du sternum paroît plus sensible chez les femmes , & non-seulement on peut dire qu'elles ont la poitrine plus mobile , mais encore on peut ajouter que la mobilité y est en général plus remarquable vers la partie supérieure. Cette disposition , plus ordinaire à ce sexe , peut-elle être regardée comme une précaution de la Nature , qui , dans le temps de la grossesse , où le diaphragme est fort élevé par le volume de la matrice , a voulu suppléer à son action par le mouvement des côtes ? Ou n'est-elle pas plutôt l'effet du mauvais usage des corps à baleine , dont les femmes font usage pour se former la taille ? Cette dernière conjecture paroît plus fondée.

Nous connoissons peu la conformation de la poitrine des femmes dans l'état de nature. Accoutumées dès l'enfance à des corps qui , évasés par le haut & resserrés par le bas , forment une figure inverse de celle de la poitrine , il faut

pendant qu'elles respirent, que les côtes inférieures n'agissent pas, ou au moins fort peu; l'action doit donc être plus considérable du côté des parties supérieures qui sont moins gênées: les côtes, qui éprouvent moins de résistance en cet endroit, se jettent plus en-dehors, & telle paroît être la raison naturelle pour laquelle la poitrine des femmes est plus large à la partie supérieure, & plus mobile en cet endroit que celle des hommes.

Nous avons remarqué à l'ouverture des cadavres des femmes, que l'on dit être bien faites à raison de la finesse de la taille, & qui payent souvent cet avantage factice aux dépens de leur vie, nous avons remarqué, dis-je, que la poitrine n'avoit pas plus de largeur en bas qu'en haut; que les vraies côtes inférieures étoient plus inclinées en bas, & beaucoup moins mobiles qu'elles ne doivent l'être; enfin quelquefois même nous les avons trouvé beaucoup moins en forme d'arc & presque aplaties. D'ailleurs cette disposition n'est pas également remarquable chez les femmes qui ne portent pas de corps.

Nous croyons avoir suffisamment démontré que toutes les côtes ne s'élèvent pas également dans l'inspiration; qu'elles ne s'écartent pas toutes, même que quelques-unes se rapprochent, & qu'elles s'élèvent plus spécialement par leur partie antérieure où leur mouvement est plus sensible; qu'elles conservent à peu-près la même distance entre elles postérieurement, ce qui ne paroît pas avoir été assez observé jusqu'à présent.

Les remarques que nous venons d'exposer, sont appuyées sur l'inspection répétée des cadavres; & nous serons flattés si elles peuvent contribuer à la perfection de nos connoissances sur l'action des organes qui servent à une des plus importantes fonctions de l'économie animale.



*O B S E R V A T I O N*  
*SUR UNE OUVERTURE FISTULEUSE*  
*A U B A S - V E N T R E ,*

*Par laquelle le malade rendoit presque toutes ses urines.*

Par M. S A B A T I E R.

Lu  
le 18 Juin  
1777.

UN Homme d'environ quarante ans , après avoir eu pendant quelque temps des difficultés d'uriner, accompagnées de douleurs assez vives, fut attaqué il y a deux ans, d'une suppression totale d'urine, pour laquelle on lui administra tous les remèdes connus. Il ne tarda pas à se former à la partie moyenne, antérieure & inférieure du ventre, une tumeur qui fut prise pour un abcès, & dont l'ouverture spontanée laissa sortir une grande quantité de pus & d'urine mêlés ensemble. Dès ce moment il se sentit soulagé; une partie des urines reprit son cours par les voies ordinaires, & l'autre continua de s'échapper par la crevasse de l'abcès qui se rétrécit peu-à-peu, & dégénéra en une ouverture fistuleuse, dont les bords se froncèrent comme ceux d'une bourse. Cette fistule devint bientôt la seule voie que les urines prissent; mais comme elle tendoit toujours à se rétrécir, & que souvent même elle se fermoit en entier, le malade est resté sujet à de nouvelles difficultés d'uriner, & à des suppressions totales d'urine, qui n'étoient pas à la vérité de longue durée, mais qui lui occasionnoient des douleurs plus ou moins fortes. L'écoulement continuel des urines, qui avoit lieu dans les temps les moins fâcheux, lui caufoit des incommodités presque aussi difficiles à supporter. J'ai plusieurs fois essayé de lui passer une sonde dans la vessie, par le canal de l'urètre, persuadé que si je parvenois à rappeler le cours ordinaire des urines, je les empêcherois de se porter vers l'ouverture fistuleuse du ventre. Les tentatives que j'ai faites à cet égard ont été infructueuses:

la sonde ne pénétrait qu'à très-peu de distance ; & les bougies , au moyen desquelles j'espérois favoriser son introduction , n'alloient guère plus avant. Dans les derniers temps , il étoit rare que le malade rendit quelques gouttes d'urine par la verge. A la fin , il a succombé aux douleurs , aux insomnies & à la fièvre lente que son infirmité lui causoit. L'ouverture de son cadavre , m'a fait voir qu'elle dépendoit de la présence d'une pierre qui , s'étant engagée dans le col de la vessie , étoit enfin venue occuper la partie membraneuse de l'urètre , entre la pointe de la prostate & le bulbe de l'urètre. La vessie contenoit diverses autres petites pierres qui n'offrent rien de particulier. Sans doute que la suppression d'urine , à laquelle la première a donné lieu , aura été suivie d'une crevasse à la partie supérieure de la vessie , & ensuite de l'abcès urinaire dont il a été parlé au commencement de cette Observation. L'ouverture qui en est résultée , se voit à la partie la plus élevée de ce viscère , près l'ouraque ; elle communique avec la fistule des tégumens , par un canal de deux travers de doigt de longueur.

Il y a quelques exemples d'ouvertures fistuleuses au voisinage du nombril , par lesquelles les urines sortoient. Cabrole a parlé d'une jeune demoiselle qui rendoit toutes les urines par cette voie , parce que l'orifice de l'urètre étoit fermé par une membrane contre nature. Cheselden dit tenir de gens dignes de foi , qu'un jeune enfant , dont les parties génitales extérieures manquoient , étoit dans ce cas. Littre a vu deux personnes qui avoient une semblable infirmité : l'une d'elles , étoit un garçon de douze ans , *dont le col de la vessie étoit bouché* , & chez qui l'ouraque s'étoit maintenu en forme de canal : la seconde étoit un homme de trente ans , qu'il pense avoir eu quelque obstacle naturel au col de la vessie , mais dont il n'a pas examiné les parties après la mort ; ces deux malades avoient toujours uriné de cette manière. Littre ajoute avoir disséqué le cadavre d'un jeune homme de dix-huit ans , chez qui le col de la vessie étoit occupé par une pierre , & qui avoit l'ouraque ouvert dans une longueur de cinq travers de doigt ; d'où il conclut , que la Nature cherchoit à procurer aux



urines une issue qu'elles ne trouvoient plus par les voies ordinaires ; mais en même temps il juge que cela ne peut arriver que chez les jeunes gens , dont l'ouraque n'est pas encore trop fortement desséché. Fabrice de Hilden fait mention d'un homme parvenu à l'âge adulte, de qui le nombril s'étoit ulcéré à la suite d'une ischurie , & qui rendoit des urines par cet endroit , d'une manière continue , & non goutte à goutte. On trouve enfin dans l'Histoire de l'Académie de Chirurgie, *tome III*, l'observation d'un homme de trente-deux ans , dont le nombril s'est ouvert tout-à-coup en pareille circonstance , & qui a continué pendant quelque temps à uriner à la fois par la fistule qui s'y étoit établie , & par la verge ; mais cet état n'a pas été de longue durée , parce que le malade ayant cessé les efforts qu'il savoit procurer l'expulsion de ses urines par le nombril , elles ont repris leur route ordinaire. Ces deux faits, & celui que j'ai l'honneur de mettre sous les yeux de l'Académie, sont les seuls qui me soient connus où les urines se soient fait jour par une ouverture au ventre, en des personnes parvenues à l'âge adulte. Ils ne prouvent point que l'ouraque se soit dilaté pour leur donner issue ; mais la possibilité de cette dilatation est suffisamment établie par les observations de Littre. Si j'eusse pu porter la sonde jusqu'au lieu que la pierre occupoit, ou que j'eusse eu d'autres indices assurés de sa présence, il est vraisemblable qu'en rendant aux urines la facilité de s'écouler par les voies ordinaires, au moyen de son extraction, je les aurois détournées de la route qu'elles s'étoient pratiquée , ou que du moins j'aurois considérablement diminué la quantité de celles qui s'y portoient. Peut-être aussi qu'en incisant le trajet fistuleux, qui leur donnoit issue, & en diminuant ainsi de sa longueur, j'aurois rendu leur excrétion plus facile, & calmé les douleurs dont cette excrétion étoit accompagnée ; mais j'en ai été retenu par la circonspection que la rareté du fait a dû naturellement m'inspirer. Ne pouvant espérer de guérir ce malade, ce m'eût été une consolation bien grande de pouvoir rendre son existence moins pénible, & d'en prolonger la durée.



---

*M É M O I R E*  
*SUR LES PROBABILITÉS.*

Par M. DE LA PLACE.

I.

**J**E me propose de traiter dans ce Mémoire deux points importants de l'analyse des hasards, qui ne paroissent point avoir encore été suffisamment approfondis: le premier a pour objet, la manière de calculer la probabilité des évènements composés d'évènements simples dont on ignore les possibilités respectives; l'objet du second est l'influence des évènements passés sur la probabilité des évènements futurs, & la loi suivant laquelle en se développant, ils nous font connoître les causes qui les ont produits. Ces deux objets qui ont beaucoup d'analogie entr'eux, tiennent à une métaphysique très-délicate, & la solution des Problèmes qui leur sont relatifs, exige des artifices nouveaux d'analyse; ils forment une nouvelle branche de la théorie des probabilités, dont l'usage est indispensable lorsqu'on veut appliquer cette théorie à la vie civile. Je donne relativement au premier, une méthode générale pour déterminer la probabilité d'un événement quelconque, lorsqu'on ne connoît que la loi de possibilité des évènements simples; & dans le cas où cette loi est inconnue, je détermine celle dont on doit faire usage. La considération du second objet me conduit à parler des naissances: comme cette matière est une des plus intéressantes auxquelles on puisse appliquer le calcul des probabilités, je fais en sorte de la traiter avec tout le soin dû à son importance, en déterminant quelle est dans ce cas, l'influence des évènements observés sur ceux qui doivent avoir lieu, & comment en se multipliant, ils nous découvrent le véritable rapport des possibilités des naissances d'un garçon & d'une fille. En généralisant ensuite ces recherches, je

Remis  
le 19 Juillet  
1780.

parviens à une méthode pour déterminer non-seulement les possibilités des évènements simples, mais encore la probabilité d'un évènement futur quelconque, lorsque l'évènement observé est très-composé, quelle que soit d'ailleurs sa nature. Je donne à cette occasion, la solution de quelques Problèmes intéressans dans l'Histoire naturelle de l'Homme, tels que celui du plus ou moins de facilité des naissances des garçons relativement à celles des filles dans différens climats: c'est ici sur-tout qu'il est nécessaire d'avoir une méthode rigoureuse pour distinguer parmi les phénomènes observés, ceux qui peuvent dépendre du hasard, de ceux qui dépendent de causes particulières, & pour déterminer avec quelle probabilité ces derniers indiquent l'existence de ces causes. La principale difficulté que l'on rencontre dans ces recherches, tient à l'intégration de certaines fonctions différentielles qui ont pour facteurs des quantités élevées à de très-grandes puissances, & dont il faut avoir les intégrales approchées par des suites convergentes: j'ose me flatter que l'analyse dont je me suis servi pour cet objet, pourra mériter l'attention des Géomètres. Enfin je termine ce Mémoire par quelques réflexions dans lesquelles je présente ce que le calcul des probabilités m'a paru fournir de lumières sur le milieu que l'on doit choisir entre les résultats de plusieurs observations.

## I I.

DANS l'analyse des hasards, on se propose de connoître les probabilités des évènements composés suivant une loi quelconque, d'évènements simples dont les possibilités sont données: celles-ci peuvent être déterminées de ces trois manières; 1.<sup>o</sup> *a priori*, lorsque par la nature même des évènements, on voit qu'ils sont possibles dans un rapport donné; c'est ainsi qu'au jeu de *croix* & de *pile*, si la pièce que l'on jette en l'air est homogène, & que ses deux faces soient entièrement semblables, on juge *croix* & *pile* également possibles; 2.<sup>o</sup> *a posteriori*, en répétant un grand nombre de fois l'expérience qui peut amener l'évènement dont il s'agit, &

en examinant combien de fois il est arrivé; 3.<sup>o</sup> enfin par la considération des motifs qui peuvent nous déterminer à prononcer sur l'existence de cet événement; si, par exemple, les adresses respectives de deux Joueurs *A* & *B* sont inconnues, comme on n'a aucune raison de supposer *A* plus fort que *B*, on en conclut que la probabilité de *A* pour gagner une partie est  $\frac{1}{2}$ . Le premier de ces moyens donne la possibilité absolue des évènements; le second la fait connoître à peu-près, comme nous le ferons voir dans la suite, & le troisième ne donne que leur possibilité relative à l'état de nos connoissances.

Chaque événement étant déterminé en vertu des loix générales de cet Univers, il n'est probable que relativement à nous, & par cette raison, la distinction de la possibilité absolue & de la possibilité relative peut paroître imaginaire; mais on doit observer que parmi les circonstances qui concourent à la production des évènements, il y en a de variables à chaque instant, telles que le mouvement que la main imprime aux dés, & c'est la réunion de ces circonstances que nous nommons *hasard*: il en est d'autres qui sont constantes, telles que l'habileté des Joueurs, la pente des dés à retomber sur une de leurs faces plutôt que sur les autres, &c. celles-ci forment la *possibilité absolue* des évènements, & leur connoissance plus ou moins étendue forme leur *possibilité relative*; seules, elles ne suffisent pas pour les produire, il est de plus nécessaire qu'elles soient jointes aux circonstances variables dont j'ai parlé: elles ne font ainsi qu'augmenter la probabilité des évènements, sans déterminer nécessairement leur existence.

Les recherches que l'on a faites jusqu'ici sur l'analyse des hasards, supposent la connoissance de la possibilité absolue des évènements, & à l'exception de quelques remarques que j'ai données dans les *tomes VI & VII* des Mémoires des Savans Étrangers, je ne sache pas que l'on ait considéré le cas où l'on n'a que leur possibilité relative. Ce cas renferme un grand nombre de questions intéressantes, & la plupart des Problèmes

# 230 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

sur les jeux s'y rapportent ; on peut donc croire que si les Géomètres n'y ont pas fait une attention particulière , cela vient de ce qu'ils l'ont regardé comme susceptible des mêmes méthodes que celui où l'on connoît la possibilité absolue des évènements ; cependant la différence essentielle de ces possibilités ne peut manquer d'influer sur les résultats du calcul , en sorte que l'on s'exposeroit souvent à des erreurs considérables , en les employant de la même manière : c'est ce dont il est aisé de se convaincre par l'exemple suivant.

Supposons que deux Joueurs *A* & *B* , dont les adresses respectives sont inconnues , jouent à un jeu quelconque ; & proposons-nous de déterminer la probabilité que *A* gagnera les *n* premières parties.

S'il ne s'agissoit que d'une seule partie , il est clair que *A* ou *B* devant nécessairement la gagner , ces deux évènements sont également probables , en sorte que la probabilité du premier est  $\frac{1}{2}$  ; d'où en suivant la règle ordinaire de l'analyse des hasards , on conclut que la probabilité de *A* pour gagner les *n* premières parties , est  $\frac{1}{2^n}$  . Cette conséquence seroit exacte , si la probabilité  $\frac{1}{2}$  étoit fondée sur une égalité absolue entre les possibilités des deux évènements dont il s'agit ; mais il n'y a d'égalité que relativement à l'ignorance où nous sommes sur les adresses de deux Joueurs , & cette égalité n'empêche pas que l'un ne puisse être plus fort que l'autre.

Supposons conséquemment que  $\frac{1+a}{2}$  représente la probabilité du Joueur le plus fort pour gagner une partie , &  $\frac{1-a}{2}$  celle du plus foible ; en nommant *P* la probabilité que *A* gagnera les *n* premières parties , on aura

$$P = \frac{1}{2^n} \cdot (1+a)^n, \text{ ou } P = \frac{1}{2^n} \cdot (1-a)^n,$$

suivant que *A* sera le plus fort ou le plus foible : or comme on n'a aucune raison de le supposer plutôt l'un que l'autre ,

il est visible que pour avoir la véritable valeur de  $P$ , on doit prendre la moitié de la somme des deux valeurs précédentes, ce qui donne

$$P = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot [(1 + a)^n + (1 - a)^n].$$

En développant cette expression, on a

$$P = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \left[ 1 + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot a^4 + \&c. \right]$$

Cette valeur de  $P$  étant plus grande que  $\frac{1}{2}$ , lorsque  $n$  est plus grand que l'unité, on voit que l'inégalité qui peut exister entre les adresses des deux Joueurs, favorise celui qui parie 1 contre 2<sup>n</sup> — 1 que  $A$  gagnera les  $n$  premières parties, pourvu que l'on ignore de quel côté se trouve la plus grande adresse. Cette remarque que j'ai déjà faite ailleurs, est, si je ne me trompe, très-utile dans l'analyse des hasards, non-seulement en ce qu'elle montre la nécessité d'avoir égard à l'inégalité inconnue des adresses des Joueurs, mais encore en ce que l'on peut souvent déterminer si cette inégalité est favorable ou contraire à celui qui parie d'après le calcul ordinaire des probabilités.

### III.

CONSIDÉRONS encore deux Joueurs  $A$  &  $B$ , chacun avec un nombre donné de jetons, & jouant ensemble de manière qu'à chaque coup, celui qui perd donne un jeton à son adversaire; supposons que la partie ne doive finir que lorsqu'il ne restera plus de jetons à l'un des Joueurs, & déterminons dans ce cas leurs probabilités respectives pour gagner cette partie.

Pour cela, nommons généralement  $p$  l'adresse de  $A$ ,  $1 - p$  celle de  $B$ , &  $y_x$  la probabilité de  $A$  pour gagner la partie, lorsqu'il a  $x$  jetons; il peut arriver au coup suivant qu'il gagne un jeton à  $B$ , & dans ce cas sa probabilité se change en  $y_{x+1}$ ; il peut arriver qu'il en donne un à  $B$ , ce qui réduit sa probabilité à  $y_{x-1}$ ; or la probabilité du premier de ces deux

# 232 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

évènements est  $p$ , & celle du second est  $1 - p$ ; on aura donc l'équation aux différences finies,

$$y_x = p \cdot y_{x+1} + (1 - p) \cdot y_{x-1}.$$

Pour l'intégrer, soit  $y_x = C a^x$ , on aura

$$a = p a^2 + 1 - p;$$

les deux racines de cette équation sont  $a = 1$ , &  $a = \frac{1-p}{p}$ ;

partant, si  $C$  &  $C'$  représentent deux constantes arbitraires, l'expression complète de  $y_x$  sera

$$y_x = C + C' \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^x.$$

Pour déterminer ces deux constantes, on observera 1.<sup>o</sup> que  $x$  étant nul, on a  $y_x = 0$ , & que  $x$  étant égal au nombre total des jetons de  $A$  & de  $B$ , on a  $y_x = 1$ ; soit  $n$  ce nombre,  $m$  le nombre des jetons de  $A$  au commencement de la partie, & par conséquent  $n - m$  celui des jetons de  $B$ , on aura

$$0 = C + C';$$

$$1 = C + C' \left(\frac{1-p}{p}\right)^n;$$

d'où l'on tire

$$C = \frac{1}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n};$$

$$C' = - \frac{1}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n};$$

partant,

$$y_x = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-x}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n}.$$

On aura la probabilité  $y_x$  de  $A$  pour gagner la partie, en changeant

changeant dans cette expression  $x$  en  $m$ , ce qui donne

$$y_m = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^m};$$

& en changeant  $m$  en  $n - m$ ,  $p$  en  $1 - p$ , & réciproquement, on aura la probabilité de  $B$  pour gagner la partie, & l'on trouvera  $1 - y_m$  pour cette probabilité: c'est ce dont il est facile de s'assurer d'ailleurs; en considérant que  $A$  ou  $B$  devant nécessairement gagner la partie, la somme de leurs probabilités doit être égale à l'unité.

Maintenant, si l'on suppose les adresses des deux Joueurs égales, & par conséquent  $p = \frac{1}{2}$ , l'expression précédente de  $y_m$  devient  $\frac{1}{2}$ , ce qui ne fait rien connoître; mais en différenciant le numérateur & le dénominateur de cette expression

par rapport à  $p$ , on trouve que dans ce cas  $y_m = \frac{m}{n}$ ,

en sorte que les probabilités des deux Joueurs  $A$  &  $B$  sont en raison du nombre de leurs jetons: leurs mises respectives doivent donc être dans le même rapport. Examinons présentement le changement que doit occasionner dans leur sort une inégalité quelconque entre leurs adresses.

Soit  $\frac{1+a}{2}$  la plus grande, &  $\frac{1-a}{2}$  la plus petite; on changera successivement dans l'expression de  $y_m$ ,  $p$  en  $\frac{1+a}{2}$  &  $\frac{1-a}{2}$ ; on aura ainsi deux valeurs qui auront lieu suivant que  $A$  sera le plus fort ou le plus foible: la véritable expression de  $y_m$  sera donc égale à la moitié de la somme de ces deux valeurs; d'où l'on tire,

$$y_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{[(1+a)^{n-m} + (1-a)^{n-m}] \cdot [(1+a)^m - (1-a)^m]}{(1+a)^n - (1-a)^n};$$

on peut mettre cette expression sous cette forme,

$$y_m = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot (1-a^2)^m \cdot \frac{[(1+a)^{n-m} - (1-a)^{n-m}]}{(1+a)^n - (1-a)^n}.$$

Mém. 1778.

G g



Dans le cas de  $a = 0$ , nous venons de voir que  $y_m = \frac{m}{n}$ , en sorte qu'alors

$$(1 - a^2)^m \cdot \frac{[(1 + a)^{n-2m} - (1 - a)^{n-2m}]}{(1 + a)^n - (1 - a)^n} = \frac{n - 2m}{n};$$

or si l'on suppose  $m$  moindre que  $\frac{n}{2}$ , il est clair que  $a$  augmentant, la fraction  $\frac{(1 + a)^{n-2m} - (1 - a)^{n-2m}}{(1 + a)^n - (1 - a)^n}$  diminue, ainsi que le facteur  $(1 - a^2)^m$ ; on aura donc dans la supposition de  $a$  plus grand que zéro,

$$(1 - a^2)^m \cdot \frac{[(1 + a)^{n-2m} - (1 - a)^{n-2m}]}{(1 + a)^n - (1 - a)^n} = \frac{n - 2m}{n} - 2h,$$

$h$  étant nécessairement positif. Partant

$$y_m = \frac{m}{n} + h;$$

d'où il suit que l'inégalité des adresses de  $A$  & de  $B$ , est favorable à celui des deux Joueurs qui a le plus petit nombre de jetons.

$a$  restant le même, si  $m$  &  $n$  augmentant en conservant toujours le même rapport, il est clair que

$$(1 - a^2)^m \cdot \frac{[(1 + a)^{n-2m} - (1 - a)^{n-2m}]}{(1 + a)^n - (1 - a)^n} \text{ deviendra}$$

plus petit, & que l'on peut tellement faire croître  $n$  &  $m$ , que cette quantité soit plus petite qu'aucune grandeur donnée; donc si les deux Joueurs conviennent de doubler, de tripler, &c. leurs jetons, leur sort qui, dans le cas où les adresses sont égales, n'en sera point changé, deviendra très-différent, s'il y a une inégalité quelconque entre leurs adresses; la probabilité de celui qui a le plus petit nombre de jetons augmentera de plus en plus, jusqu'au point de différer infiniment peu de  $\frac{1}{2}$ , & par conséquent de la probabilité de son adversaire.

## I V.

EN général, si dans un Problème quelconque relatif aux deux Joueurs  $A$  &  $B$ , on représente par  $\frac{1+a}{2}$  l'adresse du plus fort, & par  $\frac{1-a}{2}$  celle du plus foible; le fort  $P$  du Joueur  $A$  supposé le plus fort, sera exprimé par une fonction de  $a$ , qui réduite en série, aura la forme suivante,

$$P = a + a_1 \cdot a + a_2 \cdot a^2 + a_3 \cdot a^3 + \&c.$$

En changeant  $a$  en  $-a$ , on aura pour l'expression de  $P$ , dans le cas où le Joueur  $A$  est le plus foible,

$$P = a - a_1 \cdot a + a_2 \cdot a^2 - a_3 \cdot a^3 + \&c.$$

On aura donc la véritable valeur de  $P$  en prenant la moitié de la somme des deux séries précédentes, ce qui donne

$$P = a + a_2 \cdot a^2 + a_4 \cdot a^4 + \&c.$$

Lorsque  $a$  est très-petit, on peut s'en tenir aux deux premiers termes de cette série, & l'on a sensiblement

$$P = a + a_2 \cdot a^2;$$

on connoîtra donc alors par le signe de  $a_2$ , si  $P$  est plus grand ou moindre que dans le cas où les adresses sont égales; il sera plus grand si  $a_2$  est positif, & moindre s'il est négatif.

De ce qu'il ne reste dans la valeur de  $P$  que des puissances paires de  $a$ , il résulte que le cas de  $a = 0$  indique toujours un *maximum* ou un *minimum* pour cette valeur; mais il est possible qu'elle soit susceptible de plusieurs *maxima* ou *minima*, & c'est ce qui aura lieu si la différentielle de  $P$ , prise par rapport à  $a$ , & égalée à zéro, donne pour  $a$  une ou plusieurs valeurs positives, comprises entre les limites

dans lesquelles  $\alpha$  peut être renfermé; dans ce cas, on cherchera si la supposition de  $\alpha = 0$  donne le plus grand de tous ces *maxima*, ou le plus petit de tous ces *minima*; si cela est, on pourra s'assurer que le sort  $P$  de  $A$  est ou n'est pas plus avantageux, que lorsque les adresses sont égales; mais si cela n'est pas, il sera impossible de prononcer sur cet objet, à moins que de connoître la loi de possibilité des adresses respectives.

## V.

IL est facile d'étendre les remarques précédentes à un nombre quelconque de Joueurs; supposons par exemple,  $r$  Joueurs  $A, B, C, D, \&c$ , & que l'on propose de déterminer la probabilité  $P$ , que les  $r$  Joueurs  $A, B, C, \&c$ ; gagneront les  $n$  premières parties. Il est clair que si leurs adresses étoient égales, la probabilité de chacun des Joueurs pour gagner une partie, ou ce qui revient au même, leur adresse respective seroit  $\frac{1}{i}$ , en sorte que la probabilité cherchée  $P$  seroit  $(\frac{r}{i})^n$ ; mais s'il existe une inégalité quelconque entre les adresses des Joueurs; en nommant  $\frac{1+\alpha}{i}$  la plus grande,  $\frac{1+\alpha'}{i}$  la deuxième dans l'ordre de grandeur,  $\frac{1+\alpha''}{i}$  la troisième, & ainsi de suite; on aura d'abord

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' + \&c. = 0,$$

puisque la somme de toutes ces adresses doit être égale à l'unité.

Si l'on nomme ensuite  $s, s', s'', \&c$ , les différentes sommes que l'on peut former, en ajoutant un nombre  $r$  des adresses précédentes; on aura autant de valeurs correspondantes de  $P$ , qui seront  $P = s^r, P = s'^r, P = s''^r, \&c$ ; le nombre de ces valeurs est égal à celui des combinaisons de

$i$  quantités prises  $r$  à  $r$ , & par conséquent égal à  $\frac{i.(i-1)...(i-r+1)}{1.2.3...r}$

on aura donc la véritable valeur de  $P$ , en divisant par ce nombre, la somme des valeurs précédentes, ce qui donne

$$P = \frac{1.2.3...r}{i.(i-1).(i-2)...(i-r+1)} . (s^n + s'^n + s''^n + \&c.).$$

Il est aisé de voir que chaque adresse se trouve répétée dans la somme  $s + s' + s'' + s''' + \&c$ , autant de fois que l'on peut combiner  $i - 1$ , quantités,  $r - 1$  à  $r - 1$ ; d'où il suit que cette somme est indépendante de  $a, a', a'', \&c$ , & égale à

$$\frac{(i-1).(i-2)...(i-r+1)}{1.2.3...(r-1)};$$

or, on prouvera facilement que dans ce cas, la somme  $s^n + s'^n + s''^n + \&c$ , est la plus petite possible, lorsque  $s = s' = s'' = \&c$ , ce qui suppose  $a = a' = a'' = \&c. = 0$ ; donc la valeur de  $P$  est la plus petite, lorsque les adresses des Joueurs sont égales, en sorte que l'inégalité de ces adresses favorise celui qui parie que les  $n$  premières parties seront gagnées par les  $r$  Joueurs  $A, B, C, \&c$ .

Il est visible que l'on peut faire des remarques analogues sur les jeux dans lesquels on fait usage de polyèdres, tels que le jeu des dés; car avec quelque soin qu'on ait formé ces polyèdres, il s'y rencontre nécessairement entre leurs différentes faces, des inégalités qui résultent de l'hétérogénéité de la matière qu'on emploie, & des défauts inévitables dans leur construction. En général, ces remarques ont lieu pour tous les évènements dont la possibilité est inconnue & peut varier dans certaines limites; & si dans la suite nous considérons particulièrement les évènements du jeu entre plusieurs Joueurs dont les adresses sont inconnues, ce n'est que pour nous rendre plus clairs, en fixant les idées sur un objet déterminé.

IL est infiniment peu probable que les adresses de deux Joueurs  $A$  &  $B$ , sont parfaitement égales; mais en même temps que l'on ignore de quel côté se trouve la plus grande ou la plus petite adresse, on ignore également la quantité de leur différence: ainsi tout ce que l'on peut conclure de la théorie précédente, c'est que le sort de tel ou tel Joueur est plus favorable que suivant le calcul ordinaire des probabilités, sans que l'on soit en état d'assigner de combien il est augmenté.

Cependant si l'on connoissoit la limite & la loi de possibilité des valeurs de  $a$ , rien ne seroit plus facile que de résoudre exactement ce Problème; car si l'on nomme  $q$  cette limite, & que l'on représente par  $\psi(a)$  la probabilité de  $a$ ; on voit d'abord que  $a$  devant nécessairement tomber entre 0 &  $q$ , la fonction  $\psi(a)$  doit être telle que l'on ait  $\int da \cdot \psi(a) = 1$ , l'intégrale étant prise depuis  $a = 0$  jusqu'à  $a = q$ ; on multipliera donc par  $da \cdot \psi(a)$  les probabilités déterminées par ce qui précède, & en intégrant ces produits depuis  $a = 0$  jusqu'à  $a = q$ , on aura les probabilités cherchées: on trouvera de cette manière, pour la valeur de  $P$  dans l'article XI,

$$P = \int \frac{da \cdot \psi(a)}{a^{n+1}} \cdot \{ (1+a)^n + (1-a)^n \}.$$

Si, par exemple,  $\psi(a)$  est égal à une constante  $l$ , en sorte que toutes les valeurs de  $a$  soient également possibles, l'équation

$$\int da \cdot \psi(a) = 1, \text{ donnera } l = \frac{1}{q}, \text{ \& l'on aura}$$

$$P = \frac{1}{(n+1)q \cdot a^{n+1}} \cdot \{ (1+q)^{n+1} - (1-q)^{n+1} \}.$$

La quantité  $a$  est une fonction du rapport des adresses absolues des deux Joueurs: au lieu donc de supposer la loi de la possibilité immédiatement connue, il est beaucoup plus naturel de la déduire de celle qui représente la possibilité de

l'adresse absolue d'un Joueur quelconque. Pour cela, comparons les adresses de tous les Joueurs à celle d'un Joueur unique, que nous prendrons pour unité d'adresse; & en représentant par l'abscisse  $x$  tous ces rapports, concevons élevées sur chaque point de l'abscisse, des ordonnées  $y$  proportionnelles au nombre supposé infini de tous les Joueurs dont l'adresse est  $x$ ; nous aurons ainsi une courbe renfermée entre les limites  $h$  &  $h'$ ,  $h$  étant la plus petite adresse &  $h'$  la plus grande; & il est visible que le rapport de l'ordonnée  $y$  à la somme de toutes les ordonnées, ou, ce qui revient au même, à l'aire entière de la courbe, exprimera la probabilité que l'adresse d'un Joueur quelconque est  $x$ . Cela posé, pour en conclure la loi de possibilité des valeurs de  $\alpha$ , soit  $y = \varphi(x)$ , & nommons  $a$  l'intégrale  $\int \partial x \cdot \varphi(x)$ , prise depuis  $x = h$  jusqu'à  $x = h'$ ; soit de plus  $x$  l'adresse de celui des deux Joueurs  $A$  &  $B$  qui est le plus foible, &  $x + u$  celle du

Joueur le plus fort; on aura  $\frac{x}{x+u} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ , ce qui

donne  $x + u = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \cdot x$ : or la probabilité que l'adresse

de l'un des Joueurs étant  $x$ , celle de l'autre sera  $x + u$ , est égale au double du produit des probabilités de  $x$  & de

$x + u$ , & par conséquent égale à  $\frac{2 \cdot \varphi(x) \cdot \varphi(x+u)}{a^2}$

$= \frac{2 \varphi(x) \cdot \varphi(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \cdot x)}{a^2}$ ; on aura donc  $2 \int \partial x$

$\frac{\varphi(x) \cdot \varphi(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \cdot x)}{a^2}$  pour la probabilité entière

de  $\alpha$ , l'intégrale étant prise depuis  $x = h$  jusqu'à

$x = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \cdot h'$ . Quant à la limite  $q$  de  $\alpha$ , on observera que

$h$  étant la plus petite adresse, &  $h'$  la plus grande, on a

$\frac{h'}{h} = \frac{1+q}{1-q}$ ; d'où l'on tire  $q = \frac{h' - h}{h' + h}$ .

Lorsque la fonction  $\varphi(x)$  est inconnue, il est impossible

de connoître exactement le sort des deux Joueurs  $A$  &  $B$ , & l'on est réduit à choisir les fonctions les plus vraisemblables. Nous nous occuperons de cet objet dans la suite; mais auparavant nous allons exposer une méthode générale pour déterminer le sort respectif d'un nombre quelconque de Joueurs, lorsqu'on ne connoît touchant leurs adresses, que la loi de leur possibilité: cette matière présente quelques difficultés assez considérables d'analyse, dont la solution est renfermée dans celle du Problème suivant.

## V I I.

## P R O B L È M E.

*Soient  $n$  quantités variables & positives  $t, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ , dont la somme soit  $s$ , & dont la loi de possibilité soit connue; on propose de trouver la somme des produits de chaque valeur que peut recevoir une fonction donnée  $\psi(t, t_1, t_2, \text{&c.})$  de ces variables, multipliée par la probabilité correspondante à cette valeur.*

## S O L U T I O N.

SUPPOSONS pour plus de généralité, que les fonctions qui expriment la possibilité des variables  $t, t_1, t_2, \text{&c.}$  soient discontinues, & représentons par  $q$  la plus petite valeur de  $t$ ; par  $\varphi(t)$ , la possibilité de  $t$ , depuis  $t = q$  jusqu'à  $t = q'$ ; par  $\varphi'(t) + \varphi(t)$ , la possibilité depuis  $t = q'$  jusqu'à  $t = q''$ ; par  $\varphi''(t) + \varphi'(t) + \varphi(t)$ , cette possibilité depuis  $t = q''$  jusqu'à  $t = q'''$ , & ainsi de suite jusqu'à  $t = \infty$ . Désignons ensuite les mêmes quantités relatives aux variables  $t_1, t_2, t_3, \text{&c.}$  par les mêmes lettres, en écrivant au bas les nombres 1, 2, 3, &c. en sorte que  $q_1, q_2, q_3, \text{&c.}$  expriment les plus petites valeurs de  $t_1, t_2, t_3, \text{&c.}$  que  $\varphi_1(t_1)$  exprime la possibilité de  $t_1$  depuis  $t_1 = q_1$  jusqu'à  $t_1 = q'_1$ , & ainsi du reste; dans cette manière de représenter les possibilités des variables, il est clair que la fonction  $\varphi(t)$  a lieu depuis  $t = q$  jusqu'à  $t = \infty$ , que la fonction  $\varphi'(t)$  a lieu depuis  $t = q'$  jusqu'à  $t = \infty$ ,  
ainsi

ainsi de suite. Pour reconnoître les valeurs de  $t, t_1, t_2, \&c.$  lorsque ces fonctions commencent à avoir lieu, nous multiplierons  $\varphi(t)$  par  $l^q$ ;  $\varphi'(t)$  par  $l^{q'}$ ;  $\varphi_1(t_1)$  par  $l^{q_1}$ ,  $\&c.$  les exposans des puissances de  $l$  qui multiplient chaque fonction, indiqueront alors ces valeurs; il suffira ensuite de supposer  $l = 1$  dans le dernier résultat du calcul: c'est à ces artifices très-simples que nous devons la facilité avec laquelle nous allons résoudre le Problème proposé.

La probabilité de la fonction  $\psi(t, t_1, t_2, \&c.)$  est évidemment égale au produit des probabilités de  $t, t_1, t_2, \&c.$ ; en sorte que si l'on substitue pour  $t$ , la valeur  $s - t_1 - t_2 - \&c.$ , que donne l'équation

$$t + t_1 + t_2 + \&c. = s,$$

le produit de la fonction proposée par sa probabilité, sera

$$\begin{aligned} & \psi(s - t_1 - t_2 - \&c. \ t_1, t_2, \&c.) \\ & \times \{ l^q \cdot \varphi(s - t_1 - t_2 - \&c.) + l^{q'} \cdot \varphi'(s - t_1 - t_2 - \&c.) + \&c. \} \\ & \times \{ l^{q_1} \cdot \varphi_1(t_1) + l^{q'_1} \cdot \varphi'_1(t_1) + \&c. \} \\ & \times \{ l^{q_2} \cdot \varphi_2(t_2) + l^{q'_2} \cdot \varphi'_2(t_2) + \&c. \} \\ & \times \&c. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & \psi(s - t_1 - t_2 - \&c. \ t_1, t_2, \&c.) \\ & \times \{ l^q \cdot \varphi(s - t_1 - t_2 - \&c.) + l^{q'} \cdot \varphi'(s - t_1 - t_2 - \&c.) + \&c. \} \\ & \times \{ l^{q_1} \cdot \varphi_1(t_1) + l^{q'_1} \cdot \varphi'_1(t_1) + \&c. \} \\ & \times \{ l^{q_2} \cdot \varphi_2(t_2) + l^{q'_2} \cdot \varphi'_2(t_2) + \&c. \} \\ & \times \&c. \end{aligned}} \right\} (A)$$

on aura donc la somme de tous ces produits, 1.<sup>o</sup> en multipliant la quantité précédente par  $\partial t_1$ , & en l'intégrant pour toutes les valeurs dont  $t_1$  est susceptible; 2.<sup>o</sup> en multipliant cette intégrale par  $\partial t_2$ , & en l'intégrant pour toutes les valeurs dont  $t_2$  est susceptible, & ainsi de suite, jusqu'à la dernière variable  $t_{n-1}$ ; mais ces intégrations successives exigent quelques attentions particulières.

Considérons un terme quelconque de la quantité (A), tel que

$$\begin{aligned} & l^{(i)} + q^{(i')} + q_1^{(i'')} + \&c. \psi(s - t_1 - t_2 - \&c.) \\ & \cdot \varphi^{(i)}(s - t_1 - t_2 - \&c.) \cdot \varphi_1^{(i')}(t_1) \cdot \varphi_2^{(i'')}(t_2) \cdot \&c. \end{aligned}$$



# 242 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

en le multipliant par  $\partial t_1$ , il faut l'intégrer pour toutes les valeurs possibles de  $t_1$ ; or il est clair que la fonction  $\phi^{(1)}(s - t_1 - t_2 - \&c.)$  n'a lieu que lorsque  $t$  ou  $s - t_1 - t_2 - \&c.$  est égal ou plus grand que  $q^{(1)}$ ; la plus grande valeur que  $t_1$  puisse recevoir est donc  $s - q^{(1)} - t_2 - t_3 - \&c.$  De plus,  $\phi_1^{(1)}(t_1)$  n'ayant lieu que lorsque  $t_1$  est égal ou plus grand que  $q_1^{(1)}$ , cette quantité est la plus petite valeur que  $t_1$  puisse recevoir; il faut donc prendre l'intégrale dont il s'agit depuis  $t_1 = q_1^{(1)}$  jusqu'à  $t_1 = s - q^{(1)} - t_2 - t_3 - \&c.$  ou, ce qui revient au même, depuis  $t_1 - q_1^{(1)} = 0$  jusqu'à  $t_1 - q_1^{(1)} = s - q^{(1)} - q_1^{(1)} - t_2 - \&c.$

On trouvera de la même manière, qu'en multipliant cette nouvelle intégrale par  $\partial t_2$ , il faudra l'intégrer depuis  $t_2 - q_2^{(1)} = 0$  jusqu'à  $t_2 - q_2^{(1)} = s - q^{(1)} - q_1^{(1)} - q_2^{(1)} - t_3 - \&c.$  En continuant d'opérer ainsi, on arrivera à une fonction de  $s - q^{(1)} - q_1^{(1)} - q_2^{(1)} - \&c.$  dans laquelle il ne restera aucune des variables  $t, t_1, t_2, \&c.$  cette fonction doit être rejetée si  $s - q^{(1)} - q_1^{(1)} - \&c.$  est négatif; car il est visible que dans ce cas, le système de fonctions  $\phi^{(1)}(t), \phi_1^{(1)}(t_1), \phi_2^{(1)}(t_2), \&c.$  ne peut être employé: en effet, les plus petites valeurs de  $t, t_1, t_2, \&c.$  étant par la nature de ces fonctions, égales à  $q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, \&c.$  la plus grande valeur que  $t$  puisse recevoir, est  $s - q_1^{(1)} - q_2^{(1)} - \&c.$  partant la plus grande valeur de  $t - q^{(1)}$ , est  $s - q^{(1)} - q_1^{(1)} - q_2^{(1)} - \&c.$  or la fonction

$\varphi^{(i)}(t)$  ne peut être employée que lorsque  $t - q^{(i)}$  est positif.

Au lieu de rejeter la fonction dont il s'agit, il est égal de supposer alors dans tous les termes de cette fonction,  $s - q^{(i)} - q_1^{(i')} - \&c$ , constamment égal à zéro; car, en ne considérant par exemple, que les trois variables  $t, t_1, t_2$ ; la dernière intégrale relative à  $\partial t_2$ , devant être prise depuis  $t_2 - q_2^{(i'')} = 0$  jusqu'à  $t_2 - q_2^{(i''')} = s - q^{(i)} - q_1^{(i')} - q_2^{(i'')} = 0$ , il est visible que cette intégrale sera nulle, toutes les fois que l'on supposera  $s - q^{(i)} - q_1^{(i')} - q_2^{(i'')} = 0$ .

Il résulte de ce que nous venons de dire, une méthode très-simple pour résoudre le Problème proposé.

Que l'on substitue, 1.<sup>o</sup> au lieu de  $t, q + u$  dans  $\varphi(t)$ ,  $q' + u$  dans  $\varphi'(t)$ ,  $q'' + u$  dans  $\varphi''(t)$ , &c. 2.<sup>o</sup> au lieu de  $t_1, q_1 + u_1$  dans  $\varphi_1(t_1)$ ,  $q'_1 + u_1$  dans  $\varphi'_1(t_1)$ , &c. 3.<sup>o</sup> au lieu de  $t_2, q_2 + u_2$  dans  $\varphi_2(t_2)$ , &c, & ainsi de suite; les quantités

$$l^1 \cdot \varphi(t) + l^{q'} \cdot \varphi'(t) + \&c,$$

$$l^{q_1} \cdot \varphi_1(t_1) + l^{q'_1} \cdot \varphi'_1(t_1) + \&c,$$

&c.

qui représentent les probabilités de  $t, t_1$ , &c. se changeront, la première, dans une fonction de  $u$ ; la seconde, dans une fonction de  $u_1$ , &c. nous désignerons ces fonctions par  $\Pi(u), \Pi_1(u_1), \Pi_2(u_2)$ , &c.

Que l'on change ensuite dans  $\psi(t, t_1, t_2, \&c.)$ ,  $t$  en  $k + u$ ,  $t_1$  en  $k_1 + u_1$ , &c. on aura une fonction de  $u, u_1, u_2$ , &c, que nous représenterons par  $\Gamma(u, u_1, u_2, \&c.)$ ; cela posé, on prendra l'intégrale

Hh ij

$$\int \partial u, \Gamma(s - u_1 - u_2 - \&c, u_1, u_2, \&c.) \cdot \Pi(s - u_1 - u_2 - \&c.) \\ \cdot \Pi_1(u_1) \cdot \Pi_2(u_2) \cdot \&c.$$

depuis  $u_1 = 0$  jusqu'à  $u_1 = s - u_2 - u_3 - \&c.$

On multipliera cette première intégrale par  $\partial u_2$ , & on l'intégrera depuis  $u_2 = 0$  jusqu'à  $u_2 = s - u_1 - \&c.$  on multipliera cette seconde intégrale par  $\partial u_3$ , & on l'intégrera depuis  $u_3 = 0$  jusqu'à  $u_3 = s - u_1 - u_2 - \&c.$  En continuant ainsi, on arrivera à une fonction de  $s$  seule, que nous désignerons par  $\Gamma(s)$ , & cette fonction sera la somme demandée de toutes les valeurs de  $\psi(t, t_1, t_2, \&c.)$ , multipliées par leur probabilité respective; mais pour cela, il faut avoir soin de changer dans un terme quelconque multiplié par  $l^{(i)} + q_1^{(i')} + q_2^{(i'')} + \&c.$ ,  $k$  en  $q^{(i)}$ ,  $k_1$  en  $q_1^{(i')}$ ,  $k_2$  en  $q_2^{(i'')}$ , &c. de diminuer  $s$  de l'exposant de  $l$ , & par conséquent d'écrire au lieu de  $s$ ,  $s - q^{(i)} - q_1^{(i')} - q_2^{(i'')} - \&c.$  de faire cette dernière quantité égale à zéro toutes les fois qu'elle sera négative; enfin de supposer  $l = 1$ .

Si  $\Gamma(u, u_1, u_2, \&c.)$ ,  $\Pi(u)$ ,  $\Pi_1(u_1)$ ,  $\Pi_2(u_2)$ , &c. sont des fonctions rationnelles & entières des variables  $u, u_1, u_2, \&c.$  d'exponentielles, de sinus & de cosinus, toutes ces intégrations successives seront possibles, parce qu'il est dans la nature de ces quantités de ne reproduire par les intégrations que des quantités du même genre: dans les autres cas, ces intégrations pourront n'être pas possibles; mais la méthode précédente réduit alors le Problème aux quadratures des courbes.

### V I I I.

LE cas de fonctions rationnelles & entières offre quelques simplifications qu'il n'est pas inutile d'exposer. Pour cela, soit  $u^i \cdot u_1^{i^1} \cdot u_2^{i^2} \cdot \&c.$  un produit quelconque des variables  $u, u_1, u_2, \&c.$  si après y avoir substitué pour  $u$  la valeur

$s - u_1 - u_2 - \&c.$  on le multiplie par  $\partial u_1$ , il est facile de s'assurer que l'intégrale

$$\int \partial u_1 : (s - u_1 - u_2 - \&c.)^i . u_1^{i'} . u_2^{i''} . \&c.$$

prise depuis  $u_1 = 0$  jusqu'à  $u_1 = s - u_2 - \&c.$  est

$$\frac{1.2.3\dots i . 1.2.3\dots i'}{1.2.3.4\dots(i+i'+1)} . (s - u_2 - u_3 - \&c.)^{i+i'+1} . u_2^{i''} . \&c.$$

en multipliant cette intégrale par  $\partial u_2$ , & en l'intégrant depuis  $u_2 = 0$  jusqu'à  $u_2 = s - u_1 - \&c.$  on aura pareillement

$$\frac{1.2.3\dots i . 1.2.3\dots i' . 1.2.3\dots i''}{1.2.3.4\dots(i+i'+i''+2)} . (s - u_1 - \&c.)^{i+i'+i''+2} . \&c.$$

& ainsi de suite; donc si l'on suppose

$$\Pi . (u) = A + B . u + C . u^2 + \&c.$$

$$\Pi_1 . (u_1) = A_1 + B_1 . u_1 + C_1 . u_1^2 + \&c.$$

$$\Pi_2 . (u_2) = A_2 + B_2 . u_2 + C_2 . u_2^2 + \&c.$$

&c.

& que l'on désigne par  $H . u^i . u_1^{i'} . u_2^{i''}$ , un terme quelconque de  $\Gamma(u, u_1, u_2, \&c.)$ ; la partie correspondante de  $\Upsilon(s)$  sera

$$\left. \begin{aligned} & 1.2.3\dots i . 1.2.3\dots i' . 1.2.3\dots i'' . \&c. H . s^{i+i'+i''+\&c.-1} \\ & \times \{A + (i+1) . B . s + (i+1) . (i+2) . C . s^2 + \&c.\} \\ & \times \{A_1 + (i'+1) . B_1 . s + (i'+1) . (i'+2) . C_1 . s^2 + \&c.\} \\ & \times \{A_2 + (i''+1) . B_2 . s + (i''+1) . (i''+2) . C_2 . s^2 + \&c.\} \\ & \times \&c. \end{aligned} \right\}; (B)$$

pourvu que dans le développement de cette quantité, au lieu d'une puissance quelconque  $c$  de  $s$ , on écrive  $\frac{s^c}{1.2.3\dots c}$ .

On aura ensuite la partie correspondante de la somme entière des valeurs de  $\psi(t, t_1, t_2, \&c.)$ , multipliées par

leur probabilité respective, en changeant un terme quelconque tel que  $H\lambda \cdot l'' \cdot s^c$ , en  $H\lambda \cdot (s - \mu)^c$ , & en substituant dans  $H$ , au lieu de  $k$ , la partie de l'exposant  $\mu$  qui est relative à  $t$ ; au lieu de  $k$ , la partie relative à  $t$ , & ainsi du reste.

Si, dans la formule (B), on suppose  $H = 1$  &  $0 = i = i' = i'' = \&c.$  on aura la somme des valeurs de l'unité, multipliées par leur probabilité respective: or il est visible que cette somme n'étant autre chose que la somme de toutes les combinaisons dans lesquelles l'équation

$$t + t_1 + t_2 + \&c. = s$$

a lieu, multipliées par leur probabilité, exprime conséquemment la possibilité de cette équation elle-même. Si dans les hypothèses précédentes, on suppose de plus que la loi de possibilité est la même pour les  $r$  premières variables  $t, t_1, \dots, t_{r-1}$ , & que pour les  $n - r$  dernières, elle soit encore la même, mais différente que pour les premières, on aura

$$A = A_1 \dots \dots = A_{n-r},$$

$$B = B_1 \dots \dots = B_{n-r},$$

&c.

$$A_r = A_{r+1} \dots \dots = A_{n-1},$$

$$B_r = B_{r+1} \dots \dots = B_{n-1},$$

&c.

& la formule (B) se changera dans celle-ci,

$$s^{n-r} \times \{ A + B \cdot s + 2 C \cdot s^2 + \&c. \}^{n-r} \times \{ A_r + B_r \cdot s + 2 C_r \cdot s^2 + \&c. \}^r \}; \quad (C)$$

cette formule servira à déterminer la probabilité que la somme des erreurs d'un nombre quelconque d'observations dont la loi de facilité est connue, sera comprise dans des limites données, ce qui peut être utile dans plusieurs circonstances,

& particulièrement lorsqu'il s'agit de prévoir le résultat d'un nombre quelconque d'observations. Comme ce Problème est d'ailleurs le plus simple auquel on puisse appliquer la méthode précédente, il est très-propre à l'éclaircir, & dans cette vue, nous allons considérer les exemples suivans.

## I X.

SUPPOSONS  $n - 1$  observations dont les erreurs puissent s'étendre depuis  $-h$  jusqu'à  $+g$ , & qu'en nommant  $z$  l'erreur de la première, la facilité soit exprimée par  $a + bz + cz^2$ ; supposons ensuite que cette facilité soit la même pour les erreurs  $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$  des autres observations, & cherchons la probabilité que la somme des erreurs de ces observations sera comprise dans les limites  $p$ , &  $p + e$ .

Si l'on fait  $z = t - h, z_1 = t_1 - h, \dots, z_{n-1} = t_{n-1} - h$ , il est clair que  $t, t_1, t_2, \dots$ , &c, seront positifs & pourront s'étendre depuis zéro jusqu'à  $h + g$ ; de plus, on aura

$$z + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} = t + t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} - (n-1)h.$$

Donc la plus grande valeur de la somme  $z + z_1 + \dots + z_{n-1}$ , étant, par la supposition, égale à  $p + e$ , & la plus petite étant égale à  $p$ , la plus grande valeur de  $t + t_1 + \dots + t_{n-1}$  sera  $(n-1)h + p + e$ , & la plus petite sera  $(n-1)h + p$ ; en faisant ainsi  $(n-1)h + p + e = s$ , &

$$t + t_1 + \dots + t_{n-1} = s - t_{n-1},$$

$t_{n-1}$  sera toujours positif & pourra s'étendre depuis zéro jusqu'à  $e$ . Cela posé, si l'on applique à ce cas les formules des deux articles précédens, on aura  $q = 0, q' = f + g$ ; d'ailleurs, la loi de facilité de l'erreur  $z$  étant  $a + bz + cz^2$ , on en conclura la loi de facilité de  $t$ , en changeant  $z$  en  $t - h$ ; soit  $a' = a - bh + ch^2$ ;  $b' = b - 2ch$ ; on aura  $a' + b't + ct^2$  pour cette facilité; ce sera donc la fonction  $\phi(t)$ ; mais comme depuis  $t = h + g$  jusqu'à

$t = \infty$ , la facilité des valeurs de  $t$  est nulle par l'hypothèse, on aura  $\varphi'(t) + \varphi(t) = 0$ , ce qui donne

$$\varphi'(t) = -(a' + b't + ct^2);$$

donc si l'on fait

$$a'' = a' + b'(h + g) + c(h + g)^2,$$

$$b'' = b' + 2c(h + g),$$

la quantité que nous avons nommée  $\Pi(u)$  dans l'*art. VII*, sera ici

$$a' + b'u + cu^2 = l^{h+g} \cdot (a'' + b''u + cu^2),$$

& l'on aura  $\Pi_1(u_1)$ ,  $\Pi_2(u_2)$ , ...,  $\Pi_{n-1}(u_{n-1})$ , en changeant dans cette quantité,  $u$  successivement en  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ .

Quant à la variable  $t_{n-1}$ , on observera que la possibilité de l'équation

$$z + z_1 + \dots + z_{n-1} = \mu,$$

étant, quel que soit  $\mu$ , égale au produit des possibilités de  $z, z_1, \dots, z_{n-1}$ , la possibilité de l'équation

$$t + t_1 + \dots + t_{n-1} = s - t_{n-1},$$

sera égale au produit des possibilités de  $t, t_1, \dots, t_{n-1}$ ; mais cette même possibilité est évidemment égale au produit des possibilités de  $t, t_1, \dots, t_{n-1}$ ; la loi de possibilité de  $t_{n-1}$  est donc constante & égale à l'unité; & comme cette variable ne doit s'étendre que depuis  $t_{n-1} = 0$  jusqu'à  $t_{n-1} = e$ , on aura  $q_{n-1} = 0$ ;  $q_{n-1}' = e$ ;  $\varphi_{n-1}(t_{n-1}) = 1$ ;  $\varphi_{n-1}'(t_{n-1}) + \varphi_{n-1}(t_{n-1}) = 0$ , partant  $\varphi_{n-1}'(t_{n-1}) = -1$ ; d'où il est aisé de conclure  $\Pi_{n-1}(u_{n-1}) = 1 - l^e$ ; la formule (C) de l'article précédent se changera conséquemment dans celle-ci,

$$l^{n-1} \cdot \{a' + b's + 2cs^2 - l^{h+g} \cdot (a'' + b''s + 2cs^2)\}^{n-1} \cdot (1 - l^e).$$

Soit

Soit

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2s + 2cs^2)^{n-1} &= a^{(1)} + b^{(1)}s + c^{(1)}s^2 + \&c. \\ (a^2 + b^2s + 2cs^2)^{n-2} \cdot (a^{(1)} + b^{(1)}s + 2cs^2) &= a^{(2)} + b^{(2)}s + c^{(2)}s^2 + \&c. \\ (a^2 + b^2s + 2cs^2)^{n-3} \cdot (a^{(1)} + b^{(1)}s + 2cs^2)^2 &= a^{(3)} + b^{(3)}s + c^{(3)}s^2 + \&c. \\ &\&c.\end{aligned}$$

&c cette dernière formule prendra la forme suivante,

$$\begin{aligned}&a^{(1)} \cdot s^{n-1} + b^{(1)} \cdot s^n + c^{(1)} \cdot s^{n+1} + \&c. \\ &- l^e \cdot \{a^{(1)} \cdot s^{n-1} + b^{(1)} \cdot s^n + c^{(1)} \cdot s^{n+1} + \&c.\} \\ &- (n-1) \cdot l^{h+e} \cdot \{a^{(2)} \cdot s^{n-1} + b^{(2)} \cdot s^n + c^{(2)} \cdot s^{n+1} + \&c.\} \\ &+ (n-1) \cdot l^{h+e+e} \cdot \{a^{(2)} \cdot s^{n-2} + b^{(2)} \cdot s^n + c^{(2)} \cdot s^{n+2} + \&c.\} \\ &+ \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2} \cdot l^{2h+2e} \cdot \{a^{(3)} \cdot s^{n-2} + \&c.\} \\ &- \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2} \cdot l^{2h+2e+e} \cdot \{a^{(3)} \cdot s^{n-3} + \&c.\} \\ &- \&c.\end{aligned}$$

on en conclura la probabilité cherchée, en y changeant un terme quelconque tel que  $\lambda l^h \cdot s^e$  en  $\frac{\lambda \cdot (s - \mu)^e}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot e}$ , ce qui donne pour cette probabilité, l'expression suivante,

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)} \cdot \left\{ \begin{aligned} &a^{(1)} \cdot \{s^{n-1} - (s-e)^{n-1}\} + \frac{b^{(1)}}{n} \{s^n - (s-e)^n\} \\ &+ \frac{c^{(1)}}{n \cdot (n+1)} \cdot \{s^{n+1} - (s-e)^{n+1}\} + \&c. \\ &- (n-1) \cdot \left[ a^{(2)} \{ (s-h-g)^{n-1} - (s-h-g-e)^{n-1} \} \right. \\ &+ \frac{b^{(2)}}{n} \cdot \{ (s-h-g)^n - (s-h-g-e)^n \} + \&c. \left. \right] \\ &+ \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2} \cdot \left[ a^{(3)} \{ (s-2h-2g)^{n-2} \right. \\ &- (s-2h-2g-e)^{n-2} \} + \&c. \left. \right] \\ &- \&c. \end{aligned} \right.$$

Mém. 1778.

li



250 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

en observant de rejeter les termes multipliés par  $(s - \mu)^r$ , dans lesquels  $\mu$  est plus grand que  $s$ . On peut, au moyen de cette formule, résoudre un Problème que je me suis proposé ailleurs, sur les inclinaisons des orbites des Comètes; en supposant toutes les inclinaisons à l'écliptique également possibles, il s'agissoit de déterminer la probabilité que l'inclinaison moyenne des orbites de  $n - 1$  Comètes sera comprise dans les limites  $\theta$  &  $\theta'$ , ou ce qui revient au même, que la somme de leurs inclinaisons sera comprise dans les limites  $(n - 1).\theta$  &  $(n - 1).\theta'$ . En nommant  $t, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ , ces inclinaisons; comme elles peuvent s'étendre depuis zéro jusqu'à  $90^\circ$ , on aura  $f = 0$ , &  $g = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  exprimant le rapport de la demi-circonférence au rayon; de plus, leur possibilité dans cet intervalle étant constante, la fonction  $a^r + b^r t + c^r t^2$  se réduit à la constante  $a^r$ , d'où il est aisé de conclure  $a^{(1)} = a^{(2)} = \dots = a^{(n-1)} = \&c.$   $0 = b^{(1)} = b^{(2)} = \dots = b^{(n-1)} = \&c.$   $0 = c^{(1)} = c^{(2)} = \dots = c^{(n-1)} = \&c.$  d'ailleurs, la valeur de  $t$  étant nécessairement comprise dans les limites  $0$  &  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\int a^r dt = 1$ , l'intégrale étant prise pour toute l'étendue de ces limites, d'où l'on tire  $a^r = \frac{2}{\pi}$ ; la formule précédente donnera ainsi pour la probabilité demandée,

$$\frac{2^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1).\pi^{n-1}} \cdot \left\{ \begin{aligned} & s^{n-1} - (s-e)^{n-1} - (n-1) \cdot \left\{ (s-\frac{\pi}{2})^{n-1} \right. \\ & \left. - (s-e-\frac{\pi}{2})^{n-1} \right\} \\ & + \frac{(n-1).(n-2)}{1.2} \cdot \left\{ (s-\pi)^{n-1} - (s-e-\pi)^{n-1} \right\} \\ & - \frac{(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3} \cdot \left\{ (s-\frac{3}{2}\pi)^{n-1} \right. \\ & \left. - (s-e-\frac{3}{2}\pi)^{n-1} \right\} + \&c. \end{aligned} \right\}$$

où l'on doit observer que  $s = (n-1).\theta'$ ; &  $e = (n-1).(\theta' - \theta)$ .

## X.

$z, z_1, z_2, \&c.$  représentant toujours les erreurs de  $n - 1$  observations; supposons que la loi de facilité tant de l'erreur positive  $z$ , que de l'erreur négative  $-z$ , soit  $h - z$ , & que  $h$  &  $-h$  soient les limites de cette erreur; supposons de plus, que cette loi soit la même pour les erreurs  $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ , des autres observations, & que l'on cherche la probabilité que la somme des erreurs sera comprise dans les limites  $p$ , &  $p + e$ .

Si l'on fait  $z = t - h, z_1 = t_1 - h, \&c.$  il est clair que  $t, t_1, \&c.$  seront toujours positifs, & pourront s'étendre depuis zéro jusqu'à  $2h$ ; la loi de facilité de  $t$ , depuis  $t = 0$  jusqu'à  $t = h$ , sera exprimée par  $t$ ; cette même loi, depuis  $t = h$  jusqu'à  $t = 2h$ , sera  $2h - t$ ; elle sera nulle depuis  $t = 2h$  jusqu'à  $t = \infty$ ; on aura ainsi dans ce cas,  $q = 0; q' = h; q'' = 2h$ ;

$$\phi(t) = t,$$

$$\phi'(t) + \phi(t) = 2h - t,$$

$$\phi''(t) + \phi'(t) + \phi(t) = 0;$$

D'où l'on tire

$$\phi'(t) = 2h - 2t,$$

$$\phi''(t) = t - 2h.$$

La fonction que nous avons désignée par  $\Pi(u)$ , dans l'article VII, sera donc  $u(1 - 1^h)$ , & l'on aura les fonctions  $\Pi_1(u_1) \dots \Pi_{n-1}(u_{n-1})$ , en y changeant  $u$  successivement en  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ .

Présentement, on a

$$z + z_1 + \dots + z_{n-1} = t + t_1 + \dots + t_{n-1} - (n - 1)h;$$

donc la somme des erreurs  $z, z_1, \&c.$  devant par l'hypothèse être renfermée dans les limites  $p$  &  $p + e$ , la somme des

valeurs de  $t, t_1, t_2, \&c.$  sera comprise dans les limites  $(n-1)h + p + e$ , &  $(n-1)h + p$ , en sorte que si l'on fait  $(n-1)h + p + e = s$ , &  $t + t_1 + \dots + t_{n-1} = s - t_{n-1}, t_{n-1}$  pour  $s$  s'étendre depuis 0 jusqu'à  $e$ ; & l'on prouvera, comme dans l'exemple précédent, que la facilité doit être supposée constante & égale à l'unité dans cet intervalle, & qu'elle doit être supposée nulle depuis  $t_{n-1} = e$  jusqu'à  $t_{n-1} = \infty$ ; d'où l'on conclura, comme dans ce même exemple,

$$\Pi_{n-1} \cdot (u_{n-1}) = 1 - l',$$

la formule (C) de l'article VIII deviendra ainsi

$$s^{2n-2} \cdot (1 - lh)^{2n-2} \cdot (1 - l'),$$

& l'on aura la probabilité cherchée en changeant dans le développement de cette quantité, un terme quelconque tel que  $\lambda l^\mu \cdot s^{2n-2}$ , en  $\frac{\lambda \cdot (s - \mu)^{2n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n-2)}$ ; ce qui donne pour l'expression de cette probabilité,

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n-2)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} s^{2n-2} - (s - e)^{2n-2} \\ - (2n-2) \cdot \{ (s-h)^{2n-2} - (s-h-e)^{2n-2} \} \\ + \frac{(2n-2) \cdot (2n-3)}{1 \cdot 2} \{ (s-2h)^{2n-2} - (s-2h-e)^{2n-2} \} \\ - \&c. \end{array} \right\}$$

en ayant soin de rejeter les termes multipliés par  $(s - \mu)^{2n-2}$  lorsque  $s - \mu$  est négatif.

Je dois observer ici que M. de la Grange a déjà résolu le Problème où l'on se propose de trouver la probabilité que la somme des erreurs de plusieurs observations sera comprise dans des limites données, lorsque la loi de facilité de ces erreurs est exprimée par une fonction rationnelle & entière de ces erreurs, d'exponentielles, de sinus & de cosinus (voyez le tome V des *Mémoires de Turin*, page 221); la méthode

est très-ingénieuse & digne de son illustre auteur; mais la précédente a, si je ne me trompe, l'avantage d'être plus directe & plus générale, en ce qu'elle réduit la solution du Problème aux quadratures des courbes, quelle que soit la loi de facilité des erreurs des observations.

## X I.

Voyons maintenant l'usage que l'on peut faire de la théorie précédente, dans la solution des Problèmes relatifs à un nombre  $n - 1$  de Joueurs dont on ne connoît que la possibilité des adresses. Soient  $t, t_1, \dots, t_{n-1}$ , les adresses absolues des Joueurs;  $h, h_1, h_2, \dots$  les plus petites valeurs de  $t, t_1, \dots$  &c.  $h', h'_1, h'_2, \dots$  leurs plus grandes valeurs; si

l'on fait  $h' + h'_1 + h'_2 + \dots = s,$

&  $t + t_1 + \dots + t_{n-1} = s - t_{n-1},$

la variable  $t_{n-1}$ , pourra s'étendre depuis zéro jusqu'à  $h' - h + h'_1 - h_1 + \dots$  la loi de la possibilité doit être supposée constante & égale à l'unité dans cet intervalle, & nulle au-delà jusqu'à  $t_{n-1} = \infty$ ; de plus, il est clair que les adresses respectives des Joueurs seront

$$\frac{t}{s - t_{n-1}}, \frac{t_1}{s - t_{n-1}}, \frac{t_2}{s - t_{n-1}}, \dots$$

On cherchera donc, par les méthodes connues de l'analyse des hasards, la solution du Problème proposé, en partant de ces adresses respectives, & l'on arrivera à un résultat qui sera une fonction de

$$\frac{t}{h' + h'_1 + \dots - t_{n-1}}, \frac{t_1}{h' + h'_1 + \dots - t_{n-1}}, \dots$$

En y substituant au lieu de  $s$ , la valeur, cette fonction sera celle que nous avons désignée par  $\psi(t, t_1, t_2, \dots)$  dans le Problème de l'article VII; il ne s'agira plus ensuite que de

chercher par la méthode de ce Problème, la somme de toutes les valeurs dont cette fonction est susceptible, multipliée par leur probabilité, & cette somme sera le résultat demandé : il ne reste plus, comme on voit, dans ce genre de Problèmes, que les difficultés inévitables de l'analyse, difficultés qui deviennent beaucoup moindres si l'on suppose que la loi de possibilité des adresses est la même pour tous les Joueurs,

## X I I.

CETTE loi ne peut être connue que par une longue suite d'observations, & le plus souvent les circonstances ne permettent pas de les faire ; on ne peut suppléer à cette ignorance que par le choix des fonctions les plus vraisemblables ; l'analyse des hasards, qui n'est en elle-même que l'art d'apprécier les vraisemblances, doit donc nous guider dans ce choix : examinons ce qu'elle peut nous fournir de lumières sur cet objet.

Nous observerons d'abord que s'il est difficile de connoître par l'observation, la loi de facilité des adresses des Joueurs, il est beaucoup plus aisé d'en connoître les limites ; car supposons que l'on ait observé la plus grande inégalité de ces adresses, & que l'on ait trouvé que le rapport de l'adresse du Joueur le plus fort au Joueur le plus faible est  $m$  ; en nommant  $h$  la plus petite adresse des Joueurs, &  $h'$  la plus grande, on aura  $\frac{h'}{h} = m$  ; or si l'on nomme 1 l'adresse moyenne, &  $x$  l'excès de  $h'$  sur cette adresse, on aura  $1 + x = h'$ ,  $1 - x = h$  ; donc  $\frac{1+x}{1-x} = m$ , d'où l'on tire  $x = \frac{m-1}{m+1}$  ; partant  $h = \frac{2}{m+1}$  &  $h' = \frac{2m}{m+1}$ ,

Maintenant la loi de possibilité des adresses étant nulle au-delà des limites  $h$  &  $h'$ , il est très-vraisemblable qu'elle va en croissant depuis ces limites jusqu'au milieu de l'intervalle qui les sépare, & qu'elle est la même de chaque côté de ce milieu ; voilà donc une condition à laquelle on doit

assujétir la fonction dont on fera choix ; mais cette fonction reste encore très-indéterminée, & comme parmi celles qui peuvent satisfaire à la condition précédente, on n'a aucune raison d'en préférer une, il faut prendre une fonction moyenne entre toutes ces fonctions : la question est ainsi réduite à déterminer cette fonction moyenne.

Pour cela, soit  $2a$  l'intervalle compris entre les deux limites, &  $x$  la distance du milieu de cet intervalle à un point quelconque pris de l'un ou de l'autre côté de ce milieu ; si l'on élève à ce point une ordonnée  $y$  qui représente la probabilité de  $x$ , on aura une courbe renfermée entre les deux limites, & la valeur de  $x$  devant nécessairement tomber dans cet intervalle, la surface de cette courbe sera égale à l'unité, en sorte que depuis le milieu jusqu'à l'une des limites, cette surface sera  $\frac{1}{2}$  ; on peut donc concevoir cette quantité  $\frac{1}{2}$ , partagée dans un nombre infini de parties égales distribuées au-dessus des différens points de l'intervalle  $a$  ; par la condition du Problème, cette répartition doit être telle, qu'il y ait d'autant moins de ces parties au-dessus de chaque point qu'il s'éloigne davantage du milieu ; toutes les combinaisons dans lesquelles cela existe, sont également admissibles ; & l'on aura l'ordonnée moyenne qui en résulte pour l'abscisse  $x$ , en prenant la somme de toutes les ordonnées  $y$ , relatives à chaque combinaison, & en la divisant par le nombre de ces combinaisons.

Supposons d'abord le nombre des points de l'intervalle  $a$ , fini & égal à  $n$ , & nommons  $s$  le nombre infini de parties qu'il faut distribuer au-dessus de ces points, en observant la condition précédente ; soit de plus,  $z$  l'ordonnée relative au  $n^{\text{ième}}$  point ;  $z + z_1$  l'ordonnée relative au  $(n - 1)^{\text{ième}}$  point ;  $z + z_1 + z_2$  l'ordonnée relative au  $(n - 2)^{\text{ième}}$  point, & ainsi de suite, en sorte que l'ordonnée relative au premier point, ou au point du milieu de l'intervalle  $2a$ , soit  $z + z_1 + \dots + z_{n-1}$  ; il est visible que  $z, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$  seront nécessairement positifs, & que l'on aura

$$nz + (n-1)z_1 + (n-2)z_2 + \dots + z_{n-1} = s$$

soit

$$nz = t; (n-1)z_1 = t_1; (n-2)z_2 = t_2; \dots z_{n-1} = t_{n-1}$$

l'équation précédente deviendra

$$t + t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} = s;$$

les variables  $t, t_1, t_2, \dots$  pourront s'étendre depuis zéro jusqu'à  $s$ , & l'ordonnée relative au  $r^{\text{ième}}$  point sera

$$\frac{t}{n} + \frac{t_1}{n-1} + \frac{t_2}{n-2} + \dots + \frac{t_{n-r}}{r}.$$

Il faut conséquemment déterminer la somme de toutes les variations que peut recevoir cette quantité, & la diviser par le nombre de ces variations: or il est visible que ce Problème rentre dans celui de l'article VII; que la quantité que nous y avons nommée  $\psi(t, t_1, t_2, \dots)$  est ici

$$\frac{t}{n} + \frac{t_1}{n-1} + \dots + \frac{t_{n-r}}{r};$$

que les quantités  $q$  &  $q'$  sont ici 0 &  $s$ , & que la loi de facilité des variations de  $t$  doit être supposée égale à une constante  $b$ , & la même que pour  $t_1, t_2, \dots$  on aura donc, dans le cas présent,

$$\Gamma(u, u_1, u_2, \dots) = \left\{ \frac{k}{n} + \frac{k_1}{n-1} + \dots + \frac{k_{n-r}}{r} \right. \\ \left. + \frac{n}{n} + \frac{n_1}{n-1} + \dots + \frac{n_{n-r}}{r} \right\}$$

$$\Pi(u) = \Pi_1(u_1) = \Pi_2(u_2) = \dots = b(1 - l');$$

mais comme il faut distinguer les limites 0 &  $s$ , qui appartiennent aux variables  $t, t_1, \dots, t_{n-1}$ , afin d'assigner à  $k, k_1, \dots, k_{n-1}$  les valeurs qui leur conviennent, nous représenterons par  $c', s'; c'', s''; c''', s'''$ , &c. ces limites; cela posé, la formule (B) de l'article VIII donnera pour  $\Gamma(s)$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(\frac{k}{n} + \frac{k_1}{n-1} + \frac{k_2}{n-2} \dots + \frac{k_{n-r}}{r})}{1.2.3 \dots (n-1)} \cdot s^{n-1} \\ + \frac{(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \dots + \frac{1}{r})}{1.2.3 \dots n} \cdot s^n \end{array} \right\} \cdot b^n \cdot (1-l^s)^r \cdot (l^{c^1} - l^{s^1}) \cdot (l^{c^{11}} - l^{s^{11}}) \cdot \&c.$$

Il faut ensuite dans le développement de cette quantité, substituer pour  $k$ , la partie de l'exposant de  $l$ , qui dépend de  $c^1$  & de  $s^1$ ; pour  $k_1$ , la partie de cet exposant qui dépend de  $c^{11}$  & de  $s^{11}$ , &c. diminuer  $s$  de l'exposant entier de  $l$ , & rejeter ce terme toutes les fois que cet exposant ainsi diminué, sera négatif; enfin supposer  $0 = c^1 = c^{11} = c^{111} = \&c.$   $s = s^1 = s^{11} = \&c.$  &  $l = 1$ ; la quantité précédente se réduira ainsi à cette formule très-simple,

$$\frac{b^n \cdot s^n}{1.2.3 \dots n} \cdot \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} \dots + \frac{1}{r} \right\};$$

en divisant cette quantité par le nombre de toutes les combinaisons, qui ne peut être une fonction de  $n$ , on aura pour l'ordonnée moyenne correspondante au  $r^{\text{ieme}}$  point,

$$N \cdot \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \dots + \frac{1}{r} \right\}$$

$N$  étant fonction de  $n$ .

Supposons maintenant que les nombres  $n$  &  $r$  deviennent infinis, que le  $r^{\text{ieme}}$  point réponde à l'abscisse  $x$ , & le  $n^{\text{ieme}}$  point à l'abscisse  $a$ , on aura, comme l'on fait,

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \dots + \frac{1}{r} = \log. n - \log. r = \log. \frac{n}{r} = \log. \frac{a}{x};$$

donc l'ordonnée moyenne  $y$  qui répond à l'abscisse  $x$ , est

$$N \cdot \log. \frac{a}{x}; \text{ on déterminera } N, \text{ en observant que l'on doit}$$

$$\text{avoir } \int N dx \cdot \log. \frac{a}{x} = \frac{1}{2}, \text{ l'intégrale étant prise depuis}$$

$$x = 0 \text{ jusqu'à } x = a, \text{ ce qui donne } N = \frac{1}{\frac{1}{2} a};$$

Mém. 1778.

Kk



$$nz + (n-1)z_1 + (n-2)z_2 + \dots + \log \frac{a}{x};$$

soit

$$nz = 1; (n-1)z_1 = 1; \dots$$

l'équation

## XIII.

les

j

l'équation dont il faut faire usage, lorsqu'on est relativement à la possibilité des valeurs de  $x$ , d'autres valeurs, si ce n'est qu'elle est d'autant moindre que ces valeurs sont plus grandes: or, c'est ce qui a lieu dans un grand nombre de circonstances. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse du véritable instant d'un phénomène observé par plusieurs Observateurs; chacun d'eux peut aisément fixer la plus grande erreur dont son observation est susceptible, soit en plus, soit en moins, en prenant pour cette limite, la moitié du plus grand intervalle qu'il peut supposer entre deux observations semblables, sans les rejeter comme mauvaises; cet intervalle est ce que nous avons nommé  $2a$ ; il dépend de l'adresse de l'Observateur, de la bonté de ses instrumens, & de la précision dont l'observation dont il s'agit est susceptible, & il doit être supposé le même pour tous les Observateurs, si l'on n'a aucune raison de préférer sous ce point de vue une observation à une autre. Maintenant, il est naturel de penser que les mêmes erreurs en plus & en moins, sont également probables, & que leur facilité est d'autant moindre, qu'elles sont plus grandes: si l'on n'a aucune autre donnée, relativement à leur facilité, on retombe évidemment dans le cas du Problème précédent; il faut donc supposer alors la possibilité, tant de l'erreur positive  $x$ , que de l'erreur négative  $-x$ , égale à  $\frac{1}{2a} \cdot \log \frac{a}{x}$ ; & c'est de cette loi de possibilité dont il faut partir dans la recherche du milieu que l'on doit choisir entre les résultats de plusieurs observations.

Lorsqu'il s'agit des adresses des Joueurs, on a (*art. XII*)  
 $z = h' - h$ ; l'adresse  $t$  d'un Joueur quelconque est  
 le à  $1 \pm x$ ; la possibilité de  $t$ , depuis  $t = h$  jusqu'à  
 $t = h'$ , sera donc représentée par  $\frac{1}{h' - h} \cdot \log. \left( \frac{h' - h}{2 - 2t} \right)$ ,

survu que l'on fasse les logarithmes des quantités négatives  
 égaux aux logarithmes des quantités positives. En appliquant  
 à ce cas les formules de l'*article VII*, on aura  $q = h$ ;  $q' = h'$ ;

$$\varphi(t) = \frac{1}{h' - h} \cdot \log. \left( \frac{h' - h}{2 - 2t} \right);$$

$$\varphi'(t) + \varphi(t) = 0, \text{ ou } \varphi'(t) = \frac{1}{h - h'} \cdot \log. \left( \frac{h' - h}{2 - 2t} \right);$$

on doit supposer d'ailleurs cette loi de possibilité la même  
 pour les adresses de tous les Joueurs; on aura ainsi toutes les  
 données nécessaires à la solution des Problèmes que l'on  
 peut se proposer relativement à un nombre quelconque de  
 Joueurs; & en appliquant à ces données l'analyse de l'*art. VII*,  
 on parviendra au seul résultat qui convient à l'état d'ignorance  
 où nous nous supposons relativement à la facilité des adresses  
 des Joueurs.

## X I V.

LA théorie précédente suppose que l'on n'a aucune raison  
 d'attribuer à l'un des Joueurs plus d'adresse qu'aux autres,  
 ce qui est vrai lorsque le jeu commence; mais à mesure  
 que les parties se succèdent, & que les évènements du jeu se  
 multiplient, on acquiert de nouvelles lumières sur leurs forces  
 respectives, en sorte qu'elles seroient exactement connues, si  
 le nombre des parties étoit infini, comme nous le démon-  
 trerons dans la suite: les adresses des Joueurs, & plus géné-  
 ralement les différentes causes des évènements, sont ainsi liées  
 à leur existence par des loix qu'il est très-important de bien  
 connoître, & sous ce point de vue, on ne peut douter que  
 les évènements passés n'influent sur la probabilité des évène-  
 mens futurs. Examinons cette influence, & la manière dont  
 on doit en tenir compte.

Pour cela, nommons  $E$  l'évènement déjà passé;  $e$  l'évènement futur dont on propose de calculer la probabilité  $P$ ;  $E + e$  un évènement composé de l'évènement  $E$  arrivant le premier, & de l'évènement  $e$  arrivant ensuite: si l'on détermine par la théorie précédente & sans avoir égard aux évènements passés, la probabilité de l'évènement  $E$  & celle de l'évènement  $E + e$ ; que l'on nomme  $V$  la première de ces probabilités, &  $v$  la seconde; il est clair que cette dernière probabilité  $v$  sera égale à la probabilité de l'évènement  $E$ , multipliée par la probabilité cherchée  $P$  que  $E$  ayant déjà eu lieu, l'évènement  $e$  lui succédera; on aura ainsi  $PV = v$ , ce qui donne

$$P = \frac{v}{V};$$

la méthode précédente s'applique donc également au cas où l'on a égard aux évènements passés; & il n'en résulte qu'un calcul plus composé.

Lorsque la possibilité des évènements est connue *a priori* & par la nature même des causes qui les produisent, comme la possibilité d'amener une face donnée d'un dé dont la matière est homogène & dont les faces sont parfaitement égales, la probabilité  $v$  de l'évènement  $E + e$ , se détermine en calculant séparément les probabilités de  $E$  & de  $e$ , & en les multipliant l'une par l'autre, en sorte que la valeur de  $P$  est égale à la probabilité de  $e$ . Il suit de-là que les évènements passés n'ont alors aucune influence sur la probabilité des évènements futurs; on peut s'en assurer d'ailleurs, en observant que, quels que soient les évènements déjà arrivés, leur possibilité absolue reste toujours la même, ce qui rend la considération du passé entièrement inutile, lorsque cette possibilité est exactement connue; mais il n'en est pas ainsi quand elle ne l'est pas; car il est visible que les évènements passés doivent rendre plus ou moins probables les différentes valeurs qu'on peut lui supposer, suivant qu'elles leur sont plus ou moins favorables. Cette remarque nous conduit naturellement à déterminer la probabilité des causes prise des évènements.

## X V.

SUPPOSONS qu'un évènement donné ne puisse être produit que par les  $n$  causes  $A, A', \dots A^{(n-1)}$ ; soit  $x$  la probabilité qui en résulte pour l'existence de  $A$ ;  $x'$  celle de l'existence de  $A'$ ;  $x''$  celle de l'existence de  $A''$ , &c. Si l'on nomme  $a, a', a'',$  &c. les probabilités que les causes  $A, A', A'',$  &c. étant supposées exister, produiront l'évènement dont il s'agit, il est clair que la probabilité d'un second évènement semblable au premier, sera égale au produit de  $a$  par la probabilité  $x$  de la cause  $A$ , plus au produit de  $a'$  par la probabilité  $x'$  de la cause  $A'$ , plus &c. d'où il suit que l'on aura  $ax + a'x' + a''x'' + \dots$  pour cette probabilité : on trouvera de la même manière,

$$a^2x + a'^2x' + a''^2x'' + \dots$$

pour la probabilité de deux évènements consécutifs semblables au premier,

$$a^3x + a'^3x' + a''^3x'' + \dots$$

pour la probabilité de trois évènements consécutifs semblables, & ainsi de suite. On aura par l'article précédent, ces mêmes probabilités, en cherchant *a priori* les probabilités de deux, de trois, de quatre, &c. évènements consécutifs, & en les divisant par la probabilité du premier : or la probabilité d'un premier évènement est  $a$  ou  $a'$ , ou  $a''$ , &c. suivant que la cause  $A$  ou la cause  $A'$ , ou &c. existe; ce qui donne  $\frac{1}{n} (a + a' + a'' + \dots)$  pour cette probabilité; pareillement les probabilités de deux, de trois, &c. évènements semblables, sont  $\frac{1}{n} (a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)$ ;  $\frac{1}{n} (a^3 + a'^3 + a''^3 + \dots)$ , &c. donc les probabilités qu'un premier évènement ayant déjà eu lieu, il fera

suivi d'un ou de deux, &c. évènements semblables, sont

$$\frac{a^2 + a'^2 + a''^2 + \&c.}{a + a' + a'' + \&c.}; \frac{a^3 + a'^3 + a''^3 + \&c.}{a + a' + a'' + \&c.}, \&c.$$

en égalant ces probabilités aux précédentes, on aura

$$ax + a'x' + a''x'' + \&c. = \frac{a^2 + a'^2 + a''^2 + \&c.}{a + a' + a'' + \&c.};$$

$$a^2x + a'^2x' + a''^2x'' + \&c. = \frac{a^3 + a'^3 + a''^3 + \&c.}{a + a' + a'' + \&c.};$$

on formera  $n - 1$  équations semblables, & en les combinant avec l'équation

$$x + x' + x'' + \&c. = 1,$$

qui résulte de la supposition que l'évènement ne peut être produit que par les  $n$  causes  $A, A', A'', \&c.$  on aura en tout  $n$  équations du premier degré, qui serviront à déterminer  $x, x', x'', \&c.$  or il est visible que l'on y satisfera en faisant

$$x = \frac{a}{a + a' + a'' + \&c.};$$

$$x' = \frac{a'}{a + a' + a'' + \&c.};$$

&c.

d'où il suit que pour avoir la probabilité de l'existence d'une cause quelconque  $A^{(n)}$  résultante d'un évènement donné, il faut déterminer la probabilité  $a^{(n)}$  que cette cause ayant lieu, produira cet évènement, & diviser cette probabilité par la somme des probabilités semblables  $a, a', a'', \&c.$  relatives à toutes les causes qui peuvent le produire.

#### X V I.

Pour appliquer cette théorie & pour faire sentir par un exemple fort simple, l'influence des évènements passés sur la probabilité de ceux qui suivent, considérons deux Joueurs  $A$  &  $B$  dont les adresses soient inconnues; il est infiniment peu

raisonnable qu'elles seront parfaitement égales. Soit donc  $\frac{1+a}{2}$  la plus grande, &  $\frac{1-a}{2}$  la plus petite; si l'on cherche la probabilité  $P$  que  $A$  gagnera les deux premières parties, on aura par l'article II,  $P = \frac{1+a^2}{4}$ , en sorte qu'il y a de l'avantage à parier 1 contre 3 que cela aura lieu; mais si l'on cherche la probabilité que  $B$  ayant déjà gagné la première partie,  $A$  gagnera les deux suivantes, il est visible que la valeur précédente de  $P$  est trop considérable, puisqu'il y a une raison de croire que l'adresse de  $B$  est la plus grande. En effet, si l'on considère chaque adresse comme une cause particulière de l'événement, la probabilité que l'adresse de  $B$  est  $\frac{1+a}{2}$  sera, par l'article précédent, égale à la probabilité que  $B$  ayant cette adresse gagnera la première partie, divisée par la somme des probabilités qu'il la gagnera en ayant successivement les adresses  $\frac{1+a}{2}$  &  $\frac{1-a}{2}$ ; d'où l'on tire  $\frac{1+a}{2}$  pour cette probabilité.

Pour déterminer dans ce cas la valeur de  $P$ , on observera que l'événement que nous avons nommé  $E$  dans l'article XIV, est ici le gain de la première partie par  $B$ , & que l'événement  $e$  est le gain des deux parties suivantes par  $A$ ; la probabilité  $V$  de l'événement  $E$  est donc  $\frac{1+a}{2}$  ou  $\frac{1-a}{2}$ , suivant que la plus grande ou la plus petite adresse appartient à  $B$ , ce qui donne en prenant la moitié de la somme de ces deux valeurs,  $V = \frac{1}{2}$ ; pareillement la probabilité de  $v$  de l'événement  $E + e$  est égale à  $\frac{1-a}{2} \cdot (\frac{1+a}{2})^2$ , ou à  $\frac{1+a}{2} \cdot (\frac{1-a}{2})^2$ ; partant  $v = \frac{1-a^2}{8}$ ; donc  $P = \frac{v}{V} = \frac{1-a^2}{4}$ ; il y a donc du désavantage à parier

264 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

1 contre 3 que *A* gagnera les deux parties suivantes, en sorte que l'inégalité des adresses qui dans le premier cas, favorise celui qui parie conformément au calcul ordinaire des probabilités, lui est défavorable dans celui-ci.

On trouvera de la même manière, que *B* ayant déjà gagné la première partie, la probabilité *P* que *A* gagnera les *n* suivantes, est

$$P = \frac{1-a^2}{2^{n+1}} \cdot \{(1+a)^{n-1} + (1-a)^{n-1}\}.$$

Si *a* est peu considérable, on a à très-peu-près,

$$P = \frac{1}{2^n} \cdot \{1 + a^2 \left[ \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2} - 1 \right]\};$$

or toutes les fois que *n* surpassera 3, cette quantité sera plus grande que la probabilité  $\frac{1}{2^n}$  que donne la supposition des adresses égales; d'où il résulte que dans ce cas, quoiqu'il soit probable que *A* est le Joueur le plus foible, cependant la probabilité qu'il gagnera les *n* parties suivantes, est plus grande que si l'on supposoit *A* & *B* de forces égales.

X V I I.

LORSQU'ON n'a aucune donnée *à priori* sur la possibilité d'un évènement, il faut supposer toutes les possibilités depuis zéro jusqu'à l'unité, également probables; ainsi l'observation pouvant seule nous instruire sur le rapport des naissances des garçons & des filles, on doit, à ne considérer la chose qu'en elle-même & abstraction faite des évènements, supposer la loi de possibilité des naissances d'un garçon ou d'une fille, constante depuis zéro jusqu'à l'unité, & partir de cette hypothèse dans les différens Problèmes que l'on peut se proposer sur cet objet.

Supposons par exemple, que l'on ait observé que sur *p* + *q* enfans, il est né *p* garçons & *q* filles; & que l'on cherche la probabilité *P* que sur *m* + *n* enfans qui doivent naître,

naître, il y aura  $m$  garçons &  $n$  filles; si l'on nomme  $x$  la probabilité qu'un enfant qui doit naître sera un garçon, &

$1 - x$  celle qu'il sera fille; en désignant  $\frac{1.2.3\dots(p+q)}{1.2.3\dots p.1.2.3\dots q}$

par  $\lambda$ , on aura  $\lambda x^p.(1-x)^q$  pour la probabilité que sur  $p+q$  enfans, il y aura  $p$  garçons &  $q$  filles; cet évènement est celui que nous avons nommé  $E$  dans l'article XIV.

Pareillement, si l'on désigne par  $\gamma$  le produit  $\frac{1.2.3\dots(m+n)}{1.2.3\dots m.1.2.3\dots n}$ ,

on aura  $\gamma \lambda x^{p+m}.(1-x)^{q+n}$  pour la probabilité que sur  $p+q$  enfans qui naîtront d'abord, il y aura  $p$  garçons &  $q$  filles, & que sur  $m+n$  enfans qui naîtront ensuite, il y aura  $m$  garçons &  $n$  filles; cet évènement est celui que nous avons nommé  $E+e$  dans l'article cité. Maintenant,  $x$  étant susceptible de toutes les valeurs depuis  $x=0$  jusqu'à  $x=1$ , & toutes ces valeurs étant *a priori* également probables; il faut, pour avoir la véritable probabilité de  $E$ , multiplier  $\lambda x^p.(1-x)^q$  par  $a dx$ ,  $a$  étant constant, & prendre l'intégrale  $\lambda \int a dx x^p.(1-x)^q$ , depuis  $x=0$  jusqu'à  $x=1$ ; la valeur de  $a$  se déterminera en observant que  $x$  devant nécessairement tomber entre 0 & 1, on a  $\int a dx = 1$ , l'intégrale étant prise depuis  $x=0$  jusqu'à  $x=1$ , ce qui donne  $a=1$ . On aura semblablement  $\lambda \gamma \int x^{p+m} dx (1-x)^{q+n}$  pour la probabilité entière de l'évènement  $E+e$ ; donc la probabilité cherchée  $P$ , que sur  $m+n$  enfans qui doivent naître, il y aura  $m$  garçons &  $n$  filles, sera par l'article XIV,

$$P = \frac{\gamma \int x^{p+m} dx (1-x)^{q+n}}{\int x^p dx (1-x)^q},$$

les intégrales du numérateur & du dénominateur étant prises depuis  $x=0$  jusqu'à  $x=1$ . Cette condition donne

$$\int x^p dx (1-x)^q = \frac{1.2.3\dots q}{(p+1).(p+2)\dots(p+q+1)},$$

$$\int x^{p+m} dx (1-x)^{q+n} = \frac{1.2.3\dots(q+n)}{(p+m+1).(p+m+2)\dots(p+q+m+n+1)}.$$

Mém. 1778.

LI



ce qui change l'expression de  $P$  dans celle-ci,

$$P = \gamma \cdot \frac{(q+1) \cdot (q+2) \dots (q+n) \cdot (p+1) \cdot (p+2) \dots (p+m)}{(p+q+2) \cdot (p+q+3) \dots (p+q+m+n+1)};$$

or on a, comme l'on fait,

$$\log. (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots u) = \frac{1}{2} \log. 2\pi + (u + \frac{1}{2}) \log. u \\ - \frac{1}{12u} - \frac{1}{360u^3} + \&c.$$

ce qui donne à très-peu-près, lorsque  $u$  est considérable,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots u = \sqrt{2\pi} \cdot u^{u+\frac{1}{2}} \cdot e^{-u},$$

$\pi$  étant le rapport de la demi-circonférence au rayon, &  $e$  le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; donc, si l'on suppose  $p$  &  $q$  de très-grands nombres, on aura

$$(q+1) \cdot (q+2) \dots (q+n) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (q+n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q} = \frac{(q+n)^{q+n+\frac{1}{2}}}{q^{q+\frac{1}{2}}} \cdot e^{-n};$$

$$(p+1) \cdot (p+2) \dots (p+m) = \frac{(p+m)^{p+m+\frac{1}{2}}}{p^{p+\frac{1}{2}}} \cdot e^{-m};$$

$$(p+q+1) \dots (p+q+m+n) = \frac{(p+q+m+n)^{p+q+m+n+\frac{1}{2}}}{(p+q)^{p+q+\frac{1}{2}}} \cdot e^{-m-n};$$

en substituant ces valeurs dans l'expression de  $P$ , & en observant que l'on a à très-peu-près,

$$\frac{p+q+1}{p+q+m+n+1} = \frac{p+q}{p+q+m+n},$$

elle deviendra

$$P = \gamma \cdot \frac{(q+n)^{q+n+\frac{1}{2}} \cdot (p+q)^{p+q+\frac{1}{2}} \cdot (p+m)^{p+m+\frac{1}{2}}}{p^{p+\frac{1}{2}} \cdot q^{q+\frac{1}{2}} \cdot (p+q+m+n)^{p+q+m+n+\frac{1}{2}}} \cdot (\pi). \quad (\pi)$$

Si  $\mu$  &  $s$  sont de très-petits nombres par rapport à  $p$  & à  $q$ , on a

$$\log. (p+\mu)^{p+s} = (p+s) \left\{ \log. p + \log. \left(1 + \frac{\mu}{p}\right) \right\} \\ = (p+s) \cdot \left\{ \frac{\mu}{p} + \log. p \right\} = \mu + (p+s) \log. p;$$

donc,

$$(p + \mu)^{p+s} = p^{p+s} \cdot e^{\mu};$$

partant, si  $m$  &  $n$  sont très-petits relativement à  $p$  &  $q$ , on a

$$(q + n)^{q+n+\frac{1}{2}} = e^n \cdot q^{q+n+\frac{1}{2}},$$

$$(p + m)^{p+m+\frac{1}{2}} = e^m \cdot p^{p+m+\frac{1}{2}},$$

$$(p + q + m + n)^{p+q+m+n+\frac{1}{2}} = e^{m+n} \cdot (p + q)^{p+q+\frac{1}{2}};$$

d'où l'on tire

$$P = \gamma \cdot \frac{p^m \cdot q^n}{(p + q)^{m+n}}.$$

### X V I I I.

CETTE valeur de  $P$  est la même que celle à laquelle on parviendrait, en supposant les possibilités des naissances des garçons & des filles dans le rapport de  $p$  à  $q$ ; d'où il est naturel de conclure que ces possibilités sont à très-peu-près dans le même rapport, & qu'ainsi, la vraie possibilité de la naissance d'un garçon est très-approchante de  $\frac{p}{p+q}$ : ce n'est pas qu'absolument parlant, elle ne puisse avoir une valeur bien différente; mais l'expression  $\frac{p}{p+q}$ , & celles qui en sont très-voisines, sont incomparablement plus probables que les autres, & l'on peut énoncer ainsi la conclusion précédente.

Si l'on désigne par  $\theta$  une quantité fort petite, & par  $P$  la probabilité que la possibilité de la naissance d'un garçon est comprise dans les limites  $\frac{p}{p+q} - \theta$  &  $\frac{p}{p+q} + \theta$ ; la valeur de  $P$  différera d'autant moins de la certitude ou de l'unité, que  $p$  &  $q$  seront de plus grands nombres, & l'on peut tellement faire croître  $p$  &  $q$ , que la différence de  $P$  à l'unité soit moindre qu'aucune grandeur donnée, quelque petit que  $\theta$  soit d'ailleurs.

On voit par-là comment les évènements, en se multipliant, nous indiquent d'une manière de plus en plus probable, leur possibilité respective; mais comme le théorème précédent n'est vrai que dans l'infini, & que la valeur de  $P$  diffère toujours un peu de l'unité lorsque  $p$  &  $q$  sont des nombres finis, il est intéressant de connoître cette différence, & pour cela, nous allons donner l'expression de  $P$  par une suite très-convergente que nous verrons se réduire à l'unité, lorsque  $p$  &  $q$  sont infinis, & qui nous fournira de cette manière, une démonstration directe & rigoureuse du théorème dont il s'agit.

Soit  $x$  la possibilité de la naissance d'un garçon, &  $1 - x$  celle de la naissance d'une fille; la probabilité que sur  $p + q$  enfans, il y aura  $p$  garçons &  $q$  filles, sera, comme on l'a vu dans l'article précédent, égale à  $\lambda \cdot x^p \cdot (1 - x)^q$ ; or si l'on regarde  $x$  comme une cause particulière de cet évènement,

$\frac{x^p \partial x (1 - x)^q}{\int x^p \partial x (1 - x)^q}$  sera par l'article XV la probabilité de cette

cause, pourvu que l'intégrale du dénominateur soit prise depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = 1$ ; donc la probabilité  $P$ , que

$x$  sera contenu dans des limites données, sera  $\frac{\int x^p \partial x (1 - x)^q}{\int x^p \partial x (1 - x)^q}$ ,

pourvu que l'intégrale du numérateur ne soit prise que dans l'étendue de ces limites; la question est ainsi réduite à déterminer dans ce dernier cas la valeur de  $\int x^p \partial x (1 - x)^q$ , lorsque  $p$  &  $q$  sont de très-grands nombres.

Soit  $y = x^p (1 - x)^q$ , on aura

$$y \partial x = \frac{x (1 - x)}{p - (p + q)x} \cdot \partial y,$$

& si l'on fait  $p = \frac{1}{a}$ ;  $q = \frac{\mu}{a}$ ,  $a$  étant une fraction extrêmement petite puisque  $p$  &  $q$  sont très-considérables, on aura

$$y \partial x = a z \cdot \partial y;$$

$z$  étant égal à  $\frac{x \cdot (1-x)}{1-(1+\mu)x}$ ; de-là on tirera, quel que soit  $z$ ,

$$fy \partial x = C + ayz \cdot \left\{ 1 - a \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + a^2 \cdot \frac{\partial(z \partial z)}{\partial x^2} - a^3 \cdot \frac{\partial[z \partial(z \partial z)]}{\partial x^3} + \&c. \right\}; (\lambda)$$

$C$  étant une constante arbitraire qui dépend de la valeur de  $fy \partial x$ , à l'origine de l'intégrale. Cette suite qui est d'un grand usage dans ces recherches, se démontre facilement en observant

1.<sup>o</sup> que  $fy \partial x = fa z \partial y = ayz - a fy \partial z$ ;

2.<sup>o</sup> que l'équation  $y \partial x = az \cdot \partial y$ , donne  $y = az \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$ , & qu'ainsi

$$fy \partial z = af \cdot \frac{z \partial z}{\partial x} \cdot \partial y = ay \cdot \frac{z \partial z}{\partial x} - a fy \cdot \frac{\partial(z \partial z)}{\partial x};$$

3.<sup>o</sup> que  $fy \cdot \frac{\partial(z \partial z)}{\partial x} = af \partial y \cdot z \cdot \frac{\partial(z \partial z)}{\partial x} = ay \cdot z \cdot \frac{\partial(z \partial z)}{\partial x^2} - a fy \cdot \frac{\partial[z \partial(z \partial z)]}{\partial x^2}$ , & ainsi de suite.

La série précédente cesse d'être convergente, lorsque le dénominateur de  $z$  est très-petit de l'ordre  $a$ ; & c'est ce qui a lieu, lorsque  $x$  ne diffère de  $\frac{1}{1+\mu}$ , que d'une quantité de cet ordre; il faut donc n'employer cette série, que dans le cas où cette différence est très-grande par rapport à  $a$ ; mais cela ne suffit pas encore: chaque différentiation augmentant d'une unité les puissances des dénominateurs de  $z$  & de ses différentielles, il est visible que le terme de la série multiplié par  $a^i$ , a pour dénominateur celui de  $z$ , élevé à la puissance  $2i - 1$ ; donc pour la convergence de cette suite, il est nécessaire que  $a$  soit beaucoup moindre, non-seulement que le dénominateur de  $z$ , mais encore que le carré de ce dénominateur.

270 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Il suit de-là que la suite  $(\lambda)$  donnera par une approximation rapide, l'intégrale  $\int y \partial x$  prise depuis  $x = 0$ , jusqu'à  $x = \frac{1}{1+\mu} - \theta$ , pourvu que  $a$  soit beaucoup plus petit que  $\theta^2$ ; & si l'on observe que l'on a  $y = 0$ , &  $z = 0$  lorsque  $x = 0$ , on trouvera pour la valeur de  $\int y \partial x$  dans ce cas,

$$\int y \partial x = \frac{a\mu^{p+1} \cdot [1 - (1+\mu)\theta]^{p+1} \cdot (1 + \frac{1+\mu}{\mu} \cdot \theta)^{q+1}}{(1+\mu)^{p+q+3} \cdot \theta} \left\{ 1 - \frac{a[\mu + (1+\mu)^2 \cdot \theta^2]}{(1+\mu)^3 \cdot \theta^2} + \&c. \right\}$$

Cette suite a l'avantage de donner les limites entre lesquelles la valeur de  $\int y \partial x$  est resserrée; en effet, cette valeur est moindre que le premier terme & plus grande que la somme des deux premiers termes; pour le démontrer, nous donnerons à  $z$  cette forme,

$$z = -\frac{\mu}{(1+\mu)^2} + \frac{x}{1+\mu} + \frac{\mu}{(1+\mu)^2 \cdot [1 - (1+\mu) \cdot x]},$$

& nous aurons

$$\partial z = \frac{\partial x}{1+\mu} + \frac{\mu \partial x}{(1+\mu) \cdot [1 - (1+\mu) \cdot x]^2};$$

on voit ainsi que  $z$  &  $\partial z$  augmentent à mesure que  $x$  augmente depuis  $x = 0$ , jusqu'à  $x = \frac{1}{1+\mu}$ ; les quantités  $z$ ,  $\frac{\partial z}{\partial x}$  &  $\frac{\partial \cdot (z \partial z)}{\partial x^2}$  sont donc toujours positives dans cet intervalle, ainsi que les intégrales  $\int y \partial z$  &  $\int y \cdot \frac{\partial \cdot (z \partial z)}{\partial x}$ ; or

on a par ce qui précède,  $\int y \partial x = a y z - a \int y \partial z$ ; partant  $\int y \partial x$  est moindre que  $a y z$ ; pareillement  $\int y \partial z = a y z \frac{\partial z}{\partial x} - a \int y \cdot \frac{\partial \cdot (z \partial z)}{\partial x}$ ; & par conséquent

$\int y \partial z$  est moindre que  $a y \cdot z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$ ; donc  $\int y \partial x$  est moindre que  $a y z$ , & plus grand que  $a y z \cdot (1 - a \cdot \frac{\partial z}{\partial x})$ . Cette

remarque peut servir, lorsque sans chercher la valeur exacte de  $\int y \partial x$ , on veut s'assurer si elle est plus grande ou plus petite qu'une quantité donnée.

La suite  $(\lambda)$  donnera encore l'intégrale  $\int y \partial x$ , depuis  $x = \frac{1}{1+\mu} + \theta$ , jusqu'à  $x = 1$ , & si l'on considère

que  $x$  étant 1, on a  $y = 0$ , &  $z = 0$ ; on verra facilement que la valeur de  $\int y \partial x$  dans ce dernier cas, est la valeur même de  $\int y \partial x$  dans le premier cas, prise en moins, & dans laquelle on change  $\theta$  en  $-\theta$ ; donc si l'on nomme  $k$  l'intégrale entière  $\int y \partial x$ , prise depuis  $x = 0$ , jusqu'à  $x = 1$ ; on aura aux quantités près de l'ordre  $\alpha^3$ , pour cette

même intégrale prise depuis  $x = \frac{1}{1+\mu} - \theta$ , jusqu'à

$x = \frac{1}{1+\mu} + \theta$ , ou ce qui revient au même, depuis

$x = \frac{p}{p+q} - \theta$ , jusqu'à  $x = \frac{p}{p+q} + \theta$ ,

$$k = \frac{\alpha \mu^{q+1} \cdot \left\{ 1 - \frac{\alpha [\mu + (1+\mu)^2 \theta^2]}{(1+\mu)^3 \cdot \theta^2} \right\}}{(1+\mu)^{p+q+3} \cdot \theta} \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & [1 - (1+\mu) \cdot \theta]^{p+1} \cdot \left( 1 + \frac{1+\mu}{\mu} \theta \right)^{q+1} \\ & + [1 + (1+\mu) \cdot \theta]^{p+1} \cdot \left( 1 - \frac{1+\mu}{\mu} \theta \right)^{q+1} \end{aligned} \right\}$$

ce qui donne

$$P = 1 - \frac{\alpha \mu^{q+1} \cdot \left\{ 1 - \frac{\alpha [\mu + (1+\mu)^2 \theta^2]}{(1+\mu)^3 \cdot \theta^2} \right\}}{(1+\mu)^{p+q+3} \cdot \theta k} \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & [1 - (1+\mu) \theta]^{p+1} \cdot \left( 1 + \frac{1+\mu}{\mu} \theta \right)^{q+1} \\ & + [1 + (1+\mu) \theta]^{p+1} \cdot \left( 1 - \frac{1+\mu}{\mu} \theta \right)^{q+1} \end{aligned} \right\}$$

Il ne s'agit plus maintenant que d'avoir la valeur de  $k$ ; or on a, par l'article précédent,

$$k = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+q+1)},$$

& quel que soit  $u$ ,

$$1.2.3\dots n = \sqrt{2\pi} \cdot u^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-u} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{12u} + \&c. \right\}$$

d'où il est aisé de conclure, en faisant  $p = \frac{1}{a}$ , &  $q = \frac{\mu}{a}$ ,

$$k = \frac{\sqrt{2\pi a} \cdot \mu^{q+\frac{1}{2}}}{(1+\mu)^{p+q+\frac{1}{2}}} \cdot \left\{ 1 + a \cdot \frac{[(1+\mu)^2 - 12\mu]}{12\mu \cdot (1+\mu)^3} + \&c. \right\}$$

on aura donc, en négligeant les quantités de l'ordre  $a^{\frac{1}{2}}$ ,

$$P = 1 - \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot \mu^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi} \cdot (1+\mu)^{\frac{1}{2}} \cdot \theta} \cdot \left\{ 1 - a \cdot \frac{[12\mu^2 + (1+\mu)^2 \cdot (1+\mu+\mu^2)\theta^2]}{12\mu \cdot (1+\mu)^3 \cdot \theta^2} \right\} \\ \cdot \left\{ \begin{aligned} &[1 - (1+\mu)\theta]^{p+q} \cdot \left(1 + \frac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^{q+1} \\ &+ [1 + (1+\mu)\theta]^{p+q} \cdot \left(1 - \frac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^{q+1} \end{aligned} \right\}$$

sur quoi l'on doit observer que la quantité

$$[1 - (1+\mu)\theta]^p \cdot \left(1 + \frac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^q$$

est à son *maximum*, lorsque  $\theta = 0$ ; d'où il suit que la plus grande valeur du facteur

$$[1 - (1+\mu)\theta]^{p+q} \cdot \left(1 + \frac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^{q+1} \\ + [1 + (1+\mu)\theta]^{p+q} \cdot \left(1 - \frac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^{q+1},$$

est très-près de deux, & qu'il est beaucoup moindre, pour peu que  $\theta$  soit plus grand que zéro.

Dans la question présente, ce facteur est toujours extrêmement petit; pour le faire voir, nous mettrons la quantité

$$[1 - (1+\mu)\theta]^{p+q} \cdot \left(1 + \frac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^{q+1} \text{ sous cette forme,}$$

$$\left[1 + \frac{1-\mu^2}{\mu} \cdot \theta - \frac{(1+\mu)^2}{\mu} \cdot \theta^2\right] \cdot [1 - (1+\mu)\theta]^p \cdot \left(1 + \frac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^q,$$

& nous observerons que  $\theta$  étant fort petit, on a par des suites convergentes,

Log.

$$\log. [1 - (1 + \mu)\theta] = -(1 + \mu) \cdot \theta - \frac{1}{2} \cdot (1 + \mu)^2 \cdot \theta^2 - \frac{1}{3} \cdot (1 + \mu)^3 \cdot \theta^3 - \&c.$$

$$\log. (1 + \frac{1 + \mu}{\mu} \cdot \theta) = \frac{1 + \mu}{\mu} \cdot \theta - \frac{1}{2} \cdot (\frac{1 + \mu}{\mu})^2 \cdot \theta^2 + \frac{1}{3} \cdot (\frac{1 + \mu}{\mu})^3 \cdot \theta^3 - \&c.$$

d'où en substituant au lieu de  $p$ ,  $\frac{1}{a}$ , & au lieu de  $q$ ,  $\frac{\mu}{a}$ ,  
on tire

$$\log. \left\{ \left[ 1 - \frac{(1 + \mu)}{\mu} \cdot \theta \right]^p \cdot \left( 1 + \frac{1 + \mu}{\mu} \cdot \theta \right)^q \right\} = - \frac{(1 + \mu)^3}{2\mu} \cdot \frac{\theta^3}{a} \\ - \frac{(\mu - 1) \cdot (1 + \mu)^4}{3\mu^2} \cdot \frac{\theta^3}{a} - \&c.$$

Partant,

$$[1 - (1 + \mu)\theta]^p \cdot (1 + \frac{1 + \mu}{\mu} \cdot \theta)^q = e^{-\frac{(1 + \mu)^3}{2\mu} \cdot \frac{\theta^3}{a} - \frac{(\mu - 1) \cdot (1 + \mu)^4}{3\mu^2} \cdot \frac{\theta^3}{a} - \&c.}$$

$\theta^3$  étant, comme nous l'avons supposé, beaucoup plus grand que  $a$ , &  $e$  logarithme hyperbolique de l'unité, étant plus grand que 2, il est clair que le second membre de cette équation est très-petit, & décroît très-rapidement lorsque  $a$  diminue; d'où il suit que la quantité

$$\cdot [1 - (1 + \mu)\theta]^{p+1} \cdot (1 + \frac{1 + \mu}{\mu} \theta)^{q+1},$$

est elle-même très-petite, ce qui est également vrai de la quantité

$$[1 + (1 + \mu)\theta]^{p+1} \cdot (1 - \frac{1 + \mu}{\mu} \theta)^{q+1},$$

dans laquelle se change la précédente en faisant  $\theta$  négatif.

On voit ainsi que  $\theta$  restant le même, quelque petit qu'il soit d'ailleurs, la différence de  $P$  à l'unité, devient d'autant moindre que  $a$  diminue, non-seulement parce que le facteur  $a^{\pm}$  qui multiplie cette différence diminue, mais encore parce que le facteur

$$[1 - (1 + \mu)\theta]^{p+1} \cdot (1 + \frac{1 + \mu}{\mu} \theta)^{q+1} \\ + [1 + (1 + \mu)\theta]^{p+1} \cdot (1 - \frac{1 + \mu}{\mu} \theta)^{q+1},$$

Mém. 1778.

Mm



est très-petit, & diminue avec une grande rapidité; & il est visible que l'on peut tellement augmenter  $p$  &  $q$ , & par conséquent diminuer  $a$ , que cette différence de  $P$  à l'unité soit moindre qu'aucune grandeur donnée; ce qui est le théorème dont nous avons parlé au commencement de cet article.

## X I X.

UN des principaux avantages de la théorie précédente, est de fournir une solution directe & générale d'un Problème intéressant dont l'objet est le plus ou moins de facilité des naissances des garçons & des filles dans les différens climats. On a observé qu'à Paris & à Londres, il naît constamment chaque année plus de garçons que de filles, & quoique la différence soit peu considérable, il seroit assez extraordinaire que cela fût l'effet du hasard, & il est bien plus naturel de penser qu'en France & en Angleterre, la Nature favorise plus la naissance des garçons que celle des filles. A la vérité, les naissances observées pendant quatre ou cinq ans dans quelques petites villes de France, semblent y indiquer une moindre facilité pour la naissance des garçons que pour celle des filles; mais il est très-possible que sur un petit nombre de naissances, tel que quatre ou cinq cents, il y ait plus de filles que de garçons, quoique la facilité de la naissance de ceux-ci soit plus grande; il faut employer à cette recherche délicate, de beaucoup plus grands nombres, vu sur-tout le peu de différence qui existe entre les facilités des naissances des garçons & des filles; & ce n'est que lorsqu'on sera bien assuré que le nombre observé des naissances dans un lieu quelconque, indique avec une très-grande probabilité, que les naissances des garçons y sont moins possibles que celles des filles, qu'il sera permis de rechercher la cause de ce phénomène: la méthode de l'article précédent, donne un moyen fort simple pour obtenir cette probabilité, lorsqu'on a un nombre suffisant de naissances; nous allons l'appliquer à celles qui ont été observées

à Paris, & déterminer combien il est probable que les naissances des garçons dans cette grande ville, sont plus possibles que celles des filles.

Pour cela, nous ferons usage des naissances qui ont eu lieu depuis 1745 jusqu'en 1770, & dont on peut voir la liste dans nos Mémoires pour l'année 1771, page 857. En rassemblant toutes ces naissances, on trouve que dans l'espace de ces vingt-six années, il est né à Paris 251527 garçons, & 241945 filles, ce qui donne à très-peu près  $\frac{105}{101}$  pour le rapport des naissances des garçons à celles des filles : cela posé, la probabilité que la possibilité de la naissance d'un garçon est égale ou moindre que  $\frac{1}{2}$ , est par l'article précédent, égale à  $\frac{\int y^{\frac{1}{2}} dx}{k}$ , l'intégrale  $\int y^{\frac{1}{2}} dx$  étant prise depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = \frac{1}{2}$ ; d'ailleurs cette intégrale prise depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = \frac{1}{1+\mu} = \theta$ , & divisée par  $k$ , est par le même article, égale à

$$\frac{\alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \mu^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi} \cdot (1+\mu)^{\frac{1}{2}} \cdot \theta} \cdot [1 - (1+\mu)\theta]^{p+1} \cdot [1 + (\frac{1+\mu}{\mu}) \cdot \theta]^{q+1} \\ \times \left\{ 1 - \alpha \cdot \frac{[12\mu^2 + (1+\mu)^2 \cdot (1+\mu+\mu^2) \cdot \theta^2]}{12\mu \cdot (1+\mu)^3 \cdot \theta^2} \right. \\ \left. + \alpha^2 \cdot \&c. \right\}$$

en supposant donc  $\frac{1}{1+\mu} = \theta = \frac{1}{2}$ , & par conséquent  $\theta = \frac{1-\mu}{2(1+\mu)}$ , on a pour l'expression de la probabilité que  $x$  est égal ou moindre que  $\frac{1}{2}$ ,

$$\frac{\sqrt{\frac{2\alpha\mu}{(1+\mu) \cdot \pi}}}{1-\mu} \cdot (\frac{1+\mu}{2})^{p+1} \cdot (\frac{1+\mu}{2\mu})^{q+1} \\ \times \left\{ 1 - \alpha \cdot \frac{[48 \cdot \mu^2 + 3\mu \cdot (1-\mu)^2 + (1-\mu)^4]}{12\mu \cdot (1+\mu) \cdot (1-\mu)^2} \right. \\ \left. + \alpha^2 \cdot \&c. \right\}$$

276 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Dans le cas présent,

$$p = 251527,$$

$$q = 241945,$$

$$\mu = \frac{q}{p} = 0,9619047,$$

$$a = \frac{1}{p} = \frac{1}{251527}.$$

ce qui donne à peu-près  $\theta^2 = 24$ , en sorte que la série

$$1 - a \cdot \frac{[48 \cdot \mu^2 + 3\mu \cdot (1-\mu)^2 + (1-\mu)^4]}{12\mu^2 \cdot (1+\mu) \cdot (1-\mu)^2} + a^2 \cdot \&c.$$

est très-convergente, & l'on trouve par le calcul, que le second terme est environ  $\frac{1}{200}$ ; on peut ainsi s'en tenir au premier terme: or on a en logarithmes des Tables,

$$\log. \sqrt{\frac{2a\mu}{(1+\mu) \cdot \pi}} = \overline{2,4660039}.$$

le nombre  $\overline{2}$  indiquant une caractéristique négative; on a ensuite, en portant la précision jusqu'à douze décimales,

$$\log. p = 5,400584610947,$$

$$\log. q = 5,383716651469,$$

$$\log. (p + q) = 5,693262515480,$$

$$\log. 2 = 0,301029995664;$$

d'où l'on tire

$$\log. \left(\frac{p+q}{p}\right)^{p+1} = 73616,6879714,$$

$$\log. \left(\frac{p+q}{q}\right)^{p+1} = 74893,3836139,$$

$$\text{logarithme } 2^{p+1+1} = 148550,4760803.$$

Partant,

$$\log. \left(\frac{1+\mu}{2}\right)^{p+1} \cdot \left(\frac{1+\mu}{2\mu}\right)^{q+1} \cdot \frac{\sqrt{\frac{2a\mu}{(1+\mu) \cdot \pi}}}{1-\mu} = \overline{42,0615089}$$

En repassant des logarithmes aux nombres, on aura pour la probabilité que  $x$  est égal ou moindre que  $\frac{1}{2}$ , une fraction dont le numérateur est peu différent de l'unité & égal à 1,1521, & dont le dénominateur est la septième puissance d'un million; cette fraction est même un peu trop grande, & comme elle est d'une petitesse excessive, on peut regarder comme aussi certain qu'aucune autre vérité morale, que la différence observée à Paris entre les naissances des garçons & celles des filles, est dûe à une plus grande possibilité dans la naissance des garçons. On voit au reste que la petitesse de la fraction précédente vient principalement du facteur

$$\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^{p+1} \cdot \left(\frac{1+\mu}{2\mu}\right)^{q+1},$$

ce qui confirme ce que nous avons dit dans l'article précédent sur la convergence de la valeur de  $P$  vers l'unité.

On a observé que dans l'intervalle des quatre-vingt-quinze années écoulées depuis 1664 jusqu'en 1757, il est né à Londres 737629 garçons & 698958 filles, ce qui donne environ  $\frac{19}{18}$  pour le rapport des naissances des garçons à celles des filles; ce rapport étant plus grand que celui de 105 à 101 qui a lieu à Paris, & le nombre des naissances observées à Londres étant plus considérable, on trouveroit pour cette ville une plus grande probabilité que les naissances des garçons sont plus possibles que celles des filles; mais lorsque les probabilités diffèrent aussi peu de l'unité, elles peuvent être censées égales & se confondre avec la certitude.

## X X.

LA constance avec laquelle les naissances des garçons à Paris, l'ont emporté chaque année sur celles des filles depuis 1745 jusqu'en 1770, est encore un de ces phénomènes que l'on ne peut attribuer au hasard. Déterminons la probabilité en partant des données précédentes; pour cela, soit  $2a$  le nombre moyen des naissances des garçons & des filles dans l'espace d'une année; supposons de plus que sur

ce nombre, il y ait  $m$  garçons, & par conséquent  $2a - m$  filles; la formule (θ) de l'article XVII donnera pour la probabilité  $P$  de cet évènement,

$$P = \frac{1.2.3 \dots 2a}{1.2.3 \dots (p+q+2a+1)} \cdot \frac{1.2.3 \dots (p+q+1)}{1.2.3 \dots p.1.2.3 \dots q} \\ \times \frac{1.2.3 \dots (q+2a-m)}{1.2.3 \dots (2a-m)} \cdot \frac{1.2.3 \dots (p+m)}{1.2.3 \dots m},$$

on aura donc la probabilité que les naissances des garçons ne l'emporteront point sur celles des filles, en prenant la somme de toutes les valeurs de  $P$ , depuis  $m = 0$  jusqu'à  $m = a$ . Soit

$$\frac{1.2.3 \dots (q+2a-m).1.2.3 \dots (p+m)}{1.2.3 \dots (2a-m).1.2.3 \dots m} = y_m,$$

& cherchons l'intégrale finie  $\Sigma y_m$ , depuis  $m = 0$  jusqu'à  $m = a$ , la caractéristique  $\Sigma$  servant à désigner les intégrales finies; on a visiblement

$$y_m = \frac{(m+1).(q+2a-m)}{(2a-m).(p+m+1)} \cdot y_{m+1};$$

donc

$$y_m \cdot \left\{ 1 - \frac{(m+1).(q+2a-m)}{(2a-m).(p+m+1)} \right\} = \frac{(m+1).(q+2a-m)}{(2a-m).(p+m+1)} \cdot \Delta y_{m+1};$$

ou

$$y_m = \frac{(m+1).(q+2a-m)}{2ap - p - m(p+q)} \cdot \Delta y_m,$$

la caractéristique  $\Delta$  étant celle des différences finies. Supposons généralement

$$y_m = z_m \cdot \Delta y_m,$$

nous aurons en intégrant,

$$\Sigma y_m = y_m \cdot z_{m-1} - \Sigma (y_m \cdot \Delta z_{m-1});$$

or si l'on substitue pour  $y_m$ , la valeur  $z_m \cdot \Delta y_m$ , on a

$$\Sigma (y_m \cdot \Delta z_{m-1}) = \Sigma (z_m \cdot \Delta z_{m-1} \cdot \Delta y_m) \\ = y_m \cdot z_{m-1} \cdot \Delta z_{m-1} - \Sigma [y_m \cdot \Delta (z_{m-1} \cdot \Delta z_{m-1})];$$

pareillement,

$$\begin{aligned} & \Sigma . [y_m . \Delta (z_{m-1} . \Delta . z_{m-2})] \\ & = y_m . z_{m-1} . \Delta . (z_{m-2} . \Delta . z_{m-3}) - \Sigma \{y_m . \Delta . [z_{m-1} . \Delta . (z_{m-2} . \Delta . z_{m-3})]\}, \end{aligned}$$

& ainsi de suite; on aura donc

$$\begin{aligned} \Sigma . y_m = C + y_m . z_{m-1} . \{1 - \Delta . z_{m-2} + \Delta . (z_{m-2} . \Delta . z_{m-3}) \\ - \Delta . [z_{m-1} . \Delta . (z_{m-2} . \Delta . z_{m-3})] + \&c.\}; (\gamma) \end{aligned}$$

$C$  étant une constante arbitraire. Cette suite est dans les différences finies, ce qui est la suite  $(\lambda)$  de l'article XVIII, dans les différences infiniment petites: pour déterminer dans quel cas elle est convergente, nous observerons que si la dimension de  $z_{m-1}$ , en  $p$ ,  $q$ ,  $a$  &  $m$ , est  $r$ , celle de  $\Delta . z_{m-1}$  sera  $r - 1$ ; celle de  $\Delta . (z_{m-1} . \Delta . z_{m-2})$  sera  $2r - 2$ , & ainsi du reste: or la convergence de la série exige que ces dimensions aillent en diminuant, ce qui suppose que  $r$  est moindre que l'unité. Dans la question présente où

$$z_{m-1} = \frac{m . (q + 2a + 1 - m)}{2ap + q - m(p + q)},$$

les dimensions du numérateur & du dénominateur sont égales à 2, & par conséquent  $r = 0$ ; la suite sera donc convergente, pourvu que le dénominateur ne soit pas extrêmement petit, c'est-à-dire que  $\frac{m-1}{2a-m}$  diffère sensiblement de  $\frac{p}{q}$ ; or c'est ce qui a lieu, lorsque  $m$  est égal ou moindre que  $a$ ,  $p$  étant supposé plus grand que  $q$ .

On peut mettre la quantité  $\frac{m . (q + 2a + 1 - m)}{2ap + q - m(p + q)}$  sous cette forme  $E + Fm + \frac{G}{2ap + q - m(p + q)}$ , en faisant

$$E = \frac{-q . (p + q) + 2aq - p}{(p + q)^2},$$

$$F = \frac{1}{p + q},$$

$$G = \frac{(2ap + q) . [q . (p + q) + 2aq + p]}{(p + q)^2},$$

on aura ainsi

$$\Delta \cdot z_{m-1} = F + \frac{G \cdot (p+q)}{[1 \cdot ap + q - m(p+q)] \cdot [1 \cdot ap + p + 2q - m(p+q)]};$$

or  $F$  &  $G$  étant positifs, il est clair que  $\Delta \cdot z_{m-1}$  est toujours positif tant que  $\frac{m-1}{1 \cdot a - m}$  est moindre que  $\frac{p}{q}$ ; on voit de plus que dans ce cas,  $z_{m-1} \cdot \Delta \cdot z_{m-1}$ , va toujours en augmentant, en sorte que  $\Delta \cdot (z_{m-1} \cdot \Delta \cdot z_{m-1})$  est encore une quantité positive; donc  $\Sigma \cdot y_m$  étant égal à  $y_m \cdot z_{m-1} - \Sigma \cdot (y_m \cdot \Delta \cdot z_{m-1})$ , est moindre que  $H + y_m \cdot z_{m-1}$ ,  $H$  étant une arbitraire; pareillement  $\Sigma \cdot (y_m \cdot \Delta \cdot z_{m-1})$  étant égal à  $y_m \cdot z_{m-1} \cdot \Delta \cdot (z_{m-1}) - \Sigma \cdot [y_m \cdot \Delta \cdot (z_{m-1} \cdot \Delta \cdot z_{m-1})]$ , est moindre que  $H' + y_m \cdot z_{m-1} \cdot \Delta \cdot z_{m-1}$ ,  $H'$  étant une nouvelle arbitraire; donc l'intégrale  $\Sigma \cdot y_m$  est moindre que  $C + y_m \cdot z_{m-1}$ , & plus grande que

$$C + y_m \cdot z_{m-1} \cdot (1 - \Delta \cdot z_{m-1}).$$

Si l'on détermine au moyen de la formule ( $\gamma$ ), l'intégrale  $\Sigma \cdot y_m$  depuis  $m = 0$  jusqu'à  $m = a$ , la constante  $C$  sera nulle; si l'on suppose ensuite qu'il naît 20000 enfans chaque année, ce qui donne  $a = 10000$ , on trouvera en employant pour  $p$  &  $q$ , les valeurs de l'article précédent relatives à Paris,

$$z_{a-1} = 26,22,$$

$$z_{a-2} = 26,09.$$

Partant,  $\Delta \cdot z_{a-1} = 0,13;$

on aura ainsi  $\Sigma \cdot y_m < 26,22 \cdot y_a,$

&  $\Sigma \cdot y_m > 26,22 \cdot y_a \cdot (1 - 0,13);$

en faisant donc  $\Sigma \cdot y_m = 26,22 \cdot y_a,$

cette valeur de  $\Sigma \cdot y_m$  ne surpassera que de  $\frac{1}{10}$  environ la véritable valeur; il suit de-là que si l'on nomme  $P$  la probabilité

probabilité que sur vingt mille enfans, il y aura autant de garçons que de filles, la probabilité que le nombre des garçons ne l'emportera pas sur celui des filles, sera un peu plus petite que  $26,22 \cdot P$ .

On déterminera la valeur de  $P$  par la formule ( $\omega$ ) de l'article XVII; pour cela, on y supposera  $m = n = a$ , & on la mettra sous cette forme,

$$P = \frac{\gamma \cdot p^a \cdot q^a \cdot (p+q)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{[(p+a) \cdot (q+a)]}}{(p+q)^{2a}} \cdot \sqrt{(p \cdot q) \cdot (p+q+2a)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left[1 + \frac{a \cdot (p-q)}{q(p+q+2a)}\right]^{q+a} \cdot \left[1 - \frac{a(p-q)}{p(p+q+2a)}\right]^{p+a}.$$

On observera ensuite que

$$\gamma = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot a}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot a)^a};$$

d'où l'on tire, par l'article XVII,

$$\gamma = \frac{2^{2a}}{\sqrt{(a\pi)}};$$

on a d'ailleurs,

$$\log. \left[1 + \frac{a \cdot (p-q)}{q \cdot (p+q+2a)}\right]^{q+a} = (q+a) \cdot \left[\frac{a \cdot (p-q)}{q \cdot (p+q+2a)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 \cdot (p-q)^2}{q^2 \cdot (p+q+2a)^2} + \&c.\right]$$

$$\log. \left[1 - \frac{a \cdot (p-q)}{p \cdot (p+q+2a)}\right]^{p+a} = (p+a) \cdot \left[\frac{-a \cdot (p-q)}{p \cdot (p+q+2a)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 \cdot (p-q)^2}{p^2 \cdot (p+q+2a)^2} - \&c.\right].$$

$a$  étant peu considérable par rapport à  $p$ , &  $p$  différant peu de  $q$ , ces suites sont très-convergentes, & l'on peut s'en tenir aux deux premiers termes; en ajoutant donc ces logarithmes, on aura

$$\begin{aligned} & \log. \left[1 + \frac{a \cdot (p-q)}{q \cdot (p+q+2a)}\right]^{q+a} \cdot \left[1 - \frac{a \cdot (p-q)}{p \cdot (p+q+2a)}\right]^{p+a} \\ &= a^2(p-q)^2 \cdot \left[\frac{1}{pq \cdot (p+q+2a)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2q + q^2p + a(p^2+q^2)}{p^2q^2 \cdot (p+q+2a)^2}\right]. \end{aligned}$$

On peut supposer à très-peu près  $a(p^2 + q^2) = 2apq$ , ce qui réduit le second membre de l'équation précédente à

$$\frac{a^2(p-q)^2}{2pq \cdot (p+q+2a)}; \text{ ce logarithme est hyperbolique, \&}$$



282 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

pour le convertir en logarithme des Tables, il faut, comme l'on fait, le multiplier par 0,43429448. En appliquant des nombres à ces formules, on trouvera que le logarithme tabulaire de  $[1 + \frac{a \cdot (p - q)}{p \cdot (p + q + 2a)}]^{q+a} \cdot [1 - \frac{a \cdot (p - q)}{p \cdot (p + q + 2a)}]^{p+a}$  est 0,0638041; on a ensuite, en portant la précision jusqu'à dix décimales,

$$\log. 2 = 0,3010299957,$$

$$\log. p = 5,4005846109,$$

$$\log. q = 5,3837166515,$$

$$\log. (p + q) = 5,6932625156;$$

ce qui donne

$$\log. \frac{p^a \cdot q^a}{(\frac{p+q}{2})^{2a}} = \overline{2},3622260;$$

de plus,

$$\log. \sqrt{a\pi} = 2,2485750,$$

$$\log. \frac{(p+q)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{[(p+a) \cdot (q+a)]}}{\sqrt{pq} \cdot (p+q+2a)^{\frac{1}{2}}} = \overline{1},9913791;$$

on aura donc

$$\log. P = \overline{4},1688342;$$

d'où l'on tire

$$26,22 \cdot P = 0,0038678 = \frac{1}{259}.$$

La probabilité que dans une année les naissances des garçons ne seront pas en plus grand nombre à Paris que celles des filles, est donc moindre que  $\frac{1}{259}$ ; or en la supposant égale à cette fraction, on aura à très-peu près le nombre d'années dans lesquelles on peut parier un contre un que cela n'arrivera pas, en multipliant son dénominateur 259 par le logarithme hyperbolique de 2, c'est-à-dire, par 0,6931472, ce qui donne pour produit 179: on peut donc parier avec avantage un contre un, que cela n'arrivera pas dans l'intervalle de cent soixante-dix-neuf années.

Relativement à Londres,  $p = 737629$ ,  
 &  $q = 698958$ ,  
 ce qui donne  $z_{-1} = 18,3000$ ,  
 &  $\Delta \cdot z_{-1} = 0,0694$ ;

en sorte que si l'on suppose la probabilité que les naissances des garçons ne l'emporteront pas sur celles des filles égale à  $18,3 \cdot P$ , cette probabilité ne surpassera que d'un quinzième environ la véritable; on trouve ensuite

$$\log. \left[ 1 + \frac{a \cdot (p - q)}{q \cdot (p + q + 2a)} \right]^{1+a} \cdot \left[ 1 - \frac{a \cdot (p - q)}{p \cdot (p + q + 2a)} \right]^{1+a} = 0,0432414;$$

$$\log. \frac{(p + q)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{[(p + a) \cdot (q + a)]}}{\sqrt{(pq) \cdot (p + q + 2a)^{\frac{1}{2}}}} = 1,9970020.$$

On a de plus, en portant la précision jusqu'à dix décimales,

$$\log. p = 5,8678379827,$$

$$\log. q = 5,8444510800,$$

$$\log. (p + q) = 6,1573319321;$$

d'où l'on tire

$$\log. \frac{p \cdot q}{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{2a}} = 4,8518990;$$

on aura donc

$$\log. P = 6,6435674;$$

partant,

$$18,3 \cdot P = 0,000080541 = \frac{1}{12416};$$

la probabilité que les naissances des garçons à Londres ne l'emporteront pas sur celles des filles dans une année déterminée, est donc un peu moindre que  $\frac{1}{12416}$ , en sorte que l'on peut parier avec avantage 1 contre 1 que cela n'arrivera pas dans l'intervalle de huit mille six cents cinq années; ce

N n ij

phénomène est, comme l'on voit, beaucoup moins probable à Londres qu'à Paris, ce qui vient de ce que dans la première de ces villes, le rapport des naissances des garçons à celles des filles est plus considérable.

## X X I.

LA théorie précédente suppose que l'on connoît le nombre de fois que chaque événement simple est arrivé; mais quoique cette supposition s'étende à un grand nombre de Problèmes intéressans, cependant elle n'est encore qu'un cas particulier de cette partie de l'analyse des hasards, qui consiste à remonter des événemens aux causes. Nous allons exposer dans les articles suivans, une méthode générale pour déterminer les possibilités des événemens simples, quel que soit l'événement composé dont on a observé l'existence.

Considérons d'abord deux Joueurs  $A$  &  $B$ , jouant aux mêmes conditions que dans l'article III, c'est-à-dire que  $A$  ayant  $m$  jetons au commencement de chaque partie,  $B$  en ait  $n - m$ ; qu'à chaque coup celui qui perd donne un jeton à son adversaire, & que la partie ne doive finir que lorsque l'un d'eux aura gagné tous les jetons de l'autre. Supposons ensuite qu'ils aient joué de cette manière un très-grand nombre de parties dont  $p$  aient été gagnées par  $A$  &  $q$  par  $B$ , & que l'on veuille déterminer leurs adresses respectives, ou ce qui revient au même, leur probabilité de gagner un seul coup; il est clair que le nombre des coups gagnés ou perdus par chaque Joueur est inconnu, puisque chaque partie peut être composée d'un nombre plus grand ou moindre de coups; on ignore donc ici le nombre de fois que chaque événement simple est arrivé; mais il est facile d'étendre à ce cas & à tous les autres semblables, la théorie des articles précédens, en observant que si  $p$  &  $q$  sont de très grands nombres, les probabilités des deux Joueurs  $A$  &  $B$  pour gagner une partie, seront à très-peu près dans le rapport de ces nombres: or ces probabilités étant connues, on aura facilement leurs adresses respectives, ou leurs probabilités

de gagner un seul coup; car en nommant  $X$  la probabilité du Joueur  $A$  pour gagner une partie, &  $x$  son adresse, on a par l'article III,

$$X = \frac{1 - (\frac{1-x}{x})^m}{1 - (\frac{1-x}{x})^n}.$$

La seule racine utile de cette équation est celle qui est positive & moindre que l'unité; or il est aisé de voir *a priori* qu'il ne peut y en avoir qu'une qui satisfasse à ces conditions, puisque l'adresse  $x$  ne peut augmenter ou diminuer sans que la probabilité  $X$  augmente ou diminue; la valeur de  $x$  que l'on tirera de cette équation jouira donc du même degré de probabilité que  $X$ : or si l'on suppose  $p$  &  $q$  très-considérables, il sera extrêmement probable, par l'article XVIII, que  $X$  diffère très-peu de  $\frac{p}{p+q}$ ; donc si l'on nomme  $a$  la racine positive & moindre que l'unité de l'équation

$$0 = qx^n + p.(1-x)^n - (p+q)x^{n-m}.(1-x)^m; (a)$$

il sera très-probable que l'adresse  $x$  est très-approchante de  $a$ , en sorte que si  $p$  &  $q$  étoient infinis, il seroit infiniment probable que la différence de  $x$  & de  $a$  est moindre qu'aucune grandeur donnée. Cette valeur de  $x$  a d'ailleurs l'avantage de nous faire connoître le rapport des coups gagnés aux coups perdus par le Joueur  $A$ ; car si l'on nomme  $r$  le nombre des premiers, &  $s$  celui des seconds, l'adresse  $x$  doit être très-peu différente de  $\frac{r}{r+s}$ , en sorte que l'on a à très-peu près  $\frac{r}{r+s} = a$ ; d'où l'on tire  $\frac{r}{s} = \frac{a}{1-a}$ .

Supposons encore que  $A$  &  $B$  ont joué  $p$  parties avec la condition précédente, &  $q$  parties dans lesquelles  $A$  avoit  $m$  jetons &  $B$   $n - m$ , au commencement de chaque partie. Supposons ensuite que sur ces  $p + q$  parties,  $A$  en a gagné  $r$ ; cela posé, pour déterminer les adresses de ces

sera encore très-approchante de la véritable possibilité  $x$ ; par exemple, si l'évènement observé est la naissance de  $p$  garçons & de  $q$  filles, sur  $p + q$  enfans; en nommant  $x$  la possibilité de la naissance d'un garçon, & par conséquent  $1 - x$  celle de la naissance d'une fille, on aura

$$\frac{1.2.3\dots(p+q)}{1.2.3\dots p.1.2.3\dots q} \cdot x^p \cdot (1-x)^q,$$

pour la probabilité de cet évènement; dans ce cas,  $x = x^p (1-x)^q$ , & son *maximum* a lieu lorsque  $x = \frac{p}{p+q}$ ; cette valeur de  $x$  est donc à très-peu près la véritable possibilité de la naissance d'un garçon, lorsque  $p$  &  $q$  sont de très-grands nombres.

Supposons encore que l'on tire trois boules d'une urne qui renferme une infinité de boules blanches & noires dans une proportion inconnue, & que  $A$  &  $B$  jouent à cette condition que  $A$  gagnera la partie si sur ces trois boules il y a plus de blanches que de noires, & qu'il la perdra s'il y a plus de noires que de blanches. Supposons ensuite que sur  $p + q$  parties,  $A$  en ait gagné  $p$  & perdu  $q$ ; cela posé, si l'on nomme  $x$  la probabilité d'amener une boule blanche, on aura  $x^2 (3 - 2x)$  pour l'expression de la probabilité que  $A$  gagnera une partie, &  $(1-x)^2 (1 + 2x)$  pour la probabilité qu'il la perdra; la probabilité de l'évènement observé sera donc

$$\frac{1.2.3\dots(p+q)}{1.2.3\dots p.1.2.3\dots q} \cdot x^{2p} (3 - 2x)^p \cdot (1-x)^{2q} (1 + 2x)^q;$$

ce cas,

$$x^{2p} (3 - 2x)^p \cdot (1-x)^{2q} (1 + 2x)^q,$$

& son *maximum* donne

$$x = \frac{p \cdot (1-x)^2 \cdot (1 + 2x) - q x^2 \cdot (3 - 2x)}{2p(1-x)(1+2x) + 2q x(3-2x)};$$

286 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Joueurs, nous nommerons  $x$  celle de  $A$ , &  $v$  le nombre inconnu de parties qu'il a gagnées sur les  $p$  premières; l'équation (a) donnera dans ce cas,

$$0 = (p - v)x^n + v(1 - x)^n - px^{n-m}(1 - x)^m.$$

Le nombre des parties que ce Joueur a gagnées sur les  $q$  dernières, est  $r - v$ ; on aura donc encore, en vertu de l'équation (a),

$$0 = (q - r + v).x^n + (r - v).(1 - x)^n - q.x^{n-m}.(1 - x)^m,$$

En éliminant  $v$  de ces deux équations, on aura une équation en  $x$ , dont la racine positive & moindre que l'unité, est celle qu'il faut choisir; or on prouvera comme ci-dessus, qu'il ne peut y en avoir qu'une de cette nature. Si l'on nomme  $a$  cette racine,  $\frac{a}{1-a}$  sera à très-peu-près le rapport du nombre des coups gagnés au nombre des coups perdus par le Joueur  $A$ ; on aura ensuite

$$\frac{v}{p} = a^{n-m} \cdot \frac{[a^n - (1-a)^n]}{a^n - (1-a)^n},$$

& ce sera le rapport du nombre des premières parties gagnées par le Joueur  $A$ , au nombre total  $p$  de ces parties.

X X I I.

Voici maintenant une méthode directe & générale pour déterminer les possibilités des évènements simples, quel que soit l'évènement observé.

Si l'on désigne par  $x$  &  $1 - x$  les possibilités des deux évènements simples, & que l'on cherche par les règles ordinaires de l'analyse des hasards, la probabilité de l'évènement composé dont il s'agit; on aura pour son expression une fonction de  $x$ , multipliée par un coefficient constant quelconque; si l'on nomme  $y$  cette fonction, &  $a$  la valeur de  $x$ , positive & moindre que l'unité qui la rend un *maximum*, non-seulement cette valeur sera la plus probable, mais elle

fera encore très-approchante de la véritable possibilité  $x$ ; par exemple, si l'évènement observé est la naissance de  $p$  garçons & de  $q$  filles, sur  $p + q$  enfans; en nommant  $x$  la possibilité de la naissance d'un garçon, & par conséquent  $1 - x$  celle de la naissance d'une fille, on aura

$$\frac{1.2.3\dots(p+q)}{1.2.3\dots p.1.2.3\dots q} \cdot x^p \cdot (1-x)^q,$$

pour la probabilité de cet évènement; dans ce cas,  $y = x^p (1-x)^q$ , & son *maximum* a lieu lorsque  $x = \frac{p}{p+q}$ ; cette valeur de  $x$  est donc à très-peu près la véritable possibilité de la naissance d'un garçon, lorsque  $p$  &  $q$  sont de très-grands nombres.

Supposons encore que l'on tire trois boules d'une urne qui renferme une infinité de boules blanches & noires dans une proportion inconnue, & que  $A$  &  $B$  jouent à cette condition que  $A$  gagnera la partie si sur ces trois boules il y a plus de blanches que de noires, & qu'il la perdra s'il y a plus de noires que de blanches. Supposons ensuite que sur  $p + q$  parties,  $A$  en ait gagné  $p$  & perdu  $q$ ; cela posé, si l'on nomme  $x$  la probabilité d'amener une boule blanche, on aura  $x^3 (3 - 2x)$  pour l'expression de la probabilité que  $A$  gagnera une partie, &  $(1-x)^3 (1 + 2x)$  pour la probabilité qu'il la perdra; la probabilité de l'évènement observé sera donc

$$\frac{1.2.3\dots(p+q)}{1.2.3\dots p.1.2.3\dots q} \cdot x^3 (3 - 2x)^p \cdot (1-x)^3 (1 + 2x)^q;$$

dans ce cas,

$$y = x^3 (3 - 2x)^p \cdot (1-x)^3 (1 + 2x)^q,$$

& son *maximum* donne

$$0 = p \cdot (1-x)^2 \cdot (1 + 2x) - qx^2 \cdot (3 - 2x);$$

d'où il suit que si l'on nomme  $a$  la racine positive & moindre que l'unité de cette équation, le rapport des boules blanches aux boules noires de l'urne sera à très-peu près égal à  $\frac{a}{1-a}$ .

Le *maximum* de  $y$  n'indique d'une manière approchée, la véritable valeur de  $x$ , qu'autant que les valeurs de  $y$  voisines de ce *maximum*, sont incomparablement plus grandes que les autres; car il est visible que l'intégrale  $\int y \, dx$  prise dans un très-petit intervalle de part & d'autre de ce *maximum*, est alors très-approchant de cette même intégrale prise depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = 1$ : or le rapport de la première de ces intégrales à la seconde, exprime la probabilité que la valeur de  $x$  est comprise dans cet intervalle. Les valeurs de  $y$  voisines du *maximum*, surpasseront considérablement les autres, lorsque  $y$  aura des facteurs élevés à de grandes puissances de l'ordre  $\frac{1}{a}$ ,  $a$  étant un coefficient très-petit & d'autant moindre, que l'évènement observé est plus composé: si l'on prend dans ce cas, le rapport de  $\partial y$  à  $y \, \partial x$ , on sera conduit à une équation de cette forme  $\frac{\partial y}{y \, \partial x} = \frac{1}{az}$ ,  $z$  étant une fonction de  $x$ , qui ne renferme plus de puissances de l'ordre  $\frac{1}{a}$ ; ainsi, toutes les fois que l'on parviendra à une équation semblable, les valeurs de  $x$  décroîtront avec une grande rapidité en s'éloignant du *maximum*, & la valeur de  $x$ , correspondante à ce *maximum*, sera très-approchant de la véritable.

On voit par-là, que les évènements composés ne sont pas tous propres à faire connoître les possibilités des évènements simples; par exemple,  $A$  &  $B$  jouant aux mêmes conditions que dans l'article III, si  $A$  gagne la partie; en nommant  $x$

son adresse, on aura  $\frac{1 - (\frac{1-x}{a})^n}{1 - (\frac{1-x}{a})^n}$  pour la probabilité de



cet évènement : or si l'on suppose  $m$  &  $n$  de très-grands nombres, l'évènement observé sera composé d'un grand nombre de coups ; mais comme les valeurs de  $y$  correspondantes à  $x$  plus grand que  $\frac{1}{2}$ , sont très-peu différentes de l'unité, cet évènement ne peut faire connoître d'une manière approchée, la valeur de  $x$  ; tout ce que l'on en peut conclure, c'est qu'il est extrêmement probable que  $A$  est plus fort que  $B$ , parce que les valeurs de  $y$  correspondantes à  $x$  plus petit que  $\frac{1}{2}$ , sont incomparablement moindres que les autres.

## X X I I I.

LA connoissance des valeurs approchées des possibilités des évènements simples qui résultent d'un évènement composé, seroit très-imparfaite, si l'on n'étoit pas en état d'apprécier combien il est probable qu'en prenant pour ces valeurs celles qui répondent au *maximum* de  $y$ , on ne se trompera pas soit en *plus*, soit en *moins*, d'une quantité donnée ; pour cela, il est nécessaire, comme on l'a vu dans l'article *XVIII*, de déterminer le rapport de l'intégrale  $\int y dx$  prise dans un petit intervalle de part & d'autre de ce *maximum*, à cette même intégrale prise depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = 1$  ; & c'est ce que nous avons fait dans l'article cité, pour le cas où  $y = x^p \cdot (1 - x)^q$ ,  $p$  &  $q$  étant de très-grands nombres. Nous allons présentement généraliser ces recherches, & les étendre à toutes les valeurs de  $y$ , qui conduisent à une équation de cette forme,

$$y dx = az dy,$$

$z$  étant une fonction de  $x$ , qui ne renferme point de puissances de l'ordre  $\frac{1}{a}$ .

Reprenons l'équation  $(\lambda)$  de l'article *XVIII*,

$$\int y dx = C + ayz \cdot \left\{ 1 - a \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + a^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^3 \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \&c. \right\}; (\lambda)$$

Mém. 1778.

Oo

si l'on nomme

$a$  la valeur de  $x$  correspondante au *maximum* de  $y$ ;

$Y$  &  $Z$  les valeurs de  $x$  & de  $z$ , correspondantes à  $x = a - \theta$ ;

$Y'$  &  $-Z'$  les valeurs de ces mêmes quantités correspondantes à  $x = a + \theta$ ;

si l'on observe d'ailleurs que les deux évènements simples étant supposés avoir eu lieu, on a  $y = 0$  lorsque  $x = 0$ , & lorsque  $x = 1$ ; l'intégrale  $\int y \partial x$  prise depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = a - \theta$ , sera

$$aYZ \cdot \left\{ 1 + a \cdot \frac{\partial Z}{\partial \theta} + a^2 \cdot \frac{\partial(Z \partial Z)}{\partial \theta^2} + \&c. \right\};$$

cette même intégrale prise depuis  $x = a + \theta$  jusqu'à  $x = 1$ , sera

$$aY'Z' \cdot \left\{ 1 - a \cdot \frac{\partial Z'}{\partial \theta} + a^2 \cdot \frac{\partial(Z' \partial Z')}{\partial \theta^2} - \&c. \right\}.$$

En nommant donc  $k$  l'intégrale  $\int y \partial x$  prise depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = 1$ , on aura cette même intégrale prise depuis  $x = a - \theta$  jusqu'à  $x = a + \theta$ , en retranchant de  $k$  les deux intégrales précédentes; en divisant ensuite ce reste par  $k$ , on aura la probabilité que  $x$  sera compris dans cet intervalle; cette probabilité sera par conséquent égale à

$$1 - \frac{aYZ}{k} \cdot \left\{ 1 + a \cdot \frac{\partial Z}{\partial \theta} + a^2 \cdot \frac{\partial(Z \partial Z)}{\partial \theta^2} + a^3 \cdot \frac{\partial[Z \partial(Z \partial Z)]}{\partial \theta^3} + \&c. \right\} \\ - \frac{aY'Z'}{k} \cdot \left\{ 1 - a \cdot \frac{\partial Z'}{\partial \theta} + a^2 \cdot \frac{\partial(Z' \partial Z')}{\partial \theta^2} - a^3 \cdot \frac{\partial[Z' \partial(Z' \partial Z')]}{\partial \theta^3} + \&c. \right\}$$

la question se réduit ainsi à déterminer  $k$ . Nous y sommes parvenus dans l'article XVIII où  $y = x^p (1 - x)^q$ , au moyen du beau théorème de M. Stirling sur la valeur du produit  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots u$ , lorsque  $u$  est un très-grand nombre; mais ce procédé est indirect, & il est naturel de penser qu'il existe une méthode pour déterminer directement  $k$ , quel que soit  $y$ , & dont ce théorème est un corollaire: celle que je vais

exposer m'a paru remplir cet objet de la manière la plus générale.

Puisque la valeur de  $y$  conduit, par la supposition, à une équation de cette forme  $y \partial x = a z \partial y$ ; on a  $\log. y = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{\partial x}{z}$ ,

en sorte que  $\log. y$  est très-grand & de l'ordre  $\frac{1}{a}$ ; d'ailleurs  $a$  étant la valeur de  $x$  correspondante au *maximum* de  $y$ , si l'on fait  $x = a + \theta$ , & que l'on nomme  $A$  la plus grande valeur de  $y$ , ou sa valeur lorsque  $\theta = 0$ , on aura en réduisant en série,

$$a \cdot \log. y = a \cdot \log. A - \theta^2 \cdot (f + f' \theta + f'' \cdot \theta^2 + \&c.),$$

le terme multiplié par  $\theta$  disparaissant, parce que l'équation  $x = a$  ou  $\theta = 0$ , rend  $y$  un *maximum*; on aura ainsi

$$y = A \cdot e^{-\frac{\theta^2}{a} \cdot (f + f' \theta + f'' \theta^2 + \&c.)}$$

$$\& \quad f y \partial x = A \cdot f \partial \theta \cdot e^{-\frac{\theta^2}{a} \cdot (f + f' \theta + \&c.)};$$

$e$  étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité.

Soit

$$\theta^2 \cdot (f + f' \theta + f'' \theta^2 + \&c.) = a t^2,$$

ou ce qui revient au même,

$$\log. A - \log. y = t^2,$$

on aura par la méthode du retour des suites,

$$\theta = a^{\frac{1}{2}} t \cdot \{ h + h^{(1)} \cdot a^{\frac{1}{2}} t + h^{(2)} \cdot a t^2 + h^{(3)} \cdot a^{\frac{3}{2}} t^3 + \&c. \}$$

partant

$$\partial \theta = a^{\frac{1}{2}} \partial t \cdot \{ h + 2 h^{(1)} \cdot a^{\frac{1}{2}} t + 3 h^{(2)} \cdot a t^2 + \&c. \}$$

ce qui donne

$$f y \partial x = a^{\frac{1}{2}} \cdot A \cdot f \partial t \cdot e^{-t^2} \cdot \{ h + 2 h^{(1)} \cdot a^{\frac{1}{2}} t + 3 h^{(2)} \cdot a t^2 + \&c. \} = k$$

O o ij

L'intégrale  $\int y \, dx$  doit être prise depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = 1$ ; or  $x$  étant nul, on a  $y = 0$ , &  $\log. y = -\infty$ ; donc  $t^2 = \infty$ . Lorsque  $x = a$ , on a  $\theta = 0$ ; partant  $t = 0$ ; d'ailleurs lorsque  $\theta$  change de signe,  $t$  en change pareillement, en sorte que les valeurs de  $t$ , correspondantes à celles de  $x$ , depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = a$ , ont un signe différent de celles qui correspondent aux valeurs de  $x$ , depuis  $x = a$ , jusqu'à  $x = 1$ ; or  $x$  étant 1, on a  $y = 0$ , ce qui donne  $t^2 = \infty$ ; les valeurs de  $t$  s'étendent conséquemment depuis  $t = -\infty$  jusqu'à  $t = \infty$ . Dans ce cas, on a  $\int t^{2n-1} \, dt \cdot e^{-t^2} = 0$ , parce que  $t^{2n-1} \cdot e^{-t^2}$  se changeant en  $-t^{2n-1} \cdot e^{-t^2}$  lorsque  $t$  est négatif, la somme de ces deux quantités est nulle; on a par une raison semblable,

$$\int t^{2n} \, dt \cdot e^{-t^2} = 2 \int t^{2n-1} \, dt \cdot e^{-t^2},$$

la seconde intégrale étant prise depuis  $t = 0$  jusqu'à  $t = \infty$ ; or cette supposition donne

$$\int t^{2n} \cdot dt \cdot e^{-t^2} = \frac{2n-1}{2} \cdot \int t^{2n-2} \cdot dt \cdot e^{-t^2};$$

pareillement

$$\int t^{2n-2} \cdot dt \cdot e^{-t^2} = \frac{2n-3}{2} \cdot \int t^{2n-4} \cdot dt \cdot e^{-t^2},$$

& ainsi de suite; donc

$$\int t^{2n} \cdot dt \cdot e^{-t^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2^n} \cdot \int dt \cdot e^{-t^2},$$

on aura ainsi

$$A = 2 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot A \cdot [h + 1 \cdot 3 \cdot a \cdot \frac{h^{(2)}}{2} + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot \frac{h^{(4)}}{2^2} + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot a^3 \cdot \frac{h^{(6)}}{2^3} + \&c.] \cdot \int dt \cdot e^{-t^2};$$

il ne s'agit donc plus que d'avoir l'intégrale  $\int dt \cdot e^{-t^2}$  depuis  $t = 0$  jusqu'à  $t = \infty$ . Pour cela, considérons la double intégrale  $\iint ds \, du \, e^{-s^2(1 \pm u^2)}$ , & prenons-la depuis  $s = 0$

jusqu'à  $s = \infty$ , &c depuis  $u = 0$  jusqu'à  $u = \infty$ ; en l'intégrant d'abord par rapport à  $s$ , on aura

$$\iint \partial s \partial u . e^{-s(1+u)} = \int \frac{du}{1+u};$$

or on a, comme on fait,

$$\int \frac{du}{1+u} = \frac{\pi}{2},$$

$\pi$  étant le rapport de la demi-circonférence au rayon; donc

$$\iint \partial s \partial u . e^{-s(1+u)} = \frac{\pi}{2}.$$

Si l'on prend cette double intégrale d'abord par rapport à  $u$ , en faisant  $u \sqrt{s} = t$ , elle deviendra  $\int \frac{\partial s}{\sqrt{s}} . e^{-s} \int dt . e^{-t^2}$ ; soit  $\int dt . e^{-t^2} = B$ , l'intégrale étant prise depuis  $t = 0$  jusqu'à  $t = \infty$ , on aura

$$\iint \partial s . \partial u e^{-s(1+u)} = B . \int \frac{\partial s}{\sqrt{s}} . e^{-s};$$

or en faisant  $s = s'^2$ , on a

$$\int \frac{\partial s}{\sqrt{s}} . e^{-s} = 2 \int \partial s' . e^{-s'^2} = 2B,$$

l'intégrale étant prise depuis  $s' = 0$  jusqu'à  $s' = \infty$ ; donc

$$\iint \partial s . \partial u . e^{-s(1+u)} = 2B^2 = \frac{\pi}{2},$$

d'où l'on tire  $B = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$ ; partant,

$$k = A \sqrt{a\pi} . \left\{ h + 1.3 . \frac{a^2 h^{(2)}}{2} + 1.3.5 . \frac{a^4 h^{(4)}}{2^2} \right. \\ \left. + 1.3.5.7 . \frac{a^6 h^{(6)}}{2^3} + \&c. \right\}; (s).$$

Si l'on met l'équation

$$\log. A - \log. y = t^2$$

294 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
sous cette forme,

$$\theta = t \cdot \sqrt{\frac{\theta^2}{\log. A - \log. y}},$$

on aura pour déterminer les coefficients  $h$ ,  $h''$ ,  $h'''$ , &c. de la série

$$\theta = a^{\frac{1}{2}} t \cdot \{h + h' \cdot a^{\frac{1}{2}} t + h'' \cdot a t^2 + \&c.\}$$

l'expression générale

$$a^{n+\frac{1}{2}} \cdot h^{(2n)} = \frac{\partial^{2n} \cdot [\theta^{2n+1} \cdot (\log. A - \log. y)^{-n-\frac{1}{2}}]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n+1) \cdot \partial \theta^{2n}}; \quad (2)$$

pourvu que l'on suppose  $\partial \theta$  constant, &  $\theta = 0$  après les différentiations. (*Voyez sur cela les Mémoires de l'Académie pour l'année 1777, page 115*).

Lorsque  $n = 0$ , on a

$$a^{\frac{1}{2}} h = \theta \cdot (\log. A - \log. y)^{-\frac{1}{2}};$$

or

$$\log. y = \log. A + \theta \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\theta^2}{1 \cdot 2} \cdot \left\{ \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} - \frac{\partial y^2}{\partial \theta^2} \right\} + \&c.$$

$y$ ,  $\partial y$ ,  $\partial^2 y$ , &c. dans le second membre de cette équation, étant ce que deviennent ces quantités lorsqu'on y suppose  $\theta = 0$ ; cette supposition donne

$$y = A \text{ \& } \frac{\partial y}{\partial \theta} = 0;$$

on aura donc

$$a^{\frac{1}{2}} h = \sqrt{\left\{ -\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \right\}}.$$

Partant on aura à très-peu près, lorsque  $a$  est très-petit,

$$h = \frac{A^{\frac{1}{2}} \sqrt{(2\pi)}}{\sqrt{\left( -\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \right)}};$$

ou ce qui revient au même,

$$(f y \partial x)^2 = \frac{2 \pi \cdot y^2}{-\frac{\partial \partial y}{\partial x^2}}; (\mu).$$

l'intégrale  $f y \partial x$  étant prise depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = 1$ , les quantités  $y$  &  $\frac{\partial \partial y}{\partial x^2}$  du second membre de cette équation étant ce qu'elles deviennent lorsqu'on y suppose  $a$ .

#### XXIV.

Substituant  $a + \theta$ , au lieu de  $x$  dans  $\log. y$ , & en réduisant en série, la condition du *maximum* de  $y$  fait disparaître la première puissance de  $\theta$  dans cette série; mais cette condition sert, comme l'on fait, faire disparaître la première, la deuxième & la troisième puissances de  $\theta$ , ou la première, la deuxième, la troisième, la quatrième & la cinquième puissances, &c. infini de suite, pourvu que le nombre des puissances qui disparaissent soit impair. Voyons ce que devient alors l'intégrale  $f y \partial x$  prise depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = 1$ .

Supposons que la première, la deuxième & la troisième puissances de  $\theta$  disparaissent; on aura pour  $a + \theta$  une suite de cette forme,

$$a \log. y = a \log. A + \theta^4 \cdot (f + f' \theta + f'' \theta^2 + \&c.);$$

donc si l'on fait

$$\theta^4 (f + f' \theta + f'' \theta^2 + \&c.) = a t^4,$$

on aura

$$\log. A - \log. y = t^4,$$

&c

$$\theta = a^{\frac{1}{4}} t \cdot \{h + h^{(1)} \cdot a^{\frac{1}{4}} t + h^{(2)} \cdot a^{\frac{1}{2}} t^2 + h^{(3)} \cdot a^{\frac{3}{4}} t^3 + a h^{(4)} \cdot t^4 + \&c.\}$$

d'où l'on tire

$$f y \partial x = a^{\frac{1}{4}} A \cdot \int \partial t \cdot e^{-t^4} \cdot \{h + 2 h^{(1)} \cdot a^{\frac{1}{4}} t + 3 h^{(2)} \cdot a^{\frac{1}{2}} t^2 + \&c.\}$$

296 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

On prouvera, comme dans l'article précédent, que l'intégrale relative à  $t$ , doit être prise depuis  $t = -\infty$  jusqu'à  $t = \infty$ ; or on a dans ce cas,

$$\int t^{2n-1} \partial t . e^{-t^2} = 0,$$

$$\& \int t^{2n} \partial t . e^{-t^2} = 2 \int t^{2n-1} \partial t . e^{-t^2},$$

l'intégrale du second membre étant prise depuis  $t = 0$  jusqu'à  $t = \infty$ ; si l'on y suppose ensuite  $n = 2i$ , on aura

$$\int t^{2n} \partial t . e^{-t^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4i-3)}{4^i} \int \partial t . e^{-t^2},$$

& si  $n = 2i + 1$ , on aura

$$\int t^{2n} \partial t . e^{-t^2} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \dots (4i+1)}{4^i} \int t^2 \partial t . e^{-t^2};$$

en supposant donc

$$\int \partial t . e^{-t^2} = C,$$

$$\int t^2 \partial t . e^{-t^2} = C',$$

on aura

$$\begin{aligned} \int y \partial x = 2a^{\frac{1}{2}} A . C . \left\{ h + \frac{1 \cdot 5}{4} . ah^{(4)} + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4^2} . a^2 h^{(8)} + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{4^3} . a^3 h^{(12)} + \&c. \right\} \\ + 2a^{\frac{1}{2}} A . C' . \left\{ 3h^{(2)} + \frac{3 \cdot 7}{4} . ah^{(6)} + \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{4^2} . a^2 h^{(10)} + \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15}{4^3} . a^3 h^{(14)} + \&c. \right\} \end{aligned}$$

& il est aisé d'en conclure par analogie, les valeurs de  $\int y \partial x$  dans le cas où la condition du *maximum* de  $y$  feroit disparaître un plus grand nombre de puissances de  $\theta$ .

Tout se réduit donc à déterminer les valeurs de  $C$  & de  $C'$ : nous observerons d'abord que  $C$  étant connu,  $C'$  le sera pareillement; car si l'on prend la double intégrale  $\iint \partial s . \partial u e^{-s(1+u^2)}$  depuis  $s = 0$  jusqu'à  $s = \infty$ , & depuis  $u = 0$  jusqu'à  $u = \infty$ , on aura en intégrant d'abord par rapport à  $s$ ,

$$\iint \partial u \partial s e^{-s(1+u^2)} = \int \frac{\partial u}{1+u^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Si



Si l'on fait ensuite  $u\sqrt{s} = t$ , on aura

$$\iint \partial s . \partial u e^{-s(1+u^2)} = \int \frac{\partial s}{\sqrt{s}} . e^{-s} . \int \partial t e^{-t^2} = C . \int \frac{\partial s}{\sqrt{s}} e^{-s}$$

soit  $s = s'^2$ , & l'on aura

$$\int \frac{\partial s}{\sqrt{s}} e^{-s} = 4 \int s'^2 \partial s' . e^{-s'^4} = 4 C';$$

donc

$$\iint \partial s . \partial u e^{-s(1+u^2)} = 4 C C' = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

ce qui donne

$$C' = \frac{\pi}{8 C \sqrt{2}}.$$

Quant à la valeur de  $C$ , il ne m'a pas encore été possible, malgré plusieurs tentatives, de la ramener aux arcs-de-cercle ou aux logarithmes; mais j'ai trouvé qu'elle dépendoit de la rectification de la courbe élastique rectangle, ou ce qui revient au même, de l'intégrale  $\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^4}}$ , prise depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = 1$ ; si l'on désigne par  $\pi'$  la valeur de cette intégrale, on a trouvé

$$\pi' = 1,31102877714605987^*.$$

Cela posé, considérons la double intégrale  $\iint \partial s . \partial u e^{-s(1+u^2)}$ , prise depuis  $s = 0$  jusqu'à  $s = \infty$ , & depuis  $u = 0$  jusqu'à  $u = \infty$ ; en faisant  $u\sqrt{s} = t$ , elle deviendra

$$\int \frac{\partial s}{\sqrt{s}} e^{-s} \int \partial t e^{-t^2}, \text{ ou } C . \int \frac{\partial s}{\sqrt{s}} e^{-s};$$

soit  $s = s'^2$ , & l'on aura

$$\int \frac{\partial s}{\sqrt{s}} e^{-s} = 2 \int \partial s' e^{-s'^4} = 2 C_2$$

partant,

$$\iint \partial s . \partial u e^{-s(1+u^2)} = 2 C_2 C'.$$

Mém. 1778.

Pp

\* V. le Traité  
de M. Stirling,  
De  
Sommaione  
& interpolatione  
serierum,  
pag. 584

Supposons maintenant  $s\sqrt{1+u^2} = s^{11}$ , & nous aurons

$$\int \partial s \cdot \partial u e^{-s^{11}(1+u^2)} = \int \frac{\partial u}{\sqrt{1+u^2}} \int \partial s^{11} e^{-s^{11}} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \int \frac{\partial s}{\sqrt{1+u^2}};$$

en nommant donc  $E$  l'intégrale  $\int \frac{\partial s}{\sqrt{1+u^2}}$ , prise depuis  $u = 0$  jusqu'à  $u = \infty$ , on aura

$$2 C^2 = \frac{1}{2} E \sqrt{\pi},$$

ce qui donne

$$C = \frac{1}{2} \sqrt{[E \sqrt{\pi}]}. \quad ]$$

Si l'on fait  $\frac{1}{1+u^2} = s^4$ ,

on aura

$$\int \frac{\partial s}{\sqrt{1+u^2}} = - \int \frac{\partial s}{(1-s^4)^{\frac{1}{2}}},$$

l'intégrale relative à  $s$  étant prise depuis  $s = 1$  jusqu'à  $s = 0$ , en sorte que

$$\int \frac{\partial s}{\sqrt{1+u^2}} = E = \int \frac{\partial s}{(1-s^4)^{\frac{1}{2}}},$$

l'intégrale relative à  $s$  étant prise depuis  $s = 0$  jusqu'à  $s = 1$ .

Considérons présentement la double intégrale  $\iint \frac{\partial x \partial z}{(1-x^2-z^2)^{\frac{1}{2}}}$ , prise depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = 1$ , & depuis  $z = 0$  jusqu'à  $z = 1$ ; en faisant  $\frac{x}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} = x'$ , elle se changera

dans celle-ci  $\int \frac{\partial z}{\sqrt{1-z^2}} \int \frac{\partial x'}{(1-x'^2)^{\frac{1}{2}}}$ , ces intégrales étant prises depuis  $x' = 0$  &  $z = 0$ , jusqu'à  $x' = 1$  &  $z = 1$ , ce qui donne

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2} \text{ \& } \int \frac{\partial x'}{(1-x'^2)^{\frac{1}{2}}} = E;$$

On aura donc

$$\iint \frac{\partial x \cdot \partial z}{(1 - z^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi E}{2}.$$

Si l'on fait ensuite  $\frac{z}{\sqrt{(1 - x^2)}} = z'$ , on aura

$$\iint \frac{\partial x \cdot \partial z}{(1 - z^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1 - x^2)}} \cdot \int \frac{\partial z'}{(1 - z'^2)^{\frac{1}{2}}},$$

or on a

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1 - x^2)}} = \frac{\pi}{2\sqrt{(2)}};$$

d'ailleurs si l'on suppose  $1 - z'^2 = t^2$ , on aura

$$\int \frac{\partial z'}{(1 - z'^2)^{\frac{1}{2}}} = -2 \int \frac{\partial t}{\sqrt{(1 - t^2)}},$$

l'intégrale relative à  $t$  étant prise depuis  $t = 1$  jusqu'à  $t = 0$ ; cette intégrale est évidemment égale à  $-\pi$ ; donc

$$\int \frac{\partial z'}{(1 - z'^2)^{\frac{1}{2}}} = 2\pi,$$

ce qui donne

$$\iint \frac{\partial x \cdot \partial z}{(1 - z^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi \pi}{\sqrt{(2)}} = \frac{\pi E}{2}.$$

partant

$$E = \pi \sqrt{(2)};$$

d'où l'on tire

$$C = \frac{1}{2} \sqrt{[\pi^2 \cdot \sqrt{(2\pi)}]} \quad \& \quad C' = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{4 \sqrt{[\pi^2 \sqrt{(2)}]}};$$

X X V.

Pour appliquer la théorie précédente à quelques exemples, soit

$$y = x^p \cdot (1 - x)^q;$$

en faisant  $p = \frac{1}{\alpha}$ , &  $q = \frac{\mu}{\alpha}$ , on aura dans le cas

P p ij

du maximum de  $y$ ,  $x = \frac{1}{1+\mu}$ ; partant (article XXII),

$$A = \frac{\mu^2}{(1+\mu)^{p+1}},$$

$$\& \quad a \log. A = \mu \cdot \log. \left( \frac{\mu}{1+\mu} \right) + \log. \left( \frac{1}{1+\mu} \right);$$

on a d'ailleurs,

$$a \log. y = \log. x + \mu \log. (1 - x),$$

& si l'on fait

$$x = \frac{1}{1+\mu} + \theta,$$

on aura

$$a \log. y = \mu \cdot \log. \left( \frac{\mu}{1+\mu} - \theta \right) + \log. \left( \frac{1}{1+\mu} + \theta \right);$$

donc,

$$\begin{aligned} \log. A - \log. y &= -\frac{1}{a} \cdot \log. [1 + (1 + \mu) \theta] - \frac{\mu}{a} \cdot \log. \left( 1 - \frac{1 + \mu}{\mu} \cdot \theta \right) \\ &= \frac{(1+\mu)^2 \cdot (1+\mu)}{2 a \mu} \cdot \theta^2 + \frac{(1+\mu)^3 \cdot (1-\mu\mu)}{3 a \mu^2} \cdot \theta^3 + \frac{(1+\mu)^2 \cdot (1+\mu^3)}{4 a \mu^3} \cdot \theta^4 + \&c. \end{aligned}$$

d'où l'on tirera en vertu de la formule (7) de l'art. XXIII,

$$a^{\frac{1}{2}} h = \frac{\sqrt{(2 \mu a)}}{(1 + \mu)^{\frac{1}{2}}},$$

$$a^{\frac{3}{2}} h'' = \frac{a \sqrt{(2 \mu a)}}{(1 + \mu)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{[(1 + \mu)^2 - 13 \mu]}{18 \mu \cdot (1 + \mu)},$$

&c.

la formule (5) de l'article XXIII donnera donc

$$k = \frac{\sqrt{(2 a \pi)} \cdot \mu^{q+\frac{1}{2}}}{(1 + \mu)^{p+q+\frac{1}{2}}} \cdot \left\{ 1 + \frac{a \cdot [(1 + \mu)^2 - 13 \mu]}{12 \mu \cdot (1 + \mu)} + \&c. \right\}$$

ce qui est conforme à ce que nous avons trouvé dans l'article XVIII.

Si  $\mu = 1$ , ou ce qui revient au même, si  $p = q$ ,

on déterminera plus simplement de la manière suivante, les coefficients de la série en  $t$ , qui exprime la valeur de  $\theta$ ; pour cela, on observera que dans ce cas,

$$\log. A - \log. y = -\frac{1}{a} \cdot \log. (1 - 4\theta^2) = t^2,$$

ce qui donne

$$1 - 4\theta^2 = e^{-at^2},$$

$$\& \quad 2\theta = (1 - e^{-at^2})^{\frac{1}{2}}.$$

Soit

$$(1 - e^{-at^2})^{\frac{1}{2}} = 2a^{\frac{1}{2}}t \cdot \{l + l' \cdot at^2 + l'' \cdot a^2t^4 + l''' \cdot a^3t^6 + \&c.\};$$

en prenant les différentielles logarithmiques des deux membres de cette équation, & multipliant en croix, on aura

$$at^2 \cdot e^{-at^2} \cdot \{l + l' \cdot at^2 + l'' \cdot a^2t^4 + \&c.\}$$

$$= \{l + 3l' \cdot at^2 + 5l'' \cdot a^2t^4 + \&c.\} \cdot (1 - e^{-at^2});$$

or on a

$$e^{-at^2} = 1 - at^2 + \frac{a^2t^4}{1.2} - \frac{a^3t^6}{1.2.3} + \&c.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation précédente, on aura entre les coefficients  $l, l', l'', l''', \&c.$  les équations suivantes,

$$2l' + \frac{l}{1.2} = 0,$$

$$4l'' - \frac{l'}{1.2} - \frac{2l}{1.2.3} = 0,$$

&c.

& généralement

$$0 = 2i \cdot l^{(i)} - (2i-3) \frac{l^{(i-1)}}{1.2} + (2i-6) \cdot \frac{l^{(i-2)}}{1.2.3} - (2i-9) \cdot \frac{l^{(i-3)}}{1.2.3.4}$$

$$+ (2i-12) \cdot \frac{l^{(i-4)}}{1.2.3.4.5} - \&c.$$

en continuant cette suite jusqu'à ce qu'on arrive au coefficient  $l$ ; on déterminera donc facilement  $l'$ ,  $l''$ ,  $l'''$ , &c. lorsque ce coefficient sera connu; or si l'on néglige les puissances de  $t$  supérieures à l'unité, on a

$$(1 - e^{-at})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} t;$$

donc  $l = \frac{1}{2}$ ; la formule (5) donnera ensuite, en observant que dans ce cas  $A = \frac{1}{2p}$ ,

$$k = \frac{\sqrt{a\pi}}{2^p} \cdot (l + 1 \cdot 3 \cdot a \frac{l'}{2} + 1 \cdot 3 \cdot 5 \frac{a^2 l''}{2^2} + \&c.);$$

On a généralement

$$k = \int x^p \delta x (1 - x)^q = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+q+1)};$$

la supposition de  $p = q$  donne

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2p}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p)^2} = \frac{1}{(2p+1) \cdot k};$$

or le premier membre de cette équation est le terme moyen du binôme  $(1 + 1)^{2p}$ ; on aura donc la valeur de ce terme par une suite très-convergente, lorsque  $p$  est un très-grand nombre. Si l'on compare la manière dont nous y sommes parvenus, avec celles qu'ont employées M.<sup>rs</sup> Stirling & Euler, le premier dans son *Ouvrage De transformation & interpolatione serierum*, & le second dans ses *Institutions de Calcul différentiel*, on trouvera, si je ne me trompe, qu'indépendamment de la généralité, elle a l'avantage d'être plus directe, en ce que les procédés de ces deux illustres Auteurs supposent que l'on connoît d'avance l'expression en facteurs, du rapport de la demi-circonférence au rayon, expression que Wallis a donnée; celui de M. Euler est de plus fondé sur la valeur en série du produit  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p$ , lorsque  $p$  est un grand nombre; cette valeur est encore très-facile à déterminer par notre méthode. Pour cela, soit

$$y = x^p \cdot e^{-x},$$

on aura, en intégrant depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = \infty$ ,

$$\int x^p \cdot dx \cdot e^{-x} = p \cdot \int x^{p-1} \cdot dx \cdot e^{-x};$$

d'où il est aisé de conclure

$$\int x^p \cdot dx \cdot e^{-x} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p.$$

Le *maximum* de  $y$  a lieu lorsque  $x = p$ , ce qui donne

$$p^p \cdot e^{-p} \text{ pour ce maximum; soit donc } p = \frac{1}{a} \text{ \& } x = \frac{1}{a} + \theta,$$

on aura

$$\log y = \log p^p \cdot e^{-p} = \frac{1}{a} \cdot \log (1 + a\theta) - \theta;$$

donc

$$\int y \cdot dx = p^p \cdot e^{-p} \cdot \int d\theta \cdot e^{\frac{1}{a} \log (1 + a\theta) - \theta}.$$

Si l'on fait

$$\log (1 + a\theta) - a\theta = -at^2,$$

on aura

$$\frac{a\theta^2}{2} = \frac{a^2\theta^3}{3} + \frac{a^3\theta^4}{4} + \dots = t^2;$$

soit

$$\theta = \frac{t}{\sqrt{a}} (h + h' \cdot a^{\frac{1}{2}} t + h'' \cdot at^2 + h''' \cdot a^{\frac{3}{2}} t^3 + \dots),$$

on trouvera

$$h = \sqrt{2}, h' = \frac{2}{3}, h'' = \frac{\sqrt{2}}{18}, \dots$$

\& l'on aura

$$d\theta = \frac{dt}{\sqrt{a}} (h + 2h' \cdot a^{\frac{1}{2}} t + 3h'' \cdot at^2 + \dots);$$

donc

$$\int y \cdot dx = p^{p+\frac{1}{2}} e^{-p} \cdot \int dt \cdot (h + 2h' \cdot a^{\frac{1}{2}} t + 3h'' \cdot at^2 + \dots) \cdot e^{-at^2};$$

l'intégrale en  $x$  doit être prise depuis  $x = 0$  jusqu'à

$x = \infty$ ; or  $x$  étant nul, on a  $\theta = -\frac{1}{a}$ , & par conséquent  $t^2 = \infty$ ;  $x$  étant égal à  $\infty$ , on a  $\theta = \infty$ ; partant,  $t^2 = \infty$ ; on doit donc prendre l'intégrale relative à  $\partial t$ , depuis  $t = -\infty$  jusqu'à  $t = \infty$ ; d'où l'on tire par l'article XXIII,

$$\int y \partial x = p^{p+\frac{1}{2}} \cdot e^{-p} \sqrt{\pi} \cdot (h + 1 \cdot 3 \cdot \frac{a^{h+1}}{1} + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{a^{h+3}}{1} + \&c.);$$

partant,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p = p^{p+\frac{1}{2}} e^{-p} \sqrt{2\pi} \cdot (1 + \frac{1}{12} a + \&c.).$$

Nous pourrions appliquer cette méthode à beaucoup d'autres exemples, & par-là étendre & perfectionner la théorie des suites; mais cette digression nous écarteroit trop de notre objet principal.

#### X X V I.

LA méthode précédente donne une solution fort simple d'un Problème intéressant, qu'il seroit peut-être très-difficile de résoudre par d'autres méthodes; on a vu (article XIX), que le rapport des naissances des garçons à celles des filles, est sensiblement plus grand à Londres qu'à Paris; cette différence semble indiquer à Londres une plus grande facilité pour la naissance des garçons, il s'agit de déterminer combien cela est probable.

Pour cela, soit  $u$  la probabilité de la naissance d'un garçon à Paris;  $p$  le nombre des naissances des garçons observées dans cette ville;  $q$  celui des filles;  $u - x$  la possibilité de la naissance d'un garçon à Londres;  $p'$  le nombre de naissances des garçons qu'on y a observées;  $q'$  celui des filles; on aura, pour la probabilité de ce double évènement,

$$H \cdot u^p \cdot (1 - u)^q \cdot (u - x)^{p'} \cdot (1 - u + x)^{q'};$$

$H$  étant un coefficient constant; donc si l'on nomme  $P$  la probabilité que la naissance d'un garçon est moins possible à Londres



Londres qu'à Paris, on aura

$$P = \frac{\iint u^p \cdot (1-u)^q \cdot (u-x)^{p'} \cdot (1-u+x)^{q'} \cdot \partial u \cdot \partial x}{\iint u^p \cdot (1-u)^q \cdot (u-x)^{p'} \cdot (1-u+x)^{q'} \cdot \partial u \cdot \partial x},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis  $u = 0$  jusqu'à  $u = x$ , & depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = 1$ . Celle du dénominateur doit être prise pour toutes les valeurs possibles de  $x$  & de  $u$ ; or si l'on fait  $u - x = s$ , ce dénominateur deviendra

$$\iint u^p \cdot (1-u)^q \cdot s^{p'} \cdot (1-s)^{q'} \cdot \partial u \cdot \partial s;$$

la double intégrale étant prise depuis  $u = 0$  jusqu'à  $u = 1$ , & depuis  $s = 0$  jusqu'à  $s = 1$ ; on aura ainsi

$$P = \frac{\iint u^p \cdot (1-u)^q \cdot (u-x)^{p'} \cdot (1-u+x)^{q'} \cdot \partial u \cdot \partial x}{\iint u^p \cdot (1-u)^q \cdot s^{p'} \cdot (1-s)^{q'} \cdot \partial u \cdot \partial s}.$$

Déterminons d'abord l'intégrale du numérateur.

En nommant  $y$  la quantité

$$u^p \cdot (1-u)^q \cdot (u-x)^{p'} \cdot (1-u+x)^{q'},$$

on aura à très-peu près par la formule  $(\mu)$  de l'article XXIII,

$$\int y \partial u = \frac{\sqrt{(2\pi)} \cdot y^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{[ - (\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}) ]}},$$

en substituant pour  $u$ , dans le second membre de cette équation, la valeur en  $x$ , qui rend  $y$  un *maximum*; soit  $X$  cette valeur, on a

$$(\frac{\partial y}{\partial u}) = y \cdot \left\{ \frac{p}{u} - \frac{q}{1-u} + \frac{p'}{u-x} - \frac{q'}{1-u+x} \right\}$$

&

$$- (\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}) = y \cdot \left\{ \frac{p}{u^2} + \frac{q}{(1-u)^2} + \frac{p'}{(u-x)^2} + \frac{q'}{(1-u+x)^2} \right\} \\ - (\frac{\partial y}{\partial u}) \cdot \left\{ \frac{p}{u} - \frac{q}{1-u} + \frac{p'}{u-x} - \frac{q'}{1-u+x} \right\}$$

Mém. 1778.

Qq

Si l'on substitue  $X$  au lieu de  $u$ , on a par la condition du maximum,  $(\frac{\partial y}{\partial u}) = 0$ . Partant,

$$-(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}) = y \cdot \left\{ \frac{p}{X^2} + \frac{q}{(1-X)^2} + \frac{p'}{(X-s)^2} + \frac{q'}{(1-X+s)^2} \right\}$$

d'où l'on tire

$$\int y \partial u = \frac{\sqrt{(2\pi)} \cdot y}{\sqrt{\left[ \frac{p}{X^2} + \frac{q}{(1-X)^2} + \frac{p'}{(X-s)^2} + \frac{q'}{(1-X+s)^2} \right]}}$$

$X$  étant déterminé par l'équation

$$0 = \frac{p}{X} - \frac{q}{1-X} + \frac{p'}{X-s} - \frac{q'}{1-X+s}; \quad (i)$$

ou

$$0 = X \cdot (1-X) \cdot \left\{ (p+p') \cdot (1-X) - (q+q') \cdot X \right\} \\ + x \cdot \left\{ (p'+q') \cdot X \cdot (1-X) + (1-2X) \cdot [qX - p(1-X)] \right\}; \quad (i') \\ + x^2 \cdot [qX - p(1-X)]$$

soit pour abréger,

$$R = \sqrt{\left[ \frac{p}{X^2} + \frac{q}{(1-X)^2} + \frac{p'}{(X-s)^2} + \frac{q'}{(1-X+s)^2} \right]};$$

la question est réduite à déterminer l'intégrale  $\sqrt{(2\pi)} \cdot \int \frac{y \partial x}{R}$ , depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = 1$ . Au lieu de cette intégrale, on peut considérer celle-ci  $\sqrt{(2\pi)} \cdot \int \frac{y}{R} \cdot (\frac{\partial x}{\partial X}) \cdot \partial X$ ,  $x$  étant regardé comme fonction de  $X$ ; mais il faut prendre cette dernière intégrale depuis la valeur de  $X$ , qui a lieu lorsque  $x = 0$ , jusqu'à celle qui a lieu lorsque  $x = 1$ ; or en faisant  $x = 0$ , l'équation  $(i')$  devient

$$0 = (p+p') \cdot (1-X) - (q+q') \cdot X.$$

Partant, 
$$X = \frac{p+p'}{p+p'+q+q'}.$$

En faisant  $x = 1$ , cette équation donne  $X = 1$ ; on

doit donc prendre l'intégrale  $\int \frac{y}{R} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right) \cdot \partial X$ , depuis

$X = \frac{p+p'}{p+p'+q+q'}$  jusqu'à  $X = 1$ .

Supposons  $\frac{y}{R} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right) = y'$ ; la condition du *maximum* de  $y'$  donne l'équation

$$0 = \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial \left[ \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right) \right]}{\frac{1}{R} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)};$$

or  $y$  étant égal à  $X^p \cdot (1-X)^q \cdot (X-x)^{p'} \cdot (1-X+x)^{q'}$ ,

on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial y} = & \left\{ \frac{p}{X} - \frac{q}{1-X} + \frac{p'}{X-x} - \frac{q'}{1-X+x} \right\} \cdot \partial X \\ & + \left\{ \frac{q'}{1-X+x} - \frac{p'}{X-x} \right\} \cdot \partial x; \end{aligned}$$

cette équation se réduit en vertu de l'équation (1) à celle-ci,

$$\frac{\partial y}{\partial y} = \frac{q' \partial x}{1-X+x} - \frac{p' \partial x}{X-x} = \left\{ \frac{p}{X} - \frac{q}{1-X} \right\} \cdot \partial x.$$

Maintenant,  $p$  &  $q$  étant de très-grands nombres, il est visible que  $\frac{\partial y}{\partial y}$  est incomparablement plus grand que

$$\frac{\partial \left( \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial x}{\partial X} \right)}{\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial x}{\partial X}}, \text{ \& qu'ainsi on peut négliger la seconde}$$

de ces deux différentielles, par rapport à la première; on aura donc à très-peu près, dans le cas du *maximum* de  $y'$ ,

$$0 = \frac{p}{X} - \frac{q}{1-X}.$$

Partant  $X = \frac{p}{p+q}$ .

Cette valeur de  $X$  est moindre que  $\frac{p+p'}{p+p'+q+q'}$ , lorsque

Qq ij

$\frac{p'}{p' + q'}$  est, comme nous le supposons ici, plus grand que  $\frac{p}{p + q}$ ; les deux limites dans lesquelles il faut prendre l'intégrale  $\int y' \cdot \partial x$ , sont par conséquent au-delà de la valeur de  $X$ , qui rend  $y'$  un *maximum*; ainsi l'on doit, pour déterminer cette intégrale, faire usage de la suite  $(\gamma)$  de l'*art. XVIII*.

On a à très-peu près,

$$\frac{\partial y'}{y'} = \frac{\partial y}{y} = \left\{ -\frac{p}{X} - \frac{q}{1-X} \right\} \cdot \partial x;$$

d'ailleurs, en différenciant l'équation

$$0 = \frac{p}{X} - \frac{q}{1-X} + \frac{p'}{X-s} - \frac{q'}{1-X+s},$$

on trouve

$$\left( \frac{\partial s}{\partial X} \right) = \frac{R^2}{\frac{p'}{(X-s)^2} + \frac{q'}{(1-X+s)^2}};$$

donc

$$\frac{\partial y'}{y'} = \frac{R^2}{\frac{p'}{(X-s)^2} + \frac{q'}{(1-X+s)^2}} \cdot \frac{p - (p+q)X}{X \cdot (1-X)} \cdot \partial X.$$

Soit  $p = \frac{1}{a}$ ,  $q = \frac{\mu}{a}$ ,  $p' = \frac{v}{a}$ ,  $q' = \frac{v'}{a}$ ; la quantité que nous avons nommée  $z$  dans l'*article XVIII*, sera ici

$$\frac{X \cdot (1-X) \cdot \left\{ \frac{v}{(X-s)^2} + \frac{v'}{(1-X+s)^2} \right\}}{\left\{ \frac{1}{X^2} + \frac{\mu}{(1-X)^2} + \frac{v}{(X-s)^2} + \frac{v'}{(1-X+s)^2} \right\} \cdot [1 - (1+\mu) \cdot X]}.$$

$X$  étant la variable principale dont  $x$  est fonction; si l'on observe ensuite que  $X$  étant égal à l'unité, on a  $y' = 0$ , la suite  $(\gamma)$  de l'article cité donnera

$$\int y' \cdot \partial x = -ay'z \cdot \left\{ 1 - a \cdot \frac{\partial z}{\partial X} + a^2 \cdot \frac{\partial \cdot (\partial z)}{\partial X^2} - a^3 \cdot \frac{\partial [z \cdot (\partial z)]}{\partial X^3} + \&c. \right\}$$

en substituant après les différenciations dans le second membre de cette équation,  $\frac{p+p'}{p+p'+q+q'}$  pour  $X$ , & en y faisant  $x=0$ .

Si l'on suppose  $X = \frac{p}{p+q} + \theta$ ,  $\theta$  sera égal à

$$\frac{p+p'}{p+p'+q+q'} - \frac{p}{p+q}, \text{ \& l'on aura}$$

$$Z = \frac{X(1-X) \cdot \left\{ \frac{v}{(X+s)^2} + \frac{v'}{(1-X+s)^2} \right\}}{(1+\mu)\theta \cdot \left\{ \frac{1}{X^2} + \frac{\mu}{(1-X)^2} + \frac{v}{(X-s)^2} + \frac{v'}{(1-X+s)^2} \right\}}$$

or  $\theta$  étant très-petit, les différences successives de  $z$  croissent principalement par la différenciation du facteur  $\theta$  qui se trouve au dénominateur, en sorte que si l'on suppose

$$F = \frac{X \cdot (1-X) \left\{ \frac{v}{(X-s)^2} + \frac{v'}{(1-X+s)^2} \right\}}{(1+\mu) \cdot \left\{ \frac{1}{X^2} + \frac{\mu}{(1-X)^2} + \frac{v}{(X-s)^2} + \frac{v'}{(1-X+s)^2} \right\}}$$

on aura à très-peu près

$$\frac{\partial z}{\partial X} = \frac{F}{\theta^2},$$

$$\frac{\partial \cdot (\partial z)}{\partial X^2} = \frac{3 F^2}{\theta^4}.$$

&c.

Partant,

$$\int y' \cdot \partial x = \frac{y' F}{\theta} \cdot \left\{ 1 - \frac{a F}{\theta^2} + \frac{3 a^2 F^2}{\theta^4} - \&c. \right\},$$

$y'$  &  $F$  étant ce que deviennent ces quantités lorsqu'on y suppose  $x=0$  &  $X = \frac{p+p'}{p+p'+q+q'}$ , ce qui donne

$$y' \cdot F = \frac{(p+p')^{p+p'+\frac{1}{2}} \cdot (q+q')^{q+q'+\frac{1}{2}}}{(1+\mu) \cdot (p+p'+q+q')^{p+p'+q+q'+\frac{1}{2}}}$$

Il est aisé de voir par l'analyse de l'article XVIII, que  $\int y' \cdot \partial x$  est moindre que  $\frac{a y' F}{\theta}$ , plus grand que  $\frac{a y' F}{\theta} (1 - \frac{a F}{\theta^2})$ , & moindre que

$$\frac{a y' F}{\theta} (1 - \frac{a F}{\theta^2} + \frac{\partial a^2 F^2}{\theta^4}),$$

en sorte que l'on a par ce moyen les limites dans lesquelles la valeur de  $\int y' \cdot \partial x$  est resserrée.

Cherchons présentement la valeur de la double intégrale

$$\iint u^p \cdot (1 - u)^q \cdot s^{p'} \cdot (1 - s)^{q'} \cdot \partial u \cdot \partial s.$$

La formule ( $\mu$ ) de l'article XXXIII donne à très-peu près,

$$\int u^p \cdot \partial u \cdot (1 - u)^q = \sqrt{(2\pi)} \cdot \frac{u^{p+1} \cdot (1 - u)^{q+1}}{\sqrt{[p(1 - u)^2 + q u^2]}},$$

en substituant pour  $u$  la valeur qui rend  $u^p \cdot (1 - u)^q$

un *maximum*; or cette valeur est  $\frac{p}{p+q}$ ; on a donc

$$\int u^p \cdot \partial u \cdot (1 - u)^q = \sqrt{(2\pi)} \cdot \frac{p^{p+\frac{1}{2}} \cdot q^{q+\frac{1}{2}}}{(p+q)^{p+q+\frac{1}{2}}}.$$

En changeant  $p$  en  $p'$  &  $q$  en  $q'$ , on aura

$$\int s^{p'} \cdot (1 - s)^{q'} \cdot \partial s = \frac{p'^{p'+\frac{1}{2}} \cdot q'^{q'+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{(2\pi)}}{(p' + q')^{p'+q'+\frac{1}{2}}}.$$

Partant,

$$\iint u^p \cdot (1 - u)^q \cdot s^{p'} \cdot (1 - s)^{q'} \cdot \partial u \cdot \partial s = 2\pi \cdot \frac{p^{p+\frac{1}{2}} \cdot q^{q+\frac{1}{2}} \cdot p'^{p'+\frac{1}{2}} \cdot q'^{q'+\frac{1}{2}}}{(p+q)^{p+q+\frac{1}{2}} \cdot (p'+q')^{p'+q'+\frac{1}{2}}}.$$

Si l'on suppose cette quantité égale à  $k$ , on aura pour la probabilité cherchée  $P$ ,

$$P = \frac{a y' F \cdot \sqrt{(2\pi)}}{\theta \cdot k} \cdot (1 - \frac{a F}{\theta^2} + \frac{3 a^2 F^2}{\theta^4} - \&c.);$$

il ne s'agit plus maintenant que de déterminer les valeurs numériques des différents termes de cette expression, en

partant des données précédentes. Ces données sont

$$\begin{aligned} p &= 251527, & p' &= 737629, \\ q &= 241945, & q' &= 698958; \end{aligned}$$

d'où il est facile de conclure

$$\log. F = \overline{2,9767121},$$

$$\log. \theta = \overline{3,4457598},$$

$$\log. a = \overline{6,5994154}.$$

& par conséquent

$$\frac{aF}{\theta^2} = 0,048374,$$

$$\frac{3a^2F^3}{\theta^6} = 0,007020.$$

On a ensuite, en portant la précision jusqu'à douze décimales,

$$\log. p = 5,400584610947,$$

$$\log. q = 5,383716651469,$$

$$\log. p + q = 5,693262515480;$$

d'où l'on tire

$$\log. \left( \frac{p}{p+q} \right)^p = \overline{73617,6047065},$$

$$\log. \left( \frac{q}{p+q} \right)^q = \overline{74894,9259319}.$$

On a pareillement

$$\log. p' = 5,867837982735,$$

$$\log. q' = 5,844451080009,$$

$$\log. (p' + q') = 6,157331932083;$$

d'où l'on tire

$$\log. \left( \frac{p'}{p'+q'} \right)^{p'} = \overline{213540,8676364},$$

$$\log. \left( \frac{q'}{p'+q'} \right)^{q'} = \overline{218691,4253961}.$$

On trouve encore

$$\log. (p + p') = 5,995264741371,$$

$$\log. (q + q') = 5,973544853243,$$

$$\log. (p + p' + q + q') = 6,285570585161;$$

d'où l'on tire

$$\log. \left( \frac{p + p'}{p + p' + q + q'} \right)^{p + p'} = \overline{287158,2327801},$$

$$\log. \left( \frac{q + q'}{p + p' + q + q'} \right)^{q + q'} = \overline{293586,0527612}.$$

On a enfin

$$\log. (1 + \mu) = 0,2926769,$$

$$\log. 2\pi = 0,7981799.$$

Partant,

$$\log. \frac{ay'F/(2\pi)}{\theta} = \overline{580751,4993272},$$

$$\log. k = \overline{580745,0942543},$$

ce qui donne

$$\frac{ay'F/(2\pi)}{\theta k} = 0,0000025414;$$

donc

$$P = 0,0000025414 \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 - 0,048374 \\ + 0,007020 - \text{\&c.} \end{array} \right\}$$

Si l'on prend les trois premiers termes de la série, on aura

$$P = \frac{1}{410458};$$

cette valeur de  $P$  est un peu trop grande, mais comme en ne prenant que les deux premiers termes de la série, on auroit une valeur trop petite; il est aisé d'en conclure que la précédente ne peut différer de la véritable, de la  $\frac{1}{142}$  partie de sa valeur, en sorte qu'elle est fort approchée; il y a donc plus de quatre cents mille à parier contre un, que les naissances des garçons sont plus faciles à Londres qu'à Paris; ainsi l'on peut regarder comme une chose très-probable, qu'il



qu'il existe dans la première de ces deux villes, une cause de plus que dans la seconde, qui y facilite les naissances des garçons, & qui dépend soit du climat, soit de la nourriture & des mœurs.

## XXVII.

IL est facile d'étendre la théorie des *articles précédens*, au cas de trois, ou d'un plus grand nombre d'événemens simples.

Si l'on nomme en effet  $x$  la possibilité du premier événement simple;  $x'$  celle du second, & par conséquent  $1 - x - x'$  celle du troisième; en cherchant par les méthodes ordinaires, la probabilité de l'événement observé, on aura pour sa valeur une fonction de  $x$ ,  $x'$  &  $1 - x - x'$ , multipliée par une constante quelconque. Soit  $y$  cette fonction; pour que l'événement observé puisse indiquer d'une manière approchée les possibilités des événemens simples, il faut, comme on l'a

observé dans l'*art. XXII*, que  $\frac{(\frac{\partial y}{\partial x})}{y}$ , &  $\frac{(\frac{\partial y}{\partial x'})}{y}$  soient des fonctions de  $x$  très-grandes de l'ordre  $\frac{1}{a}$ ,  $a$  étant un coefficient d'autant moindre que l'événement observé est plus composé; cela posé, si l'on intègre  $\int y \partial x'$ , depuis  $x' = 0$  jusqu'à  $x' = 1 - x$ , on aura pour résultat, une fonction de  $x$ , que la méthode de l'*art. XXIII* donnera par une suite très-convergente. Soit  $u$  la valeur de  $x'$  en  $x$  qui rend  $y$  un *maximum*,  $x$  étant supposé constant; & que l'on représente par  $Y$  ce *maximum*, on aura par l'article cité, pour  $\int y \partial x'$ , une expression de cette forme,

$$\int y \partial x' = Y \cdot V(a\pi) \cdot [h + 1.3 \cdot \frac{a h''}{2} + 1.3.5 \cdot \frac{a^2 h'''}{2^2} + \&c.];$$

$Y$ ,  $h$ ,  $h''$ ,  $h'''$ , &c. étant des fonctions de  $x$ . La valeur de  $x$  qui rend le second membre de cette équation un *maximum*, sera très-approchante de la véritable possibilité du premier événement; soit  $a$  cette valeur, on aura pour l'expression de

Mém. 1778.

Rr

la probabilité  $P$  que  $x$  sera compris dans les limites  $a - \theta$  &  $a + \theta$ ,

$$P = \frac{\int Y dx \cdot [h + 1.3 \cdot \frac{a h''}{2} + 1.3.5 \cdot \frac{a^2 h'''}{2^2} + \&c.]}{\int Y dx \cdot [h + 1.3 \cdot \frac{a h''}{2} + 1.3.5 \cdot \frac{a^2 h'''}{2^2} + \&c.]}$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis  $x = a - \theta$ , jusqu'à  $x = a + \theta$ , & celle du dénominateur étant prise depuis  $x = 0$ , jusqu'à  $x = 1$ ; or on déterminera facilement ces intégrales par la méthode de l'art. XXIII.

La valeur  $a$  se détermine en égalant à zéro la différence de  $Y \cdot (h + 1.3 \cdot \frac{a h''}{2} + \&c.)$ , ce qui donne

$$0 = \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial h + 1.3 \cdot \frac{a \partial h''}{2} + \&c.}{h + 1.3 \cdot \frac{a h''}{2} + \&c.};$$

$\frac{\partial Y}{\partial x}$ , est par la supposition une quantité très-grande de l'ordre  $\frac{1}{a}$ ; en négligeant donc vis-à-vis d'elle la quantité

$$\frac{\partial h + 1.3 \cdot \frac{a \partial h''}{2} + \&c.}{h + 1.3 \cdot \frac{a h''}{2} + \&c.}, \text{ on aura pour déterminer } a,$$

l'équation  $0 = \frac{\partial Y}{\partial x}$ ; or on a  $\frac{\partial Y}{\partial x} = (\frac{\partial y}{\partial x}) + (\frac{\partial y}{\partial x'}) \cdot (\frac{\partial x'}{\partial x})$ , en substituant dans le second membre de cette équation, au lieu de  $x'$  la valeur  $u$  en  $x$ ; mais cette valeur rend nulle la quantité  $(\frac{\partial y}{\partial x'})$ ; on aura donc les deux équations  $(\frac{\partial y}{\partial x}) = 0$ , &  $(\frac{\partial y}{\partial x'}) = 0$ .

Il suit de-là que  $a$  est aux quantités près de l'ordre  $a$ ; la valeur de  $x$  qui rend  $y$  un *maximum*, en faisant varier à la fois  $x$  &  $x'$ ; on peut donc prendre sans erreur sensible,

la valeur de  $x$  correspondante à ce *maximum*, pour la possibilité du premier évènement simple; & il est clair que l'on peut faire des remarques analogues sur les possibilités des deux autres évènements simples.

Supposons, par exemple, qu'il y ait dans une urne, une infinité de boules blanches, rouges & noires, dans une proportion inconnue, & que sur le nombre  $p + q + r$  de tirages, on ait amené  $p$  boules blanches,  $q$  boules rouges, &  $r$  boules noires; en nommant  $x$  la facilité d'amener une boule blanche,  $x'$  celle d'amener une boule rouge, & par conséquent  $1 - x - x'$  celle d'amener une boule noire; on aura pour la probabilité de l'évènement observé

$$a = \frac{1.2.3\dots(p+q+r)}{1.2.3\dots p.1.2.3\dots q.1.2.3\dots r} \cdot x^p \cdot x'^q \cdot (1 - x - x')^r;$$

dans ce cas particulier

$$y = x^p \cdot x'^q \cdot (1 - x - x')^r;$$

$$\frac{1.2.3\dots q.1.2.3\dots r}{1.2.3\dots(q+r+1)} \cdot x^p \cdot (1 - x)^{q+r+1};$$

la valeur de  $x$  qui rend  $\int y dx$  au *maximum*, est  $\frac{p}{p+q+r+1}$ ; cette fraction est conséquemment la valeur la plus probable de  $x$ . Lorsque  $p$ ,  $q$  &  $r$  sont de grands nombres, elle se réduit à très-peu près à celle-ci  $\frac{p}{p+q+r}$ , qui correspond au *maximum* de  $y$ .

#### XXVII.

JUSQU'ICI nous avons supposé la loi de possibilité des évènements simples, constante depuis zéro jusqu'à l'unité, & cette supposition est, comme nous l'avons observé dans l'*art. XVII*, la seule que l'on doive adopter, lorsqu'on n'a aucune donnée relativement à ces possibilités; mais si leur loi étoit exactement connue, on pourroit encore y appliquer les recherches précédentes. Pour cela, ne considérons que deux

Rr ij

316 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

événemens simples, & nommons  $x$  la possibilité du premier, &  $1 - x$  celle du second; on calculera la probabilité de l'événement observé, en partant de ces possibilités, & l'on aura pour son expression, une fonction de  $x$ , que nous désignerons par  $y$ ; si l'on représente ensuite par  $u$  la facilité de la possibilité  $x$  du premier événement,  $u$  étant fonction de  $x$ , & par  $s$  la facilité de la possibilité  $1 - x$  du second événement, on aura par l'art. XV,  $\frac{usy \partial x}{\int usy \partial x}$  pour la probabilité que l'événement observé est dû aux possibilités  $x$  &  $1 - x$ , l'intégrale du dénominateur étant prise depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = 1$ ; donc si l'on nomme  $P$  la probabilité que la valeur de  $x$  est comprise dans des limites données, on aura

$$P = \frac{\int usy \partial x}{\int usy \partial x},$$

pourvu que l'intégrale du numérateur ne soit prise que dans l'étendue de ces limites; on voit ainsi que ce cas rentre dans ceux que nous avons considérés dans les articles précédens, & que la valeur de  $P$  se déterminera facilement par la méthode de ces articles.

La valeur de  $x$  qui rend  $usy$  un *maximum*, sera très-approchante de la véritable, si l'événement observé est très-composé, & si l'on a  $y \partial x = a z \partial y$ ,  $a$  étant un coefficient très-petit; or on a, en égalant à zéro la différentielle de  $usy$ ,

$$0 = \frac{\partial . us}{us} + \frac{\partial y}{y}.$$

Partant,

$$0 = \frac{a \partial . us}{us} + \frac{1}{z}.$$

On aura donc en négligeant les quantités de l'ordre  $a$ ,  $0 = \frac{1}{z}$ ; d'où il suit que la valeur de  $x$  qui rend  $y$  un *maximum*, est à très-peu près la véritable, quelle que soit d'ailleurs la loi de facilité des possibilités des deux événemens simples.

## XXIX.

APRÈS avoir déterminé les possibilités des évènements simples qui résultent d'un évènement composé propre à les faire connoître, il nous reste à considérer l'influence de cet évènement sur la probabilité d'un évènement futur quelconque, & la manière dont on doit calculer cette probabilité. Si l'on nomme  $x$  &  $1 - x$  les possibilités de deux évènements simples,  $s$  la facilité de  $x$ , &  $s'$  celle de  $1 - x$ , on calculera les probabilités tant de l'évènement observé que de l'évènement futur, en partant de ces possibilités, & l'on aura pour résultat deux fonctions de  $x$ , dont nous représenterons la première par  $y$  & la seconde par  $u$ ; cela posé, si l'on nomme  $P$  la probabilité cherchée de l'évènement futur, on aura par les articles XIV & XV,

$$P = \frac{\int s s' u y \partial x}{\int s s' y \partial x},$$

les intégrales du numérateur & du dénominateur étant prises depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = 1$ . Lorsque l'évènement observé sera très-composé, la méthode de l'article XXIII donnera ces intégrales par une approximation très-rapide, ce qui montre l'étendue de cette méthode & son utilité dans ces matières.

Si l'on n'a aucune donnée sur la loi de possibilité des deux évènements simples, ce qui est le cas le plus ordinaire, on doit supposer (article XVII)  $s$  &  $s'$  égaux à l'unité, ce qui donne

$$P = \frac{\int u y \partial x}{\int y \partial x},$$

or on a à très-peu près, par l'article XXIII,

$$(\int y \partial x)^2 = \frac{2\pi \cdot y^3}{\frac{\partial \partial y}{\partial x^2}},$$

$$(\int u y \partial x)^2 = \frac{2\pi \cdot u^2 \cdot y^3}{\frac{\partial \partial \cdot u^2 y^3}{\partial x^2}},$$

$y$  &  $\frac{\partial y}{\partial x^2}$  étant ce que deviennent ces quantités lorsqu'on y substitue pour  $x$  la valeur qui rend  $y$  un *maximum*; &  $u', y'$  &  $\frac{\partial y'}{\partial x^2}$  étant ce que deviennent  $u, y$  &  $\frac{\partial y}{\partial x^2}$  lorsqu'on y substitue pour  $x$  la valeur qui rend  $uy$  un *maximum*; on aura donc

$$P^2 = \frac{x'^2 y'^2}{y^2} \cdot \frac{\frac{\partial y}{\partial x^2}}{\frac{\partial \partial (u' y')}{\partial x^2}}; (a)$$

Supposons que l'évènement futur dont on calcule la probabilité soit très-peu composé; en égalant à zéro la différentielle de  $uy$ , on aura

$$0 = \frac{\partial y}{y \partial x} + \frac{\partial u}{u \partial x};$$

mais on a par la supposition  $\frac{\partial y}{y \partial x} = \frac{1}{\alpha z} = \frac{1}{\alpha} z'$ , en faisant  $\frac{1}{z} = z'$ ; l'équation précédente deviendra ainsi

$$0 = \alpha \frac{\partial u}{u \partial x} + z'.$$

Soit  $\alpha$  la valeur de  $x$  qui rend  $y$  un *maximum*, & par conséquent  $z'$  nul; la valeur de  $x$  qui rend  $uy$  un *maximum*, pourra donc être représentée par  $\alpha + \alpha h$ ,  $h$  étant un coefficient quelconque, & l'on aura

$$y' = y + \alpha h \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\alpha^2 h^2}{1.2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\alpha^3 h^3}{1.2.3} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \&c.$$

$y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ , &c. étant ce que deviennent ces quantités lorsqu'on y fait  $x = \alpha$ ; on a ensuite

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\alpha} \cdot y z',$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y \cdot \left\{ \frac{1}{\alpha^2} \cdot z'^2 + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial z'}{\partial x} \right\}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = y \cdot \left\{ \frac{1}{\alpha^3} \cdot z'^3 + \frac{3}{\alpha^2} \cdot z' \cdot \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} \right\}$$

&c.

La supposition de  $x = a$  donne  $z' = 0$ , & par conséquent

$$\begin{aligned} ah \cdot \frac{\partial y}{\partial x} &= 0, \\ \frac{a^2 h^2}{1.2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{a h^2}{1.2} \cdot y \frac{\partial z'}{\partial x}, \\ \frac{a^3 h^3}{1.2.3} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} &= \frac{a^2 h^3}{1.2.3} \cdot y \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}, \\ &\&c. \end{aligned}$$

on aura donc en négligeant les termes multipliés par  $a$ ,

$$y = y';$$

on a d'ailleurs

$$\frac{\partial^2 \cdot u' y'}{\partial x^2} = u' \frac{\partial^2 y'}{\partial x^2} + \frac{2 \partial u' \partial y'}{\partial x \partial y} + y' \cdot \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2};$$

or il est visible par ce qui précède, que  $\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2}$  est beaucoup plus grand que  $\frac{\partial y'}{\partial x}$  & que  $y'$ , en sorte que l'on peut supposer à très-peu près,

$$\frac{\partial^2 \cdot u' y'}{\partial x^2} = u' \cdot \frac{\partial^2 y'}{\partial x^2},$$

& l'on prouvera comme nous venons de le faire pour  $y'$ , que  $\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2}$  peut être supposé égal à  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ . Partant,  $\frac{\partial^2 \cdot u' y'}{\partial x^2} = u' \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ; la formule (a) deviendra donc

$$P^2 = u'^2;$$

mais si l'on nomme  $v$  ce que devient  $u$ , lorsqu'on y fait  $x = a$ , on aura en négligeant les quantités de l'ordre  $a$ ,  $u' = v$ ; donc

$$P = v;$$

d'où il suit que l'on peut calculer la probabilité  $P$  de l'événement futur, en employant pour  $x$  la valeur qui rend  $y$  un *maximum*.

320 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Ce théorème cesseroit d'être exact, si l'évènement futur dont il s'agit étoit lui-même très-composé; car alors  $\frac{\partial u}{u \partial x}$  seroit très-grand, & la valeur de  $x$  que donne l'équation

$$0 = a \frac{\partial u}{u \partial x} + z',$$

ne pourroit plus être représentée par  $a + a h$ ; on ne pourroit plus d'ailleurs supposer  $\frac{\partial^2(u' y')}{\partial x^2}$  égal à  $u' \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ . Si l'on représente en général par  $u + a^n h$ , la racine de l'équation  $0 = a \frac{\partial u}{u \partial x} + z$ ,  $n$  étant un exposant moindre que l'unité, on aura

$$y' = y + a^n \cdot h, \quad \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^{2n} h^2}{1.2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \&c.$$

& l'on trouvera

$$a^n \cdot h \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{a^{2n} h^2}{1.2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{a^{2n-1} h^2}{1.2} \cdot y \cdot \frac{\partial z'}{\partial x},$$

&c.

Partant,

$$y' = y + \frac{a^{2n-1} h^2}{1.2} \cdot y \cdot \frac{\partial z'}{\partial x} + \&c.$$

Cette valeur de  $y'$  ne se réduit à  $y$ , dans le cas de  $a$  infiniment petit, que lorsque  $2n - 1$  est positif, ce qui suppose  $n > \frac{1}{2}$ , & il est aisé de voir pareillement que ce n'est que dans cette supposition que  $\frac{\partial^2(u' y')}{\partial x^2}$  se réduit à  $\frac{u' \partial^2 y}{\partial x^2}$ ; le théorème précédent ne peut donc avoir lieu que dans le cas où  $2n$  est plus grand que l'unité.

Soit



Soit  $\frac{\partial x}{u \partial x} = \frac{\lambda}{a' - a^2}$ ,  $\lambda$  étant fonction de  $x$ , l'équation

$$0 = \frac{a \partial x}{u \partial x} + z'$$

$$0 = a^{n'-1} \cdot \lambda + z';$$

ce qui donne pour  $x$  une expression de cette forme ;  
 $x = a + a^{n'-1} \cdot h$  ; or la vérité du théorème précédent exige que l'on ait  $n' - 1 > \frac{1}{2}$ , & par conséquent  $1 - n' < \frac{1}{2}$  ; donc afin que ce théorème subsiste, il est nécessaire que l'évènement futur soit assez peu composé relativement à l'évènement observé, pour que  $(\frac{\partial x}{u \partial x})^2$  soit une fonction de  $x$ , très-petite relativement à  $\frac{\partial y}{y \partial x}$ .

Si l'évènement futur est exactement le même que l'évènement observé, en sorte que  $u = y$ , la valeur  $a$  de  $x$  que rend  $y$  un *maximum*, rendra pareillement  $u y$  un *maximum*, en sorte que l'on aura  $y' = y$ , &  $u' = v$  ; on aura ensuite

$$\frac{\partial^2 \cdot u' y'}{\partial x^2} = 2 y \cdot \frac{\partial \partial y}{\partial x^2} + \frac{2 \partial y^2}{\partial x^2} ;$$

mais la substitution de  $a$  pour  $x$  donne  $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ . Partant,

$$\frac{\partial^2 \cdot u' y'}{\partial x^2} = 2 y \cdot \frac{\partial \partial y}{\partial x^2} ;$$

la formule (a) deviendra donc

$$P^2 = \frac{v^2}{2} ;$$

$v$  étant ce que devient  $u$  ou  $y$ , lorsqu'on y fait  $x = a$  ; de-là résulte ce théorème assez remarquable.

*La probabilité d'un évènement futur pareil à celui que l'on a observé, est à cette même probabilité déterminée en employant pour les possibilités des évènements simples, celles qui résultent de l'évènement observé, comme 1 est à  $\sqrt{2}$ .*

Si l'on a observé, par exemple, que sur  $p + q$  enfans,  
 Mém. 1778. Sf

## 322 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

il est né  $p$  garçons &  $q$  filles, & que l'on cherche la probabilité  $P$ , que sur  $p + q$  enfans qui doivent naître, il y aura  $p$  garçons &  $q$  filles, on aura

$$P = \frac{1.2.3\dots(p+q)}{1.2.3\dots p.1.2.3\dots q} \cdot \frac{p^p \cdot q^q}{\sqrt{2} \cdot (p+q)^{p+q}}$$

c'est ce qui résulte pareillement de la formule ( $\omega$ ) de l'art *XVII*.

En général, si l'on cherche la probabilité  $P$  que l'événement observé sera suivi d'un nombre  $n$  d'événemens pareils, on aura  $u = y^n$ , & l'on trouvera

$$P = \frac{v^n}{\sqrt{(n+1)}};$$

$v$  étant ce que devient  $y$ , lorsqu'on y substitue pour  $x$  la valeur  $a$  qui rend  $y$  un *maximum*, & cette équation a également lieu,  $n$  étant fractionnaire; on s'exposeroit donc alors à des erreurs considérables, en employant dans le calcul de la probabilité des événemens futurs, les possibilités des événemens simples qui résultent de l'événement observé; en effet, il est visible que la petite erreur que l'on peut commettre en faisant usage de ces possibilités, s'accumule en raison du nombre des événemens simples qui entrent dans l'événement futur, & doit occasionner une erreur sensible lorsqu'ils y sont en très-grand nombre. Au reste, quel que soit cet événement, on peut en déterminer la probabilité, au moyen de la formule ( $\alpha$ ) qui est toujours vraie à très-peu près, lorsque l'événement observé est très-composé.

X X X.

UN des Problèmes les plus utiles de cette partie de l'analyse des hasards, qui consiste à remonter des événemens aux causes qui les ont produits, est celui de la détermination du milieu qu'il faut choisir entre les résultats de plusieurs observations. J'ai donné dans le tome *VI* des *Mémoires des Savans*



les ordonnées  $y$  de cette courbe seront proportionnelles aux probabilités des abscisses correspondantes  $x$ , & par cette raison nous la nommerons *courbe des probabilités*.

Maintenant, on peut entendre une infinité de choses différentes par le *milieu* ou le *résultat moyen* d'un nombre quelconque d'observations, suivant que l'on assujettit ce résultat à telle ou telle condition. Par exemple, on peut exiger que ce milieu soit tel que la somme des erreurs à craindre en *plus*, soit égale à la somme des erreurs à craindre en *moins*; on peut exiger que la somme des erreurs à craindre en plus, multipliées par leurs probabilités respectives, soit égale à la somme des erreurs à craindre en moins, multipliées par leurs probabilités respectives; on peut encore assujettir ce milieu à être le point où il est le plus probable que doit tomber le véritable instant du phénomène, comme M. Daniel Bernoulli l'a fait dans les Mémoires cités: en général on peut imposer une infinité d'autres conditions semblables, qui donneront chacune un milieu différent; mais elles ne sont pas toutes arbitraires. Il en est une qui tient à la nature du Problème, & qui doit servir à fixer le milieu qu'il faut choisir entre plusieurs observations: cette condition est qu'en fixant à ce point l'instant du phénomène, l'erreur qui en résulte soit un *minimum*; or comme dans la théorie ordinaire des hasards, on évalue l'avantage en faisant une somme des produits de chaque avantage à espérer, multiplié par la probabilité de l'obtenir, de même ici, l'erreur doit s'estimer par la somme des produits de chaque erreur à craindre, multipliée par sa probabilité; le milieu qu'il faut choisir doit donc être tel que la somme de ces produits soit moindre que pour tout autre instant.

Supposons présentement que dans la courbe des probabilités dont l'équation est

$$y = \varphi(x) \cdot \varphi'(p - x) \cdot \&c.$$

la valeur de  $x$  puisse s'étendre depuis  $-f$  jusqu'à  $c - f$ , en sorte que l'intervalle dans lequel  $x$  peut varier soit  $c$ ; si l'on fait  $x = z - f$ , il est visible que  $z$  pourra varier

depuis  $z = 0$  jusqu'à  $z = c$ , & que les probabilités des différentes valeurs de  $z$  seront proportionnelles à  $y$  ou à  $\varphi(z - f) \cdot \varphi'(p - z + f)$  . &c. en sorte qu'on pourra les représenter par  $ky$ ,  $k$  étant un coefficient constant. Soit  $h$  la valeur de  $z$ , que l'on doit prendre pour le véritable instant du phénomène; on aura  $k \int (h - z) \cdot y \partial z$  pour la somme des erreurs à craindre depuis  $z = 0$  jusqu'à  $z = h$ , & multipliées par leur probabilité respective, l'intégrale précédente étant prise pour toute l'étendue de ces limites; on aura ensuite  $k \int' (z - h) \cdot y \partial z$  pour la somme des erreurs à craindre depuis  $z = h$  jusqu'à  $z = c$ , multipliées par leur probabilité, le signe  $\int'$  servant à indiquer que l'intégrale doit être prise pour toute l'étendue de ces dernières limites; on aura donc

$$k \int (h - z) \cdot y \partial z + k \int' (z - h) \cdot y \partial z,$$

pour la somme entière des erreurs à craindre, multipliées par leur probabilité, &  $h$  doit être tel que cette somme soit un *minimum*. Or si l'on fait varier  $h$  de la quantité infiniment petite  $\delta h$ , il est clair que la variation de  $\int (h - z) \cdot y \partial z$  sera  $\delta h \cdot \int y \partial z$ , & que celle de  $\int' (z - h) \cdot y \partial z$  sera  $-\delta h \cdot \int' y \partial z$ ; la variation de la quantité précédente sera donc

$$k \delta h \cdot (\int y \partial z - \int' y \partial z);$$

en égalant cette quantité à zéro par la propriété du *minimum*, on aura

$$\int y \partial z = \int' y \partial z.$$

L'ordonnée correspondante à l'abscisse  $h$  qui détermine le milieu qu'il faut choisir, doit donc diviser en deux parties égales l'aire de la courbe des probabilités, comprise depuis  $z = 0$  jusqu'à  $z = c$ , ce qui donne un moyen très-simple de déterminer ce milieu; & l'on voit qu'il a encore la propriété d'être tel, qu'il est également probable que le véritable instant du phénomène tombe au-dessus ou au-dessous, en sorte qu'on pourroit le nommer *milieu de probabilité*.

## X X X I.

TOUTES les fois que les fonctions  $\varphi(x)$ ,  $\varphi'(x)$ ,  $\varphi''(x)$ , &c. qui expriment les loix de facilité des erreurs des observations, seront connues, la détermination du milieu qu'il faut choisir entre plusieurs observations, sera réduite par l'article précédent, à partager une surface donnée en deux parties égales, ce qui est un Problème de pure analyse; mais ces fonctions étant le plus souvent inconnues, c'est au calcul des probabilités à fournir les moyens de suppléer à cette ignorance; or on a vu dans l'article XIII, que si dans ce cas,  $\pm a$ ,  $\pm a'$ ,  $\pm a''$ , &c. sont les limites des erreurs de la première, de la deuxième, &c. observations, on doit supposer  $\varphi(x) = \frac{1}{2a} \cdot \log. \frac{a}{x}$ ,  $\varphi'(x) = \frac{1}{2a'} \cdot \log. \frac{a'}{x}$ , &c.

Il ne reste plus ainsi dans la recherche du résultat moyen de plusieurs observations, que les difficultés inévitables de l'analyse; mais il faut convenir qu'elles rendent la méthode précédente d'un très-difficile usage: aussi mon objet, en l'exposant, a été plutôt de faire connoître tout ce que l'analyse des hasards peut donner de lumières sur cette matière, que de présenter aux Observateurs une méthode-pratique & d'un usage commode; on pourra cependant l'employer dans des occasions très-déliées, telles que celles du passage de Vénus sur le disque du Soleil, dans lesquelles il est nécessaire d'obtenir la plus grande précision; le moyen le plus simple pour cet objet, est de carrer par parties la courbe des probabilités, & de déterminer ainsi l'ordonnée qui divise la surface en deux parties égales.

## X X X I I.

LA règle ordinaire des milieux arithmétiques, se déduit de cette méthode, en supposant  $a = a' = a'' = \&c. = \infty$ , comme il est facile de s'en assurer; mais nous allons démontrer un théorème beaucoup plus général, en faisant voir que cette règle a lieu toutes les fois 1.<sup>o</sup> que la loi de facilité des

erreurs est la même pour toutes les observations; 2.<sup>o</sup> que les mêmes erreurs, soit en *plus*, soit en *moins*, sont également possibles; 3.<sup>o</sup> qu'elles peuvent être infinies, & que la fonction qui exprime leurs facilités ne décroît d'une quantité finie, que lorsque  $x$  est infini, mais qu'alors elle va toujours en diminuant jusqu'au point de devenir nulle.

Pour cela, soit  $\phi(ax)$  la loi de facilité des erreurs des observations,  $a$  étant une quantité infiniment petite; soit de plus  $q$  la valeur de  $\phi(ax)$ , lorsque  $ax = 0$ , & par conséquent lorsque  $x$  est une quantité finie; il est évident que l'ordonnée de la courbe des probabilités, depuis  $-x = 0$  jusqu'à  $+x = \infty$ , sera

$$y = \phi(ax) \cdot \phi(ap + ax) \cdot \phi(ap^2 + ax) \cdot \&c.$$

En supposant le nombre des observations égal à  $n$ , & en négligeant les quantités de l'ordre  $a^2$ , on aura

$$y = \phi(ax)^n + a[p + p' + p'' \dots + p^{(n-1)}] \cdot \phi(ax)^{n-1} \cdot \frac{\partial \phi(ax)}{\partial ax}.$$

or si l'on prend l'intégrale  $\int a \partial x \cdot \phi(ax)^{n-1} \cdot \frac{\partial \phi(ax)}{\partial ax}$ , depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = \infty$ , & que l'on se rappelle que  $\phi(ax) = q$  lorsque  $x = 0$ , & que  $\phi(ax) = 0$  lorsque  $x = \infty$ , on aura

$$\int a \partial x \cdot \phi(ax)^{n-1} \cdot \frac{\partial \phi(ax)}{\partial ax} = - \frac{1}{n} q^n;$$

soit donc  $A$  l'intégrale  $\int \partial x \cdot \phi(ax)^n$ , prise depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = \infty$ , & l'on aura

$$A = \frac{1}{n} \cdot [p + p' + p'' \dots + p^{(n-1)}] q^n,$$

pour l'intégrale  $\int y \partial x$  correspondante aux valeurs négatives de  $x$ .

Cette même intégrale prise depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = p^{(n-1)}$ , est  $p^{(n-1)} \cdot q^n$ , parce que l'on peut dans cet

intervalle supposer  $\varphi(ax) = \varphi(ap - ax) = \&c. = q$ ;  
par conséquent l'ordonnée  $y = q^n$ .

Depuis  $x = p^{(n-1)}$  jusqu'à  $x = \infty$ , on a

$$y = \varphi(ax) \cdot \varphi(ax - ap) \cdot \varphi(ax - ap^2) \cdot \&c.$$

ou

$$y = \varphi(ax)^n - a[p + p' + p'' \dots + p^{(n-1)}] \cdot \varphi(ax)^{n-1} \cdot \frac{\partial \cdot \varphi(ax)}{\partial \cdot ax};$$

or l'intégrale  $\int a \partial x \cdot \varphi(ax)^{n-1} \cdot \frac{\partial \cdot \varphi(ax)}{\partial \cdot ax}$ , prise depuis

$x = p^{(n-1)}$  jusqu'à  $x = \infty$ , est  $-\frac{1}{n} \cdot q^n$ ; de plus

l'intégrale  $\int \partial x \cdot \varphi(ax)^n$ , prise dans le même intervalle, est évidemment égale à  $A - p^{(n-1)} \cdot q^n$ ; on aura donc

$$A - p^{(n-1)} \cdot q^n + \frac{1}{n} \cdot [p + p' \dots + p^{(n-1)}],$$

pour la valeur de  $\int y \partial x$ , prise dans cet intervalle. Partant l'aire entière de la courbe des probabilités, est égale à  $2A$ ; or en nommant  $h$  l'abscisse dont l'ordonnée divise cette aire en deux parties égales; la partie de l'aire qui est à gauche de cette ordonnée, sera visiblement égale à

$$A - \frac{1}{n} \cdot [p + p' + p'' \dots + p^{(n-1)}] \cdot q^n + h q^n;$$

en l'égalant à  $A$ , on aura

$$h = \frac{1}{n} \cdot [p + p' + p'' \dots + p^{(n-1)}];$$

ce qui donne pour  $h$  la même valeur que la règle des milieux arithmétiques. Les suppositions qui nous ont conduit à ce résultat, étant hors de toute vraisemblance, on voit combien il est nécessaire dans les occasions délicates, de faire usage de la méthode que nous avons proposée.



## XXXIII.

IL est facile d'appliquer la théorie précédente à la correction des instrumens ; pour cela , supposons qu'en vérifiant un instrument , & en répétant un grand nombre de fois la même vérification , on ait trouvé  $n$  différentes erreurs  $p, p', p'',$  &c. Soient  $i, i', i'',$  &c. les nombres de fois que chacune d'elle a été répétée ; en représentant par  $x, x', x'',$  &c. leurs facilités respectives , on aura  $k \cdot x^i \cdot x'^{i'} \cdot x''^{i''},$  &c. pour la probabilité de l'évènement observé ,  $k$  étant un coefficient constant ; la probabilité de ce Système de facilités sera donc

$$\frac{x^i \cdot x'^{i'} \cdot x''^{i''} \cdot \&c. \partial x \cdot \partial x' \cdot \partial x'' \cdot \&c.}{\int^n [x^i \cdot x'^{i'} \cdot x''^{i''} \cdot \&c. \partial x \cdot \partial x' \cdot \partial x'' \cdot \&c.]}$$

les intégrales du dénominateur étant prises pour toutes les valeurs possibles de  $x, x', x'',$  &c. Pour en conclure la probabilité de  $x$ , on intégrera la fonction  $x^i \cdot x'^{i'} \cdot x''^{i''} \cdot \&c. \partial x \cdot \partial x' \cdot \partial x'' \cdot \&c.$  d'abord par rapport à  $x'$ , depuis  $x' = 0$ , jusqu'à  $x' = 1 - x - x'' - \&c.$  ensuite par rapport à  $x''$ , depuis  $x'' = 0$  jusqu'à  $x'' = 1 - x - x''' - \&c.$  & ainsi de suite, ce qui donne pour dernière intégrale,

$$\frac{1.2.3 \dots i' . 1.2.3 \dots i'' . 1.2.3 \dots i''' \cdot \&c.}{1.2.3.4 \dots (i' + i'' + i''' + \&c.)} \cdot x^i \cdot \partial x \cdot (1 - x)^{i' + i'' + i''' + \&c. + n - 1};$$

on aura donc pour la probabilité que la facilité  $x$  sera comprise dans des limites données,

$$\frac{\int x^i \cdot \partial x \cdot (1 - x)^{i' + i'' + i''' + \&c. + n - 1}}{\int x^i \cdot \partial x \cdot (1 - x)^{i' + i'' + i''' + \&c. + n - 1}};$$

l'intégrale du numérateur étant prise dans l'étendue de ces limites, & celle du dénominateur étant prise depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = 1$  ; or cette probabilité se déterminera par la formule de l'art. XVIII, en y changeant  $p$  en  $i$ , &  $q$  en  $i' + i'' + \&c. + n - 1$ .

Mém. 1778.

Tt

330 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Examinons présentement la correction qu'il faut faire à une nouvelle observation faite avec cet instrument : supposons qu'il soit un quart de cercle, & qu'en prenant un grand nombre de fois une même hauteur apparente  $a$ , on ait trouvé entre cette hauteur & la hauteur réelle,  $n$  différences qui s'étendent depuis  $a - a$  jusqu'à  $a + a'$ . Supposons de plus, qu'en partageant l'intervalle  $a + a'$  en  $n - 1$  parties très-petites, on ait trouvé que l'erreur  $-a$  a été répétée  $i$  fois; que l'erreur  $-a + \frac{a + a'}{n - 1}$  a été répétée  $i'$  fois; que l'erreur  $-a + \frac{2(a + a')}{n - 1}$  a été répétée  $i''$  fois, & ainsi de suite; soient enfin  $x, x', x'',$  &c. les facilités de ces erreurs; on aura par l'*art. XIV*,

$$\frac{\int^n . x^{i+1} . x'^{i'} . x''^{i''} . \&c. \partial x . \partial x' . \partial x'' . \&c.}{\int^n . x^i . x'^{i'} . x''^{i''} . \&c. \partial x . \partial x' . \partial x'' . \&c.},$$

pour la probabilité que l'erreur d'une nouvelle hauteur  $a$ , observée avec ce quart de cercle, sera  $-a$ , les intégrales du numérateur & du dénominateur étant prises pour toutes les valeurs possibles de  $x, x', x'',$  &c. ce qui revient à intégrer l'un & l'autre, d'abord par rapport à  $x$  depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = 1 - x' - x'' - \&c.$  ensuite par rapport à  $x'$ , depuis  $x' = 0$  jusqu'à  $x' = 1 - x'' - \&c.$  & ainsi du reste. On trouvera de cette manière, que la frac-

tion précédente se réduit à  $\frac{i + 1}{i + i' + i'' + \&c. n + 1}$ ; cette quantité exprime donc la probabilité que l'erreur de l'observation sera  $-a$ ; en y changeant  $i$  successivement en  $i', i'',$  &c. & réciproquement, on aura les probabilités que l'erreur de l'observation sera  $-a + \frac{a + a'}{n - 1}$  ou  $-a + \frac{2(a + a')}{n - 1}$ , &c. On concevra donc élevées sur les extrémités & sur chacune des divisions de l'intervalle  $a + a'$ , des ordonnées égales ou proportionnelles à ces

probabilités, & dont les extrémités, à cause de la petitesse des divisions, formeront sensiblement une ligne courbe; cela posé, l'abscisse dont l'ordonnée partagera l'aire de cette courbe en deux parties égales, sera par l'article XXXIX, celle dont il faut faire usage, en sorte que si l'on nomme  $h$  cette abscisse comptée depuis l'origine de l'intervalle  $a + a'$ , qui répond à l'erreur  $-a$ , la correction qu'il faudra faire à la hauteur observée  $a$  sera  $h - a$ , & par conséquent, il faudra supposer la hauteur réelle égale à  $a + h - a$ .

De-là résulte cette règle fort simple pour corriger l'instrument. *Ajoutez continuellement les quantités  $i + i' + 2$ ,  $i' + i'' + 2$ ,  $i'' + i''' + 2$ , &c. jusqu'à ce que vous soyez parvenu à une somme égale, ou immédiatement plus petite d'une quantité quelconque  $\mu$  que la moitié de la somme  $i + 2i' + 2i'' + \dots + 2i^{(n-2)} + i^{(n-1)} + 2n - 2$ . Soit  $r$  le nombre des quantités  $i + i' + 2$ ,  $i' + i'' + 2$ , &c. que vous aurez ainsi ajoutées;  $l$  le nombre des parties  $\frac{a + a'}{n - 1}$ , contenues dans  $a$ ; la correction qu'il faut faire à la hauteur  $a$ , ou ce qui revient au même, la quantité qu'il faut lui ajouter sera à très-peu près,*

$$\left( r - 1 + \frac{\mu}{i^{(r)} + i^{(r+1)} + 2} \right) \cdot \frac{a + a'}{n - 1}.$$

Si au lieu de fixer la véritable hauteur au point de l'abscisse, dont l'ordonnée divise l'aire de la courbe en deux parties égales, on la fixoit au point dont l'ordonnée passe par le centre de gravité de cette aire, on auroit la même correction que donne la méthode des milieux arithmétiques: cette méthode revient donc dans ce cas à prendre pour milieu le point où la somme des erreurs en moins, multipliées par leur probabilité, est égale à la somme des erreurs en plus, multipliées par leur probabilité.

Lorsqu'une fois on connoît la loi de facilité des erreurs d'un instrument, on peut en conclure celle des erreurs d'un résultat quelconque déduit d'observations faites avec cet

instrument, tel que le midi conclu par deux hauteurs correspondantes. En effet, si l'on nomme  $z, z', z'',$  &c. les erreurs des observations, que nous supposons ici très-petites; la correction qu'il faudra faire au résultat, sera  $Az + A'z' + A''z'' + \&c.$   $A, A', A'',$  &c. étant des coefficients constans, dépendans de la nature du résultat que l'on déduit des observations. Si l'on suppose cette correction égale à  $x$ , on aura

$$A \cdot z + A' \cdot z' + A'' \cdot z'' + \&c. = x.$$

Il ne s'agira plus ensuite que de déterminer par la méthode de l'article VII, la probabilité de cette équation, au moyen de la loi de facilité des erreurs  $z, z', z''$ ; on aura ainsi pour cette probabilité une fonction de  $x$ , que nous désignerons par  $\phi(x)$ ; en sorte que l'équation de la courbe des probabilités des valeurs de  $x$ , sera  $y = \phi(x)$ . Maintenant si l'on prend l'intégrale  $\int y \, dx$  pour toute l'étendue des limites dans lesquelles  $x$  peut varier, l'abscisse  $h$  qui divisera en deux parties égales la surface que représente cette intégrale, sera la correction qu'il faudra faire au résultat proposé.



## SECONDE MÉMOIRE

SUR

L'ACTION COMPARÉE DE L'ACIDE NITREUX

ET DE L'ACIDE MARIN

*Sur les Sels vitrioliques à base terreuse.*

Par M. CORNET.

J'AI déterminé, dans le premier Mémoire que j'ai eu l'honneur de lire à l'Académie en 1774, l'action de l'acide marin sur les différens sels neutres vitrioliques & nitreux à base d'alkali fixe & volatil; j'ai démontré que tous ces sels étoient décomposés par cet acide, pourvu toutefois que l'on employât, pour opérer cette décomposition, de l'acide marin dans le plus grand état de concentration. Il me restoit encore à faire connoître l'action comparée des deux acides nitreux & marin sur les autres sels neutres à base terreuse & à base métallique; mais, comme l'examen de ces diverses substances salines exigeoit que j'entraissasse dans des détails trop étendus, & qui auroient passé les bornes d'un Mémoire, j'ai cru, pour mettre plus d'ordre dans ce travail, devoir me borner à traiter aujourd'hui des sels vitrioliques à base terreuse, me réservant de donner, dans un autre temps, un troisième Mémoire sur ceux à base métallique.

Quoique je n'aie pu retirer de la plupart des expériences que j'ai faites sur ces différens sels, des inductions aussi certaines que sur ceux à base d'alkali fixe & volatil, j'ai pensé cependant que ce travail, considéré d'une certaine manière, pourroit devenir utile, & pourroit répandre quelque jour sur différens points de Chimie & d'Histoire naturelle: M. Baumé paroît être jusqu'ici le seul Chimiste qui se soit occupé de cet objet. L'examen qu'il a fait des acides nitreux &

Lû  
à l'Académie  
le 23 Déc.  
1778.

marin sur le gypse ne lui a rien fourni de particulier ; mais il s'est assuré que ce sel n'étoit point décomposé par aucuns des acides minéraux, & il est résulté de ces expériences que plus l'eau étoit imprégnée d'acide, & plus ce sel acquéroit de solubilité, au point qu'il est parvenu à dissoudre par ce moyen, dans huit onces d'eau bouillante chargée de deux gros d'acide nitreux, quarante-huit grains de gypse, mais qui n'avoit souffert aucune altération. On peut consulter sur cela le premier volume de la Chimie, page 201.

Comme M. Baumé n'a employé sur le gypse que des acides affoiblis, j'ai cru devoir répéter ces expériences dans l'espérance qu'en opérant sur ce sel à base terreuse, ainsi que je l'avois déjà fait sur ceux à base d'alkali fixe & volatil, c'est-à-dire en employant des acides plus concentrés, je pourrois obtenir des résultats un peu différens ; mais le succès n'a pas répondu à mon attente, & je me suis convaincu, ainsi qu'on le verra par les expériences suivantes, que ce sel terreux, traité de toutes les manières avec les acides, n'y souffroit aucune altération, ce qu'avoit déjà remarqué M. Baumé.

*Acide nitreux & Gypse.*

SUR un gros de gypse bien pur & réduit en poudre, j'ai versé une once de bon acide nitreux : ce mélange n'a produit aucun froid sensible ; il ne s'est fait aucune effervescence ; cet acide, qui étoit clair & sans couleur, digéré pendant quelque temps à une chaleur douce sur le gypse, ne s'étoit point coloré ; j'ai fait bouillir ce mélange sans aucune addition d'eau ; il ne s'est presque point dissout de gypse, puisque l'alkali fixe versé sur cet acide, n'occasionna à peine qu'un petit nuage laiteux ; j'ajoutai à ce mélange une once d'eau distillée que je fis bouillir également ; je m'aperçus que, malgré cette petite quantité d'eau, le gypse se dissolvoit très-bien, puisque je parvins à le dissoudre complètement, en ajoutant encore une demi-once : cette dissolution resta claire & limpide tant qu'elle fut bouillante ; mais, lorsqu'elle

commença à se refroidir , presque tout ce sel se précipita en petits cristaux foyeux & si volumineux , que toute cette matière ne formoit plus qu'une sorte de gelée. Ce *magma*, exposé de nouveau à une douce chaleur, se liquéfia très-promptement , & je parvins, par l'addition d'une nouvelle once d'eau , à former une dissolution claire & limpide, & qui resta telle par le retroidissement. C'étoit donc un gros de gypse qui étoit tenu en dissolution dans deux onces & demie d'eau distillée à la faveur d'une once d'acide nitreux : j'exposai cette liqueur à l'évaporation insensible dans une capsule couverte seulement d'un papier. Pendant le premier mois , cette liqueur resta claire & ne laissa rien précipiter ; mais il parut ensuite à la surface plusieurs petits cristaux très-remarquables par leur configuration : la plupart étoient disposés en longues aiguilles isolées qui étoient au fond de la liqueur , mais le plus grand nombre formoit des points qui étoient environnés circulairement de longues aiguilles pareilles aux premières , & ces aiguilles y aboutissoient comme à un centre , en sorte que cela représentoit autant de petits corps arrondis, desquels partoient une infinité de rayons qui se divergeoient en différens sens ; la plupart de ces aiguilles étoient très-aiguës , mais beaucoup étoient taillées en biseau. Ces cristaux étoient absolument semblables à ceux qu'a obtenus M. Macquer , de la dissolution de la craie par l'acide nitreux , dont on en trouvera la description dans le Mémoire de ce savant Chimiste , sur la dissolution des sels par l'esprit-de-vin, dans le Journal de Physique du mois de Février 1771. Ce sel, ainsi cristallisé, ayant été égoutté sur le papier gris, avoit perdu son acidité & étoit de vraie sélénite qui n'avoit été nullement altérée par l'acide nitreux.

La même expérience, répétée avec l'acide marin fumant, m'a fourni les mêmes résultats qu'avec l'acide nitreux , à la seule différence près qu'il m'a fallu une plus grande quantité d'eau pour tenir un gros de gypse en dissolution : les cristaux que j'ai obtenus n'étoient pas aussi formés de même ; ils étoient tous disposés en longues aiguilles qui s'entre-croisoient ;

mais, de quelque manière que je m'y sois pris, je n'ai pu m'en procurer comme ceux formés par l'acide nitreux, ce qui prouve cependant que l'acide nitreux coopère de son côté à l'arrangement que prennent les molécules salines entr'elles: la sténite, dans ces deux cas, n'avoit perdu aucune de ses propriétés.

L'alun, examiné de même avec les acides, n'a pas été décomposé: j'ai versé sur deux gros de ce sel en cristaux une once d'acide nitreux très-pur; il s'est excité, dans l'instant du mélange, assez de froid pour faire descendre le thermomètre de cinq degrés, la température étant à dix au-dessus de la glace; ce sel s'est dissout très-facilement & sans aucune addition d'eau dans cet acide; la dissolution étoit claire, sans couleur & n'avoit nulle autre odeur que celle de l'acide nitreux; soumise à l'évaporation, j'en ai retiré, par le refroidissement, de petits cristaux octaèdres qui étoient de véritable alun.

J'ai répété cette expérience d'une autre manière: j'ai mis dans une cornue de verre une once d'acide nitreux fumant sur deux gros d'alun en poudre; j'ai retiré, par la distillation, environ la moitié de l'acide que j'avois employé, & j'ai obtenu, par le refroidissement de la liqueur qui étoit restée dans la cornue, l'alun sans qu'il ait souffert aucune altération.

La même expérience répétée avec l'acide marin fumant n'a pas eu plus de succès: le froid qui s'est passé à l'instant du mélange n'a pas été plus intense, & la dissolution de ce sel s'étoit également faite sans addition d'eau; ce qu'il y a eu de plus remarquable, c'est que les vapeurs de cet acide qui étoit très-fumant, ont été absorbées sur le champ par l'alun & n'étoient plus sensibles; la dissolution étoit très-claire, mais un peu jaune; soumise à l'évaporation, comme la précédente, j'en ai tiré de vrais cristaux d'alun.

Cette dernière expérience paroît être entièrement contradictoire avec celle de M. Priestley: ce célèbre Physicien, dans son premier volume d'Expériences & d'Observations sur l'air, avance que l'alun & le gypse sont décomposés par l'air  
acide



acide marin ; que cet air s'empare de la terre de ces sels, & qu'il en résulte des composés qui ont l'acide marin pour base. On peut consulter sur cet objet les pages 200 & suivantes.

J'ai répété les expériences de M. Priestley dans un bain de mercure, ainsi qu'il l'a fait : ces deux sels ont été effectivement réduits en poudre par le contact de cet air acide, comme je l'ai obtenu avec l'acide marin fumant, mais ils n'ont point été décomposés ; j'ai retiré de la dissolution de ces sels dans l'eau de très-beaux cristaux d'alun & de gypse, ce qui ne seroit point arrivé si effectivement ils eussent été décomposés par l'acide marin.

Il résulte évidemment des expériences que je viens de rapporter, que l'acide vitriolique, lorsqu'il est combiné avec des terres quelconques, adhère à ces dernières d'une manière plus intime qu'avec les substances alkales : il paroît vraisemblable que ce qui détermine cette connexion plus forte, dépend de la manière d'être ; que cet acide, dans l'alun & dans le gypse, se trouvant seulement uni par le *latus* terreux, sans le concours du phlogistique, forme des composés plus simples & qui présentent plus d'obstacles que les autres sels pour leurs décompositions. Le sentiment que j'adopte pour expliquer ce phénomène ne me paroît pas exempt de toute objection : je m'attends même que l'on me dira, *mais si l'acide vitriolique, combiné avec des substances terreuses, contracte avec elles une adhérence si forte, pourquoi cependant cette cohésion se trouve-t-elle rompue lorsqu'on y présente un alkali quelconque ?* Je répondrai à cela que la cause de la décomposition de ces sels par les alkalis, ne peut être attribuée qu'au phlogistique qu'ils contiennent, & que c'est peut-être de cette plus ou moins grande quantité de phlogistique, d'où dépend la différence qui se trouve entre les alkalis & les terres calcaires. Mais ne serois-je pas aussi autorisé à demander pourquoi tous les sels formés par l'union de l'acide vitriolique avec des substances alkales quelconques, sont-ils décomposés par tous les sels à base terreuse, soit nitreux ou marins, tandis qu'il est généralement reçu que l'acide vitriolique a plus d'affinité

avec les substances alkales qu'avec les terres? C'est ce qui se trouve entièrement opposé aux expériences dont je vais rendre compte.

J'ai fait dissoudre dans deux matras, une demi-once de tartre vitriolé, & autant de sel de Glauber; j'ai versé sur chaque dissolution une once d'huile de chaux ou de sel marin à base terreuse; ces deux dissolutions se sont troublées, & il s'est fait un précipité assez considérable; une portion de cette matière précipitée s'étoit attachée en forme de cristaux aux parois du matras; j'ai filtré la liqueur à travers un filtre de papier gris, la matière restée sur le filtre étoit une masse remplie de petits cristaux soyeux & argentins qui se dissolvoient dans l'eau bouillante, & qui avoient toutes les propriétés d'une vraie sélénite, ce que j'ai reconnu par l'examen que j'en ai fait; la liqueur soumise à l'évaporation me fournit encore de nouvelles preuves de l'existence de la sélénite, puisque j'obtins d'une part du sel marin ordinaire, & de l'autre du sel fébrifuge de Sylvius.

La même expérience, répétée avec le nitre à base terreuse, m'a fourni le même résultat: le tartre vitriolé & le sel de Glauber ont été également décomposés, & j'ai obtenu, par le mélange de ces substances, de la sélénite, du nitre & du nitre quadrangulaire.

J'ai cru devoir m'assurer aussi si le nitre & le sel marin à base de terre magnésienne décomposeroient également le tartre vitriolé & le sel de Glauber: la décomposition de ces deux sels s'est faite très-promptement, mais la liqueur ne s'est point troublée, & il ne s'est fait aucun précipité comme aux expériences précédentes; ce qui ne m'a point surpris, parce que le sel qui résulte de la combinaison de cette terre magnésienne avec l'acide vitriolique, est infiniment plus soluble dans l'eau que celui qui provient de la combinaison du même acide avec la terre calcaire.

Quoique la terre magnésienne ait un caractère particulier, & qui la distingue essentiellement de la terre calcaire, je crois néanmoins pouvoir conjecturer qu'il y a entre ces deux

terres une analogie qui en démontre en quelque sorte l'identité ; & je pense que ce qui détermine cette différence ne me paroît dépendre que de ce que la terre magnésienne se rapproche davantage de l'état salin que la terre calcaire. Au reste, je me propose de faire sur cette terre un travail dont je ferai part dans le temps à l'Académie.

Il me restoit encore une expérience à faire , c'étoit d'examiner si le même sel vitriolique à base de terre magnésienne, qui se trouve si généralement répandu , seroit également décomposé par le nitre ou le sel marin à base terreuse ; je versai , pour cet effet, sur une dissolution de mon sel magnésien du sel marin à base terreuse ; la liqueur aussitôt devint blanche & laiteuse , & il se fit quelque temps après , un précipité très-abondant que je reconnus pour être de la sélénite , ce qui me prouva que ce sel magnésien étoit soumis à la même loi que ceux qui sont combinés avec les alkalis.

Ces expériences, qui paroissent faire autant d'exceptions à la table d'affinité, en démontrant que l'acide vitriolique cherche plutôt à se combiner avec les terres qu'avec les alkalis, prouvent aussi la puissance qu'ont les acides nitreux & marins sur ces dernières substances, & expliquent clairement pourquoi les sels vitrioliques à base terreuse décomposent si difficilement le nitre & le sel marin.

Plusieurs Chimistes avoient déjà fait ces expériences. M. Margraff, dans l'examen qu'il a fait du sel admirable, *page 383* du second volume de ses Opuscules \*, dit que la dissolution du sel de Glauber & du tartre vitriolé précipite les dissolutions de terre calcaire faites par l'acide nitreux ou l'acide marin ; mais il n'entre point dans un plus grand détail & ne cherche pas à en expliquer la cause.

M. Pott, dans sa Dissertation sur le sel commun, second volume de sa traduction Française, *page 194*, dit que le sel marin à base terreuse est précipité par l'huile de tartre en une masse presque gélatineuse, & que l'huile de vitriol procure la même coagulation. On seroit porté à croire qu'il regardoit ce précipité comme purement terreux, si à la *page 205* de

\* Traduction française.

cette même Dissertation, il ne remarquoit pas que le sel marin à base terreuse est décomposé par le vitriol ou l'alun, & que dans tous ces cas, l'acide vitriolique enlève à l'esprit de sel la terre calcaire, & que l'acide marin s'évapore. Son Traducteur ajoute dans ses remarques, qu'il en résulte un sel séléniteux; mais on voit que M. Pott n'a point employé, pour faire ces expériences, de l'acide vitriolique combiné avec une base alkaline.

Stahl, dans son *Traité des Sels*, *page 339*, avance aussi la même chose, mais sans donner plus d'explication.

Plusieurs Chimistes indiquent ce moyen pour reconnoître l'acide vitriolique par-tout où il peut être engagé, en y ajoutant du sel marin à base terreuse.

M. le Roi, de la Société royale des Sciences de Montpellier, dans un Ouvrage latin que cet habile Médecin a fait, sur la manière d'analyser les Eaux minérales, prescrit également cette méthode, mais il paroît aussi que la plupart des Auteurs qui en ont parlé, n'ont pas cherché beaucoup à éclaircir ce fait, puisqu'ils ne font aucune mention de la nature du précipité qui en résulte: Boulduc paroît être celui qui a donné le plus d'étendue à ces expériences: On trouve dans le Volume de l'Académie des Sciences pour l'année 1729, dans son Analyse de l'eau minérale de Bourbon-l'Archambault, *page 266*, que l'unique moyen qui lui a servi avec succès pour découvrir l'acide vitriolique engagé dans quelque base, avoit été l'huile de chaux; que pour lors cet acide quitte sa base & se transporte sur la chaux, avec laquelle il fait une espèce de cristallisation, que ni l'eau commune ni les acides ne pouvoient dissoudre; mais il dit d'une manière beaucoup plus positive encore dans son Analyse des eaux de Forges, insérée dans le Volume de l'Académie pour l'année 1735, *page 450*, que quand on verse de l'huile de chaux sur une dissolution de sel de Glauber, l'acide vitriolique de ce sel quitte sa base, s'unit avec la chaux contenue dans l'huile & forme de la sélénite. Ayant continué l'évaporation, & même ayant fait dessécher la matière, il remarque

qu'il a toujours obtenu de la sélénite. J'ai cru devoir rapporter tous ces faits, afin d'éclaircir un point de doctrine qui est encore ignoré de beaucoup de Chimistes, puisque plusieurs ont regardé ce précipité comme purement terreux, & afin de rendre à Boulduc l'antériorité d'une découverte qui lui appartient, & dont cependant aucuns Chimistes n'ont fait mention. On peut déduire, ce me semble, des expériences que je viens de rapporter, que l'acide marin est de tous les acides minéraux celui qui a le plus de disposition à s'unir avec les bases alkalines, puisque le sel marin à base terreuse décompose également le nitre, comme le tartre vitriolé, en s'emparant de leur base, au lieu que le nitre à base terreuse ne décompose pas le sel marin; ce qui prouve que ces deux acides, vitriolique & nitreux, tendent toujours de préférence à se combiner avec les terres, à former des composés plus simples, & à se rapprocher par-là des vœux de la Nature: de-là doivent naître sans cesse des variations considérables dans le produit des corps qu'on soumet à l'analyse, occasionné par la réaction des différentes substances qui les composent; aussi arrive-t-il souvent que dans de certains mélanges on obtient des résultats tout-à-fait opposés & contraires à ceux qu'on avoit droit d'espérer: telle est, par exemple, la sélénite que l'on forme par l'union du sel de Glauber & du sel marin à base terreuse, & telle est aussi celle que l'on retire en plus ou moins grande quantité de l'analyse d'une eau minérale, & dont le produit est susceptible de varier selon la rapidité plus ou moins grande de l'évaporation; c'est ce que j'aurai occasion de faire voir à la fin de ce Mémoire. Mais cette sélénite que l'on forme ainsi en petite quantité par l'art, en unissant le sel marin à base terreuse avec le tartre vitriolé ou le sel de Glauber, la Nature paroît tous les jours employer ce même moyen pour la former plus en grand: la mer, ce laboratoire immense, renferme dans son sein les matériaux propres à la former; c'est par son mouvement & le balancement continuel de ses eaux que doivent s'opérer sans cesse ces doubles décompositions: tout concourt à le prouver;

les différentes analyses de l'eau de la mer le démontrent. M. Gaubius, dans ses *Adversaria*, rapporte qu'il a retiré, par l'analyse de l'eau de la mer Méditerranée, beaucoup de sélénite, de sel de Glauber & de sel marin à base terreuse; & les autres Chimistes qui ont eu occasion de l'analyser, y reconnoissent tous les mêmes produits. J'ai été à portée de voir évaporer souvent de l'eau salée dans les salines de Salins en Franche-comté : à peine cette liqueur commence-t-elle à s'échauffer qu'elle se trouble; le précipité qui se forme, appelé *schlot*, ne démontre-t-il pas encore ce que je viens d'avancer? la double décomposition des sels qu'elle tenoit en dissolution, puisque l'on retire, par l'examen de cette substance, de la sélénite en très-grande quantité qui se trouve mêlée de sel de Glauber & de sel marin à base terreuse: mais si le sel de Glauber ne contribuoit pas lui-même à la formation de cette sélénite contenue dans le *schlot*, quelle raison donneroit-on de sa présence dans cette matière? car il doit paroître bien singulier que le sel de Glauber qui, comme l'on fait, est si soluble dans l'eau, puisse se précipiter avec le *schlot*, tandis que le sel marin, infiniment moins soluble, reste en pleine dissolution. Les Chimistes qui ont parlé sur cet objet, se sont contentés de dire que le sel de Glauber ne se trouvoit ainsi mêlé avec le *schlot*, que par un certain degré d'affinité & d'adhérence qu'il avoit avec ces sels: on s'est contenté jusqu'ici de cette explication, mais il me semble cependant que l'on pourroit avancer que cette sélénite contenue dans le *schlot*, est plutôt le résultat de la formation instantanée du mélange du sel de Glauber & du sel marin à base terreuse, & que le sel de Glauber que l'on y trouve en nature, est susceptible de former avec le sel marin à base terreuse qui y reste toujours engagé, de la sélénite, sur-tout si ce mélange est animé par un léger degré de chaleur ou de mouvement, qui paroissent essentiels pour opérer cette décomposition d'une manière plus sensible.

L'adhérence du sel marin à base terreuse dans le *schlot*, malgré les lotions répétées dans l'eau bouillante, que lui a

fait subir M. Baumé, est une preuve certaine de ce que je viens d'avancer. Si l'on considère les carrières immenses de gypse si bien cristallisé, à quelle autre substance qu'aux eaux de la mer doit-on en attribuer l'origine? Quelle énorme quantité d'eau n'a-t-il pas fallu pour la formation de ces montagnes salées, dont la régularité des cristaux annonce la succession de temps nécessaire pour l'arrangement symétrique de ces molécules salines, & dont la différence si marquée avec les albâtres gypseux, prouve d'une manière non équivoque que ces derniers ont été formés rapidement & par dépôt? A quoi pourra-t-on mieux attribuer la formation de cette sélénite, si ce n'est à la double décomposition qui s'exécute sans cesse par le balancement & l'agitation continuelle des eaux de la mer?

Model, dans le premier volume de ses *Récréations chimiques*, page 166 & suivantes, avoit déjà quelques doutes sur la formation de la sélénite : l'analyse qu'il a faite de l'eau de Bristol, & de l'évaporation de laquelle il a retiré de la sélénite & du sel de Glauber, lui avoit fait faire cette remarque. Il se fait à lui-même deux questions ; la première, d'où vient la sélénite? la seconde, cette substance se trouve-t-elle dans l'eau comme sélénite, ou est-elle l'ouvrage du feu? Il regarde la première question comme très-facile à résoudre ; mais la décision de la seconde lui paroît extrêmement difficile. Il entre ensuite dans des détails qu'il seroit trop long de rapporter ici, & cherche à expliquer du mieux qu'il lui est possible, la formation de cette sélénite : on verra que pour en établir la théorie, il est obligé d'avoir recours à une espèce de mine de soufre ou à des pyrites sulfureuses dans l'état de décomposition, & dont l'acide se combinant avec les terres alcalines, forme la sélénite. Il dit plus, que pendant l'évaporation de cette eau, le soufre subtil ou l'acide vitriolique, forme avec les parties terrestres, grossières, une sélénite, & du sel de Glauber avec les parties les plus tenues : cette explication de Model paroît bien hasardée ; aussi ne la donne-t-il lui-même que comme conjecture ; car,

pour que cette théorie ait lieu, il faudroit admettre le concours des pyrites ou la décomposition du soufre dans toutes les eaux, puisque, par l'analyse, on retire presque de toutes du sel marin à base terreuse, de la sélénite & du sel de Glauber.

Le Traducteur de Model, M. Parmentier, dans ses Notes placées à la suite de la Dissertation que je viens de citer, fait, avec raison, un reproche à Model, de n'avoir point aperçu dans son analyse de l'eau de Bristol, le sel marin à base terreuse, qui a été découvert depuis par M.<sup>rs</sup> les Commissaires de la Faculté de Médecine de Paris, dans leur Analyse des Eaux de Ville-d'Avray, de Sainte-Reine, &c. Il reprend en sous-œuvre les deux questions proposées par Model, & tâche d'en donner la solution: il avance, de même que lui, que cette sélénite n'est dûe qu'à la destruction des pyrites sulfureuses ou à celle du foie de soufre; mais il faudroit, ce me semble, pour que cette hypothèse puisse avoir quelque degré de vraisemblance, admettre qu'il se trouve également dans toutes les eaux, des pyrites sulfureuses en décomposition, & dans l'état convenable à former de la sélénite; ce qui, je pense, ne doit pas arriver constamment, puisqu'il se trouve des endroits où l'on n'aperçoit aucun vestige ni de soufre ni de pyrite, & où néanmoins les sources qui traversent ces terres fournissent beaucoup de sélénite. Il me semble qu'il seroit plus simple de rapporter la sélénite qu'on retire de l'analyse de l'eau de Bristol, à la double décomposition du sel marin à base terreuse & du sel de Glauber, ingrédients qui se trouvent dans cette eau, qu'à la supposition gratuite de la destruction des pyrites sulfureuses ou du foie de soufre.

Je crois avoir suffisamment développé dans le cours de ce Mémoire, la première question proposée par Model, sur la formation de la sélénite; je pense que c'est dans la mer qu'est le principal magasin de ce sel, bien convaincu cependant qu'il s'en forme tous les jours dans les entrailles de la terre, par la décomposition des pyrites sulfureuses, mais aussi, que c'est un infiniment petit relativement à ce qui doit se passer dans le sein de la mer; au reste, je suis aussi  
fondé



fondé à croire que l'acide vitriolique qui sert à former le soufre est tiré de la sélénite, que de penser que la sélénite elle-même soit formée par l'acide du soufre; car on sait que pour que le soufre puisse se former, il faut le contact immédiat du phlogistique, & l'acide vitriolique dans un certain état de concentration: or, pour trouver cet état de concentration, ce ne peut être que lorsqu'il est combiné d'une manière quelconque; pour lors, les molécules acides se trouvent rapprochées, & dans un état de division convenable à pouvoir s'unir facilement avec le phlogistique, & à former du soufre; c'est ce qu'on obtient facilement par l'Art, en combinant la sélénite ou les sels vitrioliques avec le charbon. Mais il paroît que la Nature, ainsi que l'a fort bien dit Bernard Palissi, emploie plutôt la voie humide, pour ces combinaisons, que la voie sèche, & je pense qu'il se produit peut-être plus de soufre par cette voie que par la voie sèche: ce que je viens de dire ne doit être regardé que comme très-conjectural; car, pour établir sur cet objet une théorie plus juste, il faudroit connoître les principes qui constituent l'acide vitriolique, & les moyens que la Nature emploie pour le former.

Quant à la seconde question, savoir, si la sélénite que l'on retire de l'analyse des Eaux minérales est l'ouvrage du feu, ou si elle est dans l'eau comme sélénite? Cette question me paroît bien difficile à décider; car il n'y auroit rien de surprenant, qu'une eau roulant sur des bancs séléniteux, se chargeât de sélénite, mais je crois que celle que l'on retire de l'analyse de la plupart des Eaux minérales, est plutôt le produit de l'Art, que celui de la Nature, comme on le verra par l'Expérience suivante.

J'ai mis dans une livre d'eau distillée, six grains de sel marin à base terreuse, & autant de sel de Glauber; cette eau ne s'est point troublée, elle est restée claire & limpide; l'ayant soumise à l'évaporation dans une capsule de verre au bain de sable, il s'est précipité sur la fin de petits cristaux soyeux, qui n'étoient autre chose que de la sélénite, résultant, comme

*Mém. 1778.*

X x

on le voit de la double décomposition du sel de Glauber & du sel marin à base terreuse. Voilà donc de la sélénite qui est le produit de l'Art, puisque les substances que j'ai employées n'en contenoient pas un atome : je ferai même observer, que par l'intermède de ces sels, l'eau contient plus de sélénite en dissolution qu'elle ne sauroit le faire si elle étoit seule.

Cette Expérience, en répondant à la seconde question de Model, démontre encore le peu de fondement que l'on peut faire sur la sélénite que l'on retire de l'analyse de quantité d'Eaux minérales : presque toutes en fournissent ; elle n'est jamais seule, & se trouve presque toujours mêlée avec le sel de Glauber & le sel marin à base terreuse, ce qui paroît confirmer de plus en plus ce que je viens d'avancer. J'ai consulté plusieurs analyses d'Eaux minérales, j'en ai fait moi-même beaucoup avec M. de Laffone, & j'ai toujours tiré à peu-près les mêmes résultats, plus ou moins de sélénite, mais toujours réunie avec le sel marin à base terreuse & le sel de Glauber : j'ai aperçu souvent des variations très-grandes, dépendantes de la manière d'évaporer ; j'obtenois moins de sélénite lorsque l'évaporation étoit lente, que lorsqu'elle étoit rapide & par ébullition, de sorte qu'une même eau, prise en même quantité, fournissoit des résultats tout-à-fait différens du premier. On peut donc établir pour axiome, qu'une eau qui tient en dissolution du tartre vitriolé ou du sel de Glauber, du nitre à base terreuse ou du sel marin à base terreuse, fournira toujours par l'évaporation, de la sélénite.



*M É M O I R E*  
*S U R*  
*LES MOUVEMENS DES CÔTES*  
*ET SUR L'ACTION*  
*DES MUSCLES INTERCOSTAUX.*

Par M. S A B A T I E R.

**S**I l'on peut espérer de parvenir à la connoissance du 28 Décembre  
 mécanisme suivant lequel les fonctions de la machine 1777.  
 animale s'exécutent, ce doit être par les recherches les plus  
 exactes sur la structure des parties qui entrent dans la com-  
 position, & par l'examen de la manière dont ces parties  
 agissent pendant la vie. Le premier de ces moyens a long-  
 temps été le seul dont la plupart des Anatomistes aient fait  
 usage, aussi n'ont-ils pas autant avancé la Science qu'on  
 auroit pu l'attendre de la multiplicité de leurs travaux, pendant  
 que les découvertes les plus importantes qu'on y ait faites,  
 sont dûes à ceux qui les ont employés tous deux. On ne peut  
 donc trop multiplier les expériences sur les animaux vivans,  
 Soit qu'elles détruisent, confirment ou rectifient les inductions  
 que l'organisation seule eût présentées, elles ne peuvent qu'être  
 infiniment utiles, & conduire à la vérité, but unique auquel  
 doivent tendre les recherches des Physiciens.

Les remarques qui font le sujet de ce Mémoire, sont le  
 fruit de cette sorte d'expériences. Il y avoit long-temps que  
 j'avois observé que les dix côtes supérieures s'articuloient  
 d'une manière un peu différente avec les apophyses transverses  
 des vertèbres correspondantes : les facettes cartilagineuses,  
 creusées sur ces apophyses, m'avoient paru situées diverse-  
 ment ; les supérieures regardoient de bas en haut ; les  
 moyennes, de derrière en devant, & les inférieures, de haut  
 en bas. Je ne voyois pas quel pouvoit être l'usage de cette

Xx ij

disposition , dont personne peut - être ne s'étoit aperçu , excepté Vésale qui ne l'a pas décrite avec son exactitude ordinaire. J'étois trop prévenu que les côtes devoient être entraînées toutes dans le même sens , pour imaginer que les choses pussent se passer autrement ; mais j'ai été détrompé par l'examen que j'ai eu occasion de faire de différentes personnes blessées à la poitrine , & que la gêne de la respiration obligeoit à mouvoir les côtes avec plus de force qu'à l'ordinaire. J'ai vu manifestement sur celles qui étoient dépourvues d'embonpoint que les côtes supérieures montent , que les moyennes se portent en dehors , & que les inférieures descendent & rentrent légèrement en dedans pendant l'inspiration , au lieu que dans l'expiration , les premières descendent , les secondes rentrent en dedans , & les dernières remontent & se portent un peu en dehors ; & je n'ai pas eu de peine à concevoir que la manière dont les facettes articulaires des apophyses transverses des vertèbres du dos sont disposées , répond à ces divers mouvemens , & qu'elle sert à les favoriser.

Comme les occasions de cette espèce ne sont pas fort fréquentes , j'ai voulu m'assurer depuis si les côtes se meuvent toujours de la même façon ; en conséquence , je les ai mises à découvert sur des chiens vivans. Mes premiers essais n'ont pas été aussi heureux que je l'aurois cru : malgré la torture à laquelle ces animaux étoient exposés , la douceur & l'égalité de leur respiration ne me permettoient pas de discerner les mouvemens des côtes avec autant de précision que je l'avois fait sur des hommes malades , & à travers les muscles & les tégumens dont elles sont couvertes. On fait en effet , que dans la respiration ordinaire & non laborieuse , ces os ne changent presque pas de situation , & que les différentes dimensions que prend la poitrine , sont principalement dues au diaphragme qui s'abaisse & monte alternativement. Je désespérois donc de tirer aucun fruit de mes expériences , lorsque je m'avisai de faire une large ouverture à travers les muscles intercostaux , tantôt d'un côté seulement , & tantôt des deux à la fois , pour rendre la respiration de ces animaux

plus pénible, & pour en accélérer les mouvemens. Je n'ai pas été trompé dans mon attente; les côtes se sont mues avec plus de force & de rapidité, & j'ai vu qu'elles étoient entraînées dans des mouvemens différens, selon qu'elles répondoient à la partie supérieure, moyenne & inférieure de la poitrine, & tous semblables à ceux que j'avois observés précédemment.

Loin donc que toutes les côtes soient élevées dans l'inspiration, comme on l'a cru jusqu'ici, les supérieures seules montent, & les inférieures descendent; celles qui sont au milieu n'obéissent ni à l'un ni à l'autre de ces mouvemens, mais elles éprouvent une sorte de rotation de dedans en dehors, qui, quoique commune à toutes, est plus sensible chez elles que chez les autres, & qui les portant en dehors, augmente l'étendue de la poitrine de la partie droite à la partie gauche, & de devant en arrière, pendant que la longueur de cette cavité devient plus grande par l'écartement qui se fait entre elles; de même dans l'expiration, toutes les côtes ne s'abaissent pas, les supérieures seules descendent, les inférieures montent, & il n'en est aucune qui ne tourne sur elle-même de dehors en dedans, & qui ne se rapproche de celles qui l'avoisinent. Mais ces mouvemens ne sont pas également marqués dans toutes les régions de la poitrine; à peine sont-ils sensibles à ses parties antérieure & postérieure, au lieu qu'ils sont fort grands à ses parties latérales. On peut effectivement concevoir les côtes comme des leviers courbés à leur partie moyenne, & qui ont leur point d'appui à l'une de leurs extrémités; elles en auroient même deux, l'un en arrière aux vertèbres, & l'autre en devant au sternum, si ce dernier os n'étoit mobile, & s'il n'étoit porté de bas en haut, & de haut en bas, par les côtes supérieures, auxquelles il est plus intimement uni qu'aux inférieures.

De toutes les circonstances que je viens d'exposer, celles qui me frappèrent le plus, lors de mes premières expériences, furent l'écartement des côtes pendant l'inspiration & leur rapprochement pendant l'expiration, parce que l'une & l'autre ne

### 356 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

peuvent s'accorder avec l'opinion généralement adoptée sur l'usage des muscles intercostaux, que tous les Anatomistes & les Phyficiens regardent comme le principal agent du premier de ces deux mouvemens, & presque comme les seuls muscles inspireurs. Comment en effet ces muscles, situés entre les côtes & n'ayant d'autres attaches qu'à leur partie osseuse & à leur cartilage, pourroient-ils, malgré la disposition différente de leurs fibres qui s'entre-croisent, les écarter les unes des autres? La plus légère attention suffit pour voir que cela est absolument impossible, & il n'est sans doute personne qui leur eût attribué cette fonction, si l'on eût mieux connu la manière dont les côtes se meuvent: aussi remarque-t-on sur les animaux vivans que les muscles dont il s'agit s'allongent dans l'inspiration, non-seulement autant qu'il le faut pour permettre aux côtes de s'éloigner, mais encore assez pour pouvoir, en quelque sorte, s'enfoncer de dehors en dedans, où ils sont poussés par la pression de l'air extérieur qui tend à se précipiter dans la cavité de la poitrine, au lieu que dans l'expiration ils se raccourcissent & sont en même temps chassés de dedans en dehors. J'ai plusieurs fois cherché à voir si leurs fibres se froissoient alors comme celles des grands muscles dont on excite la contraction sur des animaux vivans, mais je n'ai pu m'en assurer d'une manière assez positive pour rien prononcer à ce sujet.

Les muscles intercostaux doivent donc être bannis du nombre des muscles inspireurs, pour être rangés parmi ceux qui opèrent le rétrécissement de la poitrine, & qu'on appelle *muscles expirateurs*, puisque leur contraction, ou, ce qui revient au même, leur raccourcissement tend à rapprocher les côtes & à diminuer les intervalles qui les séparent. Au reste, quel qu'extraordinaire que puisse paroître l'opinion que j'expose ici, je pourrois lui trouver des défenseurs parmi les Anatomistes les plus célèbres, si elle n'étoit étayée sur l'expérience dont le témoignage l'emporte sur toute espèce d'autorité. En effet, sans parler de Galien, de Bérenger de Carpi, de François Bayle, & de plusieurs autres, même parmi les

modernes, qui ont pensé que les muscles intercostaux externes servent à la dilatation de la poitrine, & les internes à sa contraction, Vésale, Fallope & Borelli, très-versé dans les Mathématiques qu'il a par-tout appliquées à l'Anatomie, & plus en état que quiconque de juger de l'action des parties musculieuses, d'après leurs attaches & la direction de leurs fibres, pensent que ces muscles ont un seul & même usage, qui est de rétrécir cette cavité. S'ils contribuent en quelque sorte à sa dilatation, ce ne peut être, dit Fallope, que par accident, & parce que chacun d'eux étant attaché au bord inférieur d'une côte & au bord supérieur de celle qui la suit, il n'est pas possible que la première s'élève sans entraîner en même temps la seconde.

Les muscles qui augmentent la capacité de la poitrine, sont sans doute différens, selon que la respiration est lente, douce & naturelle, ou que les mouvemens en sont grands, rapides & précipités. Dans le premier cas, le diaphragme est celui dont l'action est la plus marquée; mais quoique les côtes changent très-peu de situation, elles sont cependant sensiblement écartées les unes des autres. Celles qui sont supérieures me paroissent élevées par les scalènes, & sur-tout par les dentelés postérieurs supérieurs, dont les dentelures s'écartent d'autant plus des vertèbres où les côtes ont leur point d'appui, qu'elles deviennent inférieures, ce qui répond fort bien à l'étendue du mouvement des côtes qui est moindre à la première & à la seconde, qu'à celles qui les suivent jusqu'à la septième; de même les côtes inférieures me semblent abaissées, tant par les carrés des lombes que par les dentelés postérieurs inférieurs. Ces derniers occupent en effet un plus grand espace au bord inférieur de la dernière côte, & s'y attachent plus loin des vertèbres qu'aux trois côtes qui suivent en montant; aussi l'expérience m'a-t-elle fait voir que le mouvement de haut en bas que j'ai observé sur les côtes inférieures, est plus marqué à la dernière & qu'il devient moins grand dans celles qui suivent jusqu'à la cinquième. C'est peut-être pour donner aux deux dernières côtes plus de facilité à se laisser entraîner

en différens sens, qu'elles n'ont en arrière qu'une articulation avec les vertèbres qui leur répondent, pendant que toutes les autres en ont deux, & qu'en devant ces côtes manquent de connexion avec le sternum. Dans le second cas, c'est-à-dire dans celui où la respiration se fait avec plus de force, les muscles dont il vient d'être parlé sont aidés par beaucoup d'autres dont il est inutile de faire l'énumération, étant connus de tous les Anatomistes.

Il résulte de ce que l'on vient de dire, que les muscles qui servent au rétrécissement de la poitrine, sont plus nombreux & plus forts que ceux qui la dilatent : en effet, les intercostaux, tant internes qu'externes, les sterno-costaux, les sous-costaux, & sur-tout les muscles du bas-ventre, dont l'action tend à ramener les côtes de haut en bas, l'emportent sur les scalènes, les dentelés supérieurs, les sous-claviers, & autres qui relèvent celles qui sont supérieures; mais en cela la poitrine ne présente rien que ce que l'on voit dans les autres parties de la machine animale, où les muscles fléchisseurs sont en plus grand nombre & plus robustes que ceux qui sont destinés à l'extension : d'ailleurs, comme l'a fort bien remarqué Vésale, il faut plus de force pour la voix, la toux, l'éternument, l'expulsion des matières fécales, celle du fœtus, en un mot pour toutes les fonctions qui dépendent de l'expiration, que pour l'inspiration.





## NOUVELLES EXPÉRIENCES

SUR LA

## RÉSISTANCE DES FLUIDES.

Par M. l'Abbé BOSSUT.

**L**ES Expériences que nous fîmes sur la résistance des Fluides, en 1775, M. d'Alembert, M. le Marquis de Condorcet & moi, & dont nous avons rendu compte dans un Ouvrage particulier, avoient pour objet principal de comparer la résistance des fluides indéfinis en étendue avec celle des fluides contenus dans des canaux étroits ou peu profonds. On sait qu'elles furent ordonnées par M. Turgot, alors Contrôleur général des Finances, pour savoir si le projet d'un Canal souterrain qui a eu une célébrité éphémère, ne joignoit pas à une foule d'autres vices, celui d'exiger pour le tirage des bateaux, une plus grande force qu'il ne la faut, proportion gardée, sur les rivières ou sur les canaux larges & profonds. Il paroît que nos recherches ont fixé sur ce point l'opinion de cette partie du Public, qui n'a d'autre intérêt que de connoître & de recevoir la vérité.

Parmi ces expériences, il s'en trouve plusieurs sur la résistance oblique des fluides; mais nous avouames dès-lors que cette branche importante du Problème avoit besoin d'être encore examinée. En conséquence, M. le Marquis de Condorcet & moi avons fait une longue suite de nouvelles expériences, destinées en grande partie à découvrir la loi suivant laquelle diminue la résistance d'une proue angulaire, à mesure que l'angle de cette proue devient plus aigu. M.<sup>rs</sup> Dez, d'Agelet & Verkaven, Professeurs de Mathématiques à l'École royale militaire, ont bien voulu nous seconder avec un zèle que nous ne pouvons trop reconnoître. Voici l'exposition & les résultats de tout ce travail.

Mém. 1778.

Y y

Lû à  
l'Assemblée  
publique  
de la  
Saint-Martin  
1779.

## CHAPITRE I.

*Préparation aux Expériences.*

## I.

LES Expériences dont il s'agit, ont été faites à Paris, au mois d'Août 1778, sur l'ancien réservoir des eaux, construit sous l'administration de M. Turgot le père, Prévôt des Marchands, pour arroser le Boulevard, & pour nettoyer l'Aqueduc, vulgairement nommé le *Grand-égout*, qui partant du voisinage, va se décharger dans la Seine près de Chaillot. Ce réservoir, situé à l'extrémité nord de la vieille rue du Temple, est un quarré long, ou plutôt un parallépipède rectangle  $ABCD$ , dont la longueur  $AB$  est de 200 pieds, la largeur  $AD$  de 100 pieds, & la profondeur d'eau, au temps de nos expériences, a toujours été d'environ 8 pieds & demi.

Fig. 1.

## II.

ON a fait mouvoir successivement sur le fluide plusieurs bateaux, & on a déterminé, au moyen d'une excellente Montre à secondes, le temps qu'ils emploient à parcourir un espace donné. L'espace décrit par chacun d'eux, est la droite  $EF$  parallèle aux parois longitudinales  $BA$ ,  $CD$ , & distante de la paroi nord  $CD$ , de 48 pieds. En  $G$ ,  $I$  &  $H$ ,  $K$ , sont quatre planches plantées verticalement; les deux premières sont percées chacune dans la partie supérieure d'une fente étroite & longue suivant la hauteur, de manière que ces fentes forment des pinnules qui servent à observer le passage du bateau, & à le rapporter aux planches  $H$ ,  $K$ ; les distances  $ID$ ,  $KA$ , sont chacune de 40 pieds; & les distances  $GC$ ,  $HB$  chacune de 64 pieds. A la ligne  $MN$  décrite réellement par le bateau, nous substituons la ligne  $GI$ , de même longueur, & située sur le bord du bassin, laquelle est de 96 pieds mesurés très-exactement, par le moyen de la toise de l'Académie.

## III.

COMME le bateau parvenu en  $N$  poursuivroit sa route avec la même vitesse, & par-là seroit exposé à venir se briser contre la paroi  $DA$ , si le poids, qui par sa chute le fait mouvoir, continuoit d'agir sur lui; on fait en sorte que le poids soit entièrement tombé un peu après que le bateau a passé la ligne  $IK$ ; d'où il résulte que le mouvement du bateau s'éteint en vertu de la résistance que l'eau lui oppose continuellement sur la longueur  $NF$ , & qu'il est ordinairement tout-à-fait anéanti quand le bateau est encore distant de plusieurs pieds du point  $F$ .

Je dis *ordinairement*; car lorsque le bateau a une proue fort aiguë, & qu'il a été tiré par un grand poids, l'espace  $NF$  ne suffiroit pas pour l'extinction de son mouvement. Dans ces sortes de cas, nous ne faisons parcourir au bateau que l'espace  $Mn$  ou  $Gi$ , qui est de 72 pieds.

## IV.

ON voit dans les *Figures 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 & 10*, tout l'appareil des machines qui ont servi à produire les mouvemens dont nous avions besoin.

Le bateau  $B$  est tiré dans le sens  $EF$  par une corde qui Fig. 2. est attachée au milieu ou centre de gravité  $C$  de sa partie submergée: cette corde vient passer sous la poulie  $A$  de renvoi, qui est de cuivre, & va s'envelopper sur la roue  $X$  d'un tour horizontal, soutenu en l'air par deux montans; elle est forcée de s'envelopper ainsi par un poids  $P$  suspendu à une autre corde  $G$ , qui se déroule de dessus le cylindre  $V$  du tour: les deux points  $C$  &  $A$  sont de niveau. De plus, comme la corde  $CAD$  est mince, & que sa pesanteur spécifique diffère peu de celle de l'eau, la partie  $CA$  peut être considérée comme sensiblement rectiligne,

La *Figure 3* représente l'élévation du tour, laquelle est perpendiculaire au profil longitudinal de la *Figure 2*; en combinant ensemble ces deux Figures, on voit toutes les

parties du tour, & les montans qui le soutiennent. Le cylindre & la roue sont de bois, mais ils sont revêtus l'un & l'autre d'une lame de cuivre arrondie circulairement sur le tour;

Fig. 4. l'essieu du cylindre est de fer, & ses extrémités *t* tournent sur deux rouleaux *r* de fer, dont les essieux aussi de fer

Fig. 5. tournent dans des yeux de cuivre. On voit de face le cylindre *V*, son essieu *t*, les rouleaux *r*, leurs essieux *s*. Toutes ces parties sont portées par deux chappes de fer clouées à

Fig. 3. deux planches qui s'assemblent avec les montans *TT*, *TT*: ces mêmes montans sont liés entre eux dans la partie supérieure par le chapeau *Z*; & dans la partie inférieure, ils sont fixés solidement, comme on le voit dans les *Figures 3 & 6*; ils ont chacun environ 20 pieds de hauteur.

Le diamètre de la roue = 2 pieds 9 pouces 7 lignes; celui du cylindre = 4 pouces  $1\frac{1}{2}$  lignes; celui de chaque tourillon du cylindre = 11 lignes; celui de chaque rouleau = 7 pouces 11 lignes; celui de chaque tourillon des rouleaux =  $8\frac{3}{4}$  lignes; celui de la poulie *A* de renvoi, = 5 pouces  $\frac{1}{2}$  ligne; celui de chacun des tourillons de cette poulie =  $4\frac{2}{3}$  lig. celui de la corde *CAD* =  $1\frac{3}{4}$  lig. celui de la corde *G* =  $4\frac{1}{4}$  lignes.

Le poids total de la roue & du cylindre est de 45 livres 11 onces 36 grains; la longueur de l'axe commun au cylindre & à la roue est de près de 4 pieds.

## V.

LORSQU'ON veut faire une expérience, on commence

Fig. 2. par amener le bateau *B* de *F* vers *E*, par le moyen d'une corde *HKI* qui va passer sous la poulie *K* de renvoi, & s'envelopper autour d'un cylindre *I* garni d'une manivelle qu'un homme fait tourner. On voit ce mécanisme séparément dans la *Figure 7*. Le bateau allant dans le sens *FE*, le poids *P* s'élève, la corde *G* qui le soutient se roule sur le cylindre *V*, & la corde *CAD* se dévide de dessus la roue. Quand le poids *P* est arrivé à la plus grande hauteur, on lâche la manivelle, le poids descend, le bateau commence la course

de *E* vers *F*, & on a soin de dévider la corde *IKH* de dessus le cylindre, pour qu'elle n'oppose pas de résistance sensible au mouvement du bateau.

La poulie *K* est de cuivre & son diamètre = 5 pouces  $\frac{1}{2}$  ligne; celui de chacun des tourillons de cette poulie =  $4\frac{2}{3}$  lignes; celui de la corde *HKI* =  $1\frac{1}{4}$  ligne.

## V I.

POUR empêcher que le bateau ne serpente en cheminant, & pour le faire aller en ligne droite, on a tendu fortement dans la direction *EF* une corde qui a 8 lignes de diamètre, Fig. 2. & qui fait un ventre peu sensible au-dessus de la surface de l'eau; on peut d'autant mieux négliger ce ventre, que la corde est un peu soulevée en sens contraire par le bateau: cette même corde passe entre deux paires de poulies *x* de cuivre, assemblées dans deux chappes dont les pieds s'attachent à une longue planche qui se pose sur chaque bateau, Figures 8, dans la direction de son mouvement: on voit ces poulies en 9 & 10. différens sens, & la Figure 11 montre comment la planche *yy* qui les porte, s'applique sur chaque bateau: il y a en avant de chaque paire de poulies un petit rouleau mobile *u* qui soutient la corde, & favorise le glissement du corps flottant.

Le diamètre de chacune des poulies *x* = 4 pouces; celui de chacun de leurs essieux =  $2\frac{1}{2}$  lignes; la distance *yy* des deux paires de poulies *x*, est constamment Fig. 11. de 8 pieds 1 pouce.

## V I I.

NOUS avons fait courir sur l'eau dix-neuf espèces de bateaux: savoir,

1.<sup>o</sup> Un parallépipède rectangle *X*, dont le plan est le Fig. 12. rectangle *MNOP*; la largeur *MN* = 2 pieds; la longueur *MP* = 4 pieds; l'enfoncement *nh* dans le fluide = 2 pieds; la hauteur *nN* de la partie saillante hors de l'eau, est d'environ 7 pouces.

2.<sup>o</sup> Quatorze bateaux prismatiques *Y*, ayant une proue Fig. 13.

isocèle  $MQN$ , dont l'angle  $Q$  du sommet varie de 12 degrés en 12 degrés, depuis 168 degrés jusqu'à 12; la largeur  $MN$  de chacun d'eux  $= 2$  pieds; la longueur  $MP = 4$  pieds; l'enfoncement  $nh$  dans l'eau  $= 2$  pieds; la partie  $nN$  saillante hors de l'eau, est d'environ 7 pouces.

Fig. 14. 3.<sup>o</sup> Un parallépipède rectangle  $Z$ , dont la largeur  $MP = 4$  pieds; la longueur  $MN = 2$  pieds; l'enfoncement  $mg$  dans l'eau  $= 2$  pieds; & la partie  $mM$  saillante hors de l'eau  $= 7$  pouces environ.

Fig. 15. 4.<sup>o</sup> Un bateau prismatique  $V$ , dont la proue est composée de deux parties planes égales  $MH$ ,  $KP$ , & d'une partie angulaire & isocèle  $HQK$ ; la largeur totale  $MP = 4$  pieds; chacune des parties  $MH$  ou  $KP = 1$  pied,  $HK = 2$  pieds; la longueur  $MN = 2$  pieds; l'enfoncement  $mh$  dans l'eau  $= 2$  pieds; la partie  $mM$  saillante hors de l'eau  $= 7$  pouces; & l'angle  $HQK = 24$  degrés.

Fig. 16. 5.<sup>o</sup> Deux bateaux prismatiques  $S$ , ayant chacun une proue circulaire, dont la flèche  $QR$  est égale dans l'un au rayon  $RM$ , & dans l'autre au demi-rayon; la largeur  $MN = 2$  pieds; la longueur  $MP = 4$  pieds; l'enfoncement  $nh$  dans l'eau  $= 2$  pieds; & la partie  $nN$  saillante hors de l'eau  $= 7$  pouces environ.

## CHAPITRE II,

### *Exposition des Expériences.*

#### I.

Fig. 2. Les poids qu'on emploie successivement pour faire mouvoir un bateau, se fixent sur un plateau attaché à l'extrémité de la corde  $G$ : il y a donc réellement dans chaque poids moteur, pour chaque expérience, deux poids séparés; l'un est celui qu'on pose sur le plateau; l'autre la pesanteur même du plateau, qui subit quelques variations selon que le plateau est plus ou moins mouillé. On a estimé ces variations le plus exactement qu'il a été possible. Pour plus de simplicité dans

l'expression de la totalité du poids moteur, nous distinguons deux parties dans le poids particulier du plateau; l'une qui est constamment de 10 livres, & que nous joignons tout de suite au poids posé sur le plateau; l'autre qui varie dans l'intervalle de demi-livre à  $2\frac{1}{2}$  livres, & qui accompagne, au moyen du signe  $+$ , la première somme: cette seconde partie du poids du plateau est la seule qui soit un peu incertaine; mais on voit qu'une pareille incertitude ne peut produire aucun changement sensible dans les résultats.

Quant à la variation qui arrive au poids de la corde  $G$ , à mesure qu'elle se déroule, nous la compensons par un bout de corde de même grosseur que  $G$ , suspendu au plateau; ainsi le poids de la corde qui soutient le poids moteur peut être regardé comme constant, & nous le comprenons dans celui du plateau.

## I I.

CHACUN bateau a toujours parcouru plus de 40 pieds, avant que d'arriver à la ligne  $GH$ , de laquelle on commence à compter le mouvement; ainsi il n'y a plus alors d'accélération, & l'on peut regarder le mouvement comme uniforme sur l'étendue  $MN$  ou  $Mn$ . Fig. 1.

On a eu de la peine à observer les remous, à cause de la distance où l'on étoit des bateaux: on ne trouvera donc ici qu'un petit nombre d'observations de ce genre.

La même expérience a toujours été répétée quatre ou cinq fois, & on a pris un milieu entre les temps des mouvements, lorsqu'on jugeoit d'ailleurs que ces temps étoient déterminés avec une exactitude suffisante. Nous allons présenter le tableau de toutes nos opérations, le plus brièvement & le plus clairement qu'il nous sera possible.

360 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
EXPÉRIENCES I, II, III, IV, V.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENTS, exprimés en secondes.
<i>Figure 12.</i> Résistance directe. Remou central = $2^{\text{P}^{\circ} \frac{1}{2}}$ .	60 + 1,8.	96.	78,08.
	110 + 2,5.	96.	57,51.
	160 + 2,5.	96.	47,44.
	210 + 2,5.	96.	41,49.
	260 + 2,5.	96.	37,32.

EXPÉRIENCES VI, VII, VIII, IX, X.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENTS, exprimés en secondes.
<i>Figure 13.</i> Angle $MQN = 168^{\text{d}}$ Remou central = $2^{\text{P}^{\circ} \frac{1}{2}}$ .	60 + 2,0.	96.	77,50.
	110 + 2,5.	96.	56,95.
	160 + 2,5.	96.	47,22.
	210 + 2,5.	96.	41,26.
	260 + 2,5.	96.	37,12.

EXPÉRIENCES XI, XII, XIII, XIV, XV.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENTS, exprimés en secondes.
<i>Figure 13.</i> Angle $MQN = 156^{\text{d}}$ Remou central = $2^{\text{P}^{\circ} \frac{1}{3}}$ .	60 + 2,5.	96.	75,09.
	110 + 2,5.	96.	56,15.
	160 + 2,5.	96.	46,44.
	210 + 2,5.	96.	41,03.
	260 + 2,5.	96.	36,52.

EXPÉRIENCES



## EXPÉRIENCES XVI, XVII, XVIII, XIX, XX.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENTS, exprimés en secondes.
<i>Figure 13.</i> Angle $MQN = 144^d$ Remou central 21 lign.	60 + 2,5.	96.	73,38.
	110 + 2,5.	96.	54,75.
	160 + 2,5.	96.	45,35.
	210 + 2,5.	96.	39,58.
	260 + 2,5.	96.	37,57.

## EXPÉRIENCES XXI, XXII, XXIII, XXIV, XXV.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENTS, exprimés en secondes.
<i>Figure 13.</i> Angle $MQN = 132^d$ Remou central = 21 lig.	60 + 0,5.	96.	72,08.
	110 + 1,5.	96.	53,25.
	160 + 2,5.	96.	43,75.
	210 + 2,5.	96.	38,26.
	260 + 2,5.	96.	34,30.

## EXPÉRIENCES XXVI, XXVII, XXVIII, XXIX, XXX.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENTS, exprimés en secondes.
<i>Figure 13.</i> Angle $MQN = 120^d$	60 + 2,5.	96.	68,32.
	110 + 2,5.	96.	50,84.
	160 + 2,5.	96.	41,84.
	210 + 2,5.	96.	36,62.
	260 + 2,5.	96.	32,77.

## EXPÉRIENCES XXXI, XXXII, XXXIII, XXXIV, XXXV.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENTS, exprimés en secondes.
<i>Figure 13.</i> Angle $MQN = 108^d$	60 + 1,5.	96.	65,85.
	110 + 2,5.	96.	48,75.
	160 + 2,5.	96.	39,50.
	210 + 2,5.	96.	34,46.
	260 + 2,5.	96.	31,05.

## EXPÉRIENCES XXXVI, XXXVII, XXXVIII, XXXIX, XL.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENTS, exprimés en secondes.
<i>Figure 13.</i> Angle $MQN = 96^d$	60 + 0,5.	96.	63,00.
	110 + 0,5.	96.	46,45.
	160 + 2,5.	96.	38,05.
	210 + 2,5.	96.	32,66.
	260 + 2,5.	96.	29,27.

## EXPÉRIENCES XLI, XLII, XLIII, XLIV, XLV.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENTS, exprimés en secondes.
<i>Figure 13.</i> Angle $MQN = 84^d$	60 + 0,5.	96.	60,55.
	110 + 0,5.	96.	44,56.
	160 + 2,5.	96.	35,78.
	210 + 2,5.	96.	31,25.
	260 + 2,5.	96.	27,51.

## EXPÉRIENCES XLVI, XLVII, XLVIII, XLIX, L.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENTS, exprimés en secondes.
<i>Figure 13.</i> Angle $MQN = 72^d$	60 + 2,5.	96.	57,50.
	110 + 2,5.	96.	42,75.
	160 + 2,5.	96.	34,85.
	210 + 2,5.	96.	29,65.
	260 + 2,5.	96.	25,86.

## EXPÉRIENCES LI, LII, LIII, LIV, LV.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENTS, exprimés en secondes.
<i>Figure 13.</i> Angle $MQN = 60^d$	60 + 0,5.	96.	55,45.
	110 + 2,5.	96.	40,04.
	160 + 2,5.	96.	33,05.
	210 + 2,5.	96.	28,25.
	260 + 2,5.	96.	24,77.

## EXPÉRIENCES LVI, LVII, LVIII, LIX, LX.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENTS, exprimés en secondes.
<i>Figure 13.</i> Angle $MQN = 48^d$	60 + 2,5.	96.	52,51.
	110 + 2,5.	96.	38,65.
	160 + 2,5.	96.	31,61.
	210 + 2,5.	96.	27,56.
	260 + 2,5.	96.	24,30.

364 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
EXPÉRIENCES LXI, LXII, LXIII.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENTS, exprimés en secondes.
<i>Figure 13.</i> Angle $MQN = 36^d$	60 + 2,5.	96.	51,15.
	110 + 2,5.	96.	36,96.
	160 + 2,5.	96.	30,53.

EXPÉRIENCES LXIV, LXV, LXVI.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENTS, exprimés en secondes.
<i>Figure 13.</i> Angle $MQN = 24^d$	60 + 1,5.	96.	49,48.
	110 + 2,5.	96.	35,75.
	160 + 2,5.	96.	30,23.

EXPÉRIENCES LXVII, LXVIII, LXIX.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENTS, exprimés en secondes.
<i>Figure 13.</i> Angle $MQN = 12^d$	60 + 2,5.	72.	37,04.
	110 + 2,5.	72.	26,50.
	160 + 2,5.	72.	22,51.

## SCHOLIE.

Le but des expériences précédentes, est de faire connoître les rapports des résistances pour une suite de proues angulaires qui varient de 12 degrés en 12 degrés, depuis 180 degrés, c'est-à-dire depuis le simple plan jusqu'à l'angle de 12 degrés. Ayant rempli cet objet principal de notre travail, nous avons encore examiné d'autres points importants de la résistance des fluides ; telles sont les questions suivantes.

## PREMIÈRE QUESTION.

*Les résistances des proues polygones ou curvilignes suivent-elles les mêmes loix que les résistances des proues angulaires simples ?*

## SECONDE QUESTION.

*La poupe plus ou moins alongée d'un Vaisseau influe-t-elle sensiblement, toutes choses d'ailleurs égales, sur la vitesse du sillage ?*

## TROISIÈME QUESTION.

*La longueur d'un Vaisseau est-elle indifférente pour la marche, en supposant que la surface présentée au choc du fluide soit toujours la même ?*

## QUATRIÈME QUESTION.

*Quels changemens produira-t-on dans la vitesse du sillage, si l'on couvre d'une pointe triangulaire le milieu d'une proue plane ou celui d'une poupe plane ?*

Les expériences que nous allons rapporter nous serviront, sinon à résoudre généralement ces questions, du moins à en donner des solutions particulières applicables à plusieurs cas.

Dans les six premières, cotées LXX, LXXI, LXXII, LXXIII, LXXIV, LXXV, on a fait courir les bateaux représentés par la Figure 16.

Dans celles qui sont cotées LXXVI, LXXVII, LXXVIII, LXXIX, LXXX, LXXXI, le bateau mu n'est autre chose

366 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

que celui de la *Figure 13*, retourné de l'avant à l'arrière, de sorte que  $OP$  est maintenant la proue &  $MQN$  la poupe: ainsi on aura des résistances directes qu'on pourra comparer avec celles du bateau de la *Figure 12*, où la poupe est un simple plan vertical, de même que la proue.

L'expérience cotée *LXXXII*, a été faite avec le bateau de la *Figure 14*, dont la largeur  $MP = 4$  pieds, la longueur  $MN = 2$  pieds, & l'enfoncement dans l'eau = 2 pieds, comme il a été dit.

Les deux expériences cotées *LXXXIII*, *LXXXIV*, ont été faites avec le bateau de la *Figure 15*, l'angle  $KQN$  de la proue étant ici de 24 degrés; & enfin celles qui sont cotées *LXXXV*, *LXXXVI*, ont été faites avec le même bateau, retourné de l'avant à l'arrière, l'angle  $KQN$  de la poupe étant de 24 degrés, comme celui de la proue dans les deux précédentes.

EXPÉRIENCES *LXX*, *LXXI*, *LXXII*.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENTS, exprimés en secondes.
<i>Figure 16.</i> $QR = RM.$	60 + 2,0.	72.	42,25.
	110 + 2,5.	72.	30,50.
	160 + 2,5.	72.	25,25.

EXPÉRIENCES *LXXIII*, *LXXIV*, *LXXV*.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENTS, exprimés en secondes.
<i>Figure 16.</i> $QR = \frac{RM}{2}.$	60 + 2,0.	72.	51,25.
	110 + 2,5.	72.	37,25.
	160 + 2,5.	72.	30,50.

DES SCIENCES. 367.  
EXPÉRIENCES LXXVI, LXXVII.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENTS, exprimés en secondes.
<i>Figure 13 retournée;</i> l'angle <i>MQN</i> de la poupe étant = $48^d$ .	160 + 2,5.	96.	44,80.
	260 + 2,5.	96.	35,18.

EXPÉRIENCES LXXVIII, LXXIX, LXXX.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENTS, exprimés en secondes.
<i>Figure 13. retournée.</i> Angle <i>MQN</i> de la poupe = $24^d$ .	160 + 2,5.	96.	43,85.
	210 + 2,5.	96.	38,35.
	260 + 2,5.	96.	34,48.

EXPÉRIENCE LXXXI.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACE PARCOURU, exprimé en pieds.	TEMPS DU MOUVEMENT, exprimé en secondes.
<i>Figure 13 retournée.</i> Angle <i>MQN</i> de la poupe = $12^d$ .	160 + 2,5.	72.	32,62.

EXPÉRIENCE LXXXII.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACE PARCOURU, exprimé en pieds.	TEMPS DU MOUVEMENT, exprimé en secondes.
<i>Figure 14.</i>	110 + 2,5.	72.	72,00.

368 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
EXPÉRIENCES LXXXIII, LXXXIV.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENTS, exprimés en secondes.
<i>Figure 15.</i>	110 + 2,5.	72.	60,00.
Angle $KQH = 24^d$ .	210 + 2,5.	72.	43,25.

EXPÉRIENCES LXXXV, LXXXVI.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENTS, exprimés en secondes.
<i>Figure 15 retournée.</i>	110 + 2,5.	72.	69,00.
L'Angle $KQH$ de la poupe $= 24^d$ .	210 + 2,5.	72.	50,01.

CHAPITRE III.

*Conséquences qui résultent des Expériences précédentes.*

I.

Nos Expériences de l'année 1775, ont suffisamment prouvé, & on trouveroit également par les précédentes, que la résistance d'une surface quelconque, plane ou courbe, mue avec différentes vitesses, est à peu de chose près, comme le carré de la vitesse : on a trouvé aussi que les résistances directes de différentes surfaces planes, mues avec la même vitesse, sont sensiblement proportionnelles aux étendues de ces surfaces, pourvu néanmoins que le fluide ait dans tous les cas une liberté suffisante de venir gagner l'arrière du corps flottant, comme nous le verrons ci-dessous. Ainsi sur ces deux points, l'expérience est à peu de chose près d'accord avec la théorie ordinaire ; mais relativement à la loi



la loi du carré du sinus de l'angle d'incidence d'un fluide sur un plan, l'expérience s'éloigne sensiblement de la théorie, du moins lorsque les angles d'incidence deviennent un peu aigus. Notre objet présent est d'abord d'examiner, au moyen des soixante-neuf premières expériences qui précèdent, si la loi du choc pour une suite de proues angulaires simples, n'a pas une marche constante & régulière qu'on puisse soumettre aux formules de l'analyse : Problème absolument nouveau jusqu'ici ; nous tâcherons ensuite de résoudre ou d'éclaircir, par les autres expériences, les questions intéressantes qui ont été proposées dans le Scholie du chapitre précédent.

## I I.

L'EFFORT total que le poids moteur fait pour descendre, est contre-balancé à chaque instant par la résistance de l'eau dont nous sommes occupés, par celle de l'air & par le frottement. On peut s'assurer, comme dans notre premier Ouvrage sur la résistance des fluides, que la résistance de l'air est ici si petite qu'elle peut être entièrement négligée sans scrupule ; la résistance qui provient du frottement des parties de la machine, & du mouvement de la corde qui tire le bateau, est toujours beaucoup moindre que celle de l'eau ; néanmoins il faudroit en tenir compte, si on vouloit assigner la mesure absolue de la résistance de l'eau ; mais comme nous nous proposons simplement de déterminer les rapports des résistances de l'eau, nous pouvons faire abstraction du frottement, parce que dans les mouvemens uniformes, tels que nous les considérons, le frottement étant sensiblement proportionnel à la pression, les résistances totales que surmonte le poids moteur en descendant sont entr'elles,

370 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
à peu de chose près, comme les mêmes résistances diminuées  
des effets des frottemens.

### III.

1.° Soient pour un même espace & un même temps  
donnés :

- La valeur absolue de la résistance directe qu'éprouve une  
surface plane donnée..... =  $P$ .
- La valeur relative, prise arbitrairement, de la même résistance =  $p$ .
- La valeur absolue de la résistance qu'éprouve une surface  
quelconque  $X$ ..... =  $R$ .
- La valeur relative de la même résistance..... =  $r$ .
- L'espace parcouru..... =  $E$ .
- Le temps du mouvement..... =  $T$ .

2.° Soient pour un autre espace & un autre temps donnés:

- La valeur absolue de la résistance qu'éprouve la surface  $X$ .. =  $Q$ .
- L'espace parcouru..... =  $e$ .
- Le temps du mouvement..... =  $t$ .

Cela posé, on a d'abord par hypothèse,  $P : p :: R : r$ , &  
par conséquent  $r = R \times \frac{p}{P}$ ; d'un autre côté, l'expérience  
donne  $R : Q :: \frac{E^2}{T^2} : \frac{e^2}{t^2}$ ; donc  $R = Q \times \frac{E^2 t^2}{e^2 T^2}$ ;  
substituant cette valeur de  $R$  dans celle de  $r$ , on aura  
$$r = p \times \frac{Q}{P} \times \frac{E^2 t^2}{e^2 T^2}.$$

D'où l'on voit que connoissant par l'expérience les quan-  
tités  $P, E, T, Q, e, t$ , on connoitra le rapport de  $p$  à  $r$ ,  
c'est-à-dire le rapport de la résistance directe d'une surface  
plane donnée à la résistance d'une autre surface quelconque:  
pour une même vitesse laquelle a pour expression  $\frac{E}{T}$ .

## I V.

IL est à propos de remarquer que le rapport des deux résistances dont on vient de parler, sera le même pour toute autre vitesse  $\frac{E'}{T'}$ ; car soient  $P', p', R', E', T'$  les quantités analogues chacune à chacune des quantités  $P, p, R, r, E, T$ , tout le reste demeurant d'ailleurs le même; on trouvera, comme dans l'article précédent,

$$r' = p' \times \frac{Q}{P'} \times \frac{E'^2 r}{E^2 T'^2};$$

$$\text{or} \quad \frac{Q}{P'} \times \frac{E'^2 r}{E^2 T'^2} = \frac{Q}{P} \times \frac{E^2 r}{E'^2 T^2};$$

car suivant l'expérience,  $P : P' :: \frac{E^2}{T^2} : \frac{E'^2}{T'^2}$ . Donc

$$\frac{r'}{r} = \frac{p}{p'}.$$

On voit par-là que si on suppose  $p' = p$ , on aura aussi  $r' = r$ .

## V.

D'APRÈS ces principes, nous avons construit la Table ci-jointe, laquelle contient les rapports des résistances, suivant la théorie & suivant l'expérience, pour quinze sortes de proues angulaires. Ainsi nous supposons dans cette Table que la bale  $MN$ , qui est de 2 pieds, demeurant constamment la même, l'angle  $MQN$  d'une proue formée en triangle isocèle, est d'abord de 180 degrés (ce qui est le cas de la résistance directe ou perpendiculaire), puis de 168 degrés, puis de 156 degrés, puis de 144 degrés, ainsi de suite jusqu'à 12 degrés; nous représentons la résistance directe par le nombre arbitraire 10000, ensuite nous déterminons, par la théorie ordinaire & par les formules de l'article précédent, les valeurs relatives des résistances pour les angles proposés.

Fig. 13.

A a a ij

TABLE comparative des résistances sous même vitesse, pour une  
 Fig. 13. suite d'angles MQN, depuis 180 degrés jusqu'à  
 12 degrés.

S U I T E des A N G L E S M Q N.	RÉSISTANCES comparatives, suivant la THÉORIE.	RÉSISTANCES comparatives, suivant L'EXPÉRIENCE.	DIFFÉRENCES des deux suites précédentes.
Angle MQN = 180 <sup>d</sup>	10000.	10000.	0.
168.	9890.	9893.	3.
156.	9568.	9578.	10.
144.	9045.	9084.	39.
132.	8346.	8446.	100.
120.	7500.	7710.	210.
108.	6545.	6925.	380.
96.	5523.	6148.	625.
84.	4478.	5433.	955.
72.	3455.	4800.	1345.
60.	2500.	4404.	1904.
48.	1654.	4240.	2586.
36.	955.	4142.	3187.
24.	432.	4063.	3631.
12.	109.	3999.	3890.

## V I.

ON voit par cette Table, que les résistances effectives ne diminuent pas en même raison que les quarrés des sinus des angles d'incidence: l'expérience s'éloigne de plus en plus de la théorie, à mesure que les angles d'incidence deviennent plus petits. Il seroit facile de construire une courbe du genre parabolique, dont les ordonnées repréleroiént les résistances telles que l'expérience les donne: on pourroit remplir le même objet par la méthode de M. de la Grange, pour former

des Tables des Planètes d'après les seules observations, ou par celle que M. le Marquis de Condorcet a donnée pour déduire en général les loix des phénomènes d'après les observations; mais tous ces moyens exigent des calculs un peu longs pour la pratique. En considérant attentivement la suite des différences entre les résistances effectives & les résistances théoriques, nous avons observé qu'on pouvoit représenter les résistances effectives par une formule qui, sans être absolument générale, s'applique à un très-grand nombre de cas, & qui ne demande que des calculs numériques très-simples.

## V I I.

EN effet, chaque terme de la suite des différences dont il s'agit, étant l'excès de la résistance effective sur la résistance donnée par la théorie, & cette même suite allant toujours en montant, nous avons dit: la formule propre à représenter les résistances effectives, doit ou peut contenir 1.<sup>o</sup> le terme que donneroit la théorie; 2.<sup>o</sup> un terme ou un assemblage de termes dont la valeur aille toujours en augmentant suivant la loi de la suite proposée. Nommons  $x$  l'angle  $NMQ$ ;  $P$  la Fig. 134  
résistance directe de la base  $NM$ ;  $\phi$  la résistance que devoit souffrir, selon la théorie, la proue angulaire  $MQN$  dans le sens de la hauteur  $QR$ ; on aura, comme on sait,  $\phi = P \cos. x^2$ . Soit  $\pi$  la résistance effective de la même proue; & examinons s'il ne seroit pas possible de représenter les résistances effectives par une formule de cette espèce  $\pi = P \cos. x^2 + Mx^n$ , qui est la plus simple qu'on puisse employer sous le point de vue que nous venons d'exposer, & dans laquelle l'exposant  $n$  est un nombre au-dessus de zéro, afin qu'on ait  $\pi = P$ , lorsque  $x = 0$ .

## V I I I.

DANS la Table de l'article *V*, les angles  $x$  forment une progression arithmétique, dont la différence est égale au premier angle qui est de 6 degrés; ainsi en nommant  $q$  ce premier angle, & supposant  $P = 10000$ , on aura 1.<sup>o</sup>

# 374 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

cette suite d'équations :

$$P(\text{col. } 0)^2 = 10000, \quad P(\text{col. } q)^2 = 9890,$$

$$P(\text{col. } 2q)^2 = 9568, \quad P(\text{col. } 3q)^2 = 9045,$$

.....

$$P(\text{col. } 14q)^2 = 109.$$

2.° Supposons (si la chose est permise, ce qu'on verra dans un moment), que les termes de la suite des différences qui se trouvent entre les résistances effectives & les résistances théoriques, soient proportionnels chacun à chacun des termes de la suite :

$$0q^n, \quad 3q^n, \quad m(2q)^n, \quad m(3q)^n, \quad m(4q)^n,$$

.....

$$m(14q)^n,$$

en sorte qu'on ait

$$3 : 10 :: 3q^n : m(2q)^n :: 1 : \frac{m}{3} \times 2^n,$$

$$3 : 39 :: 3q^n : m(3q)^n :: 1 : \frac{m}{3} \times 3^n,$$

$$3 : 100 :: 3q^n : m(4q)^n :: 1 : \frac{m}{3} \times 4^n,$$

$$3 : 210 :: 3q^n : m(5q)^n :: 1 : \frac{m}{3} \times 5^n,$$

.....

$$3 : 3890 :: 3q^n : m(14q)^n :: 1 : \frac{m}{3} \times 14^n,$$

& par conséquent

$$m \times 2^n = 10, \quad m \times 3^n = 39, \quad m \times 4^n = 100,$$

.....

$$m \times 14^n = 3890.$$

En combinant successivement la première de ces équations avec chacune des autres, on trouvera pour  $n$  les valeurs suivantes :

$$n = \frac{\log. 39 - \log. 10}{\log. 3 - \log. 2} = \frac{591065}{176091} = 3,35, \text{ à peu-près,}$$

$$n = \frac{\log. 100 - \log. 10}{\log. 4 - \log. 2} = \frac{1000000}{301030} = 3,32;$$

$$n = \frac{\log. 210 - \log. 10}{\log. 5 - \log. 2} = \frac{132219}{397940} = 3,32;$$

$$n = \frac{\log. 380 - \log. 10}{\log. 6 - \log. 2} = \frac{1579784}{477121} = 3,31;$$

$$n = \frac{\log. 625 - \log. 10}{\log. 7 - \log. 2} = \frac{1795880}{544068} = 3,30;$$

$$n = \frac{\log. 955 - \log. 10}{\log. 8 - \log. 2} = \frac{1980003}{602060} = 3,28;$$

$$n = \frac{\log. 1345 - \log. 10}{\log. 9 - \log. 2} = \frac{2128722}{653213} = 3,26;$$

$$n = \frac{\log. 1904 - \log. 10}{\log. 10 - \log. 2} = \frac{2279667}{698970} = 3,26;$$

$$n = \frac{\log. 2586 - \log. 10}{\log. 11 - \log. 2} = \frac{2412629}{740363} = 3,25;$$

$$n = \frac{\log. 3187 - \log. 10}{\log. 12 - \log. 2} = \frac{2503382}{778151} = 3,21;$$

$$n = \frac{\log. 3631 - \log. 10}{\log. 13 - \log. 2} = \frac{2560026}{812913} = 3,13;$$

$$n = \frac{\log. 3890 - \log. 10}{\log. 14 - \log. 2} = \frac{2589950}{845098} = 3,06;$$

D'où l'on voit que la valeur de  $n$  est à peu-près constante, & que par conséquent celle de  $m$  l'est aussi; ainsi, la supposition que nous avons faite, relativement aux rapports des termes de la suite des différences, est sensiblement permise, du moins pour la plus grande partie de cette suite: la valeur moyenne de  $n$  est à très-peu de choses près, 3,25 ou  $3\frac{1}{4}$ , & celle de  $m$  est en conséquence 1,051; par conséquent, la formule approchée de la résistance sera

$$\Pi = 10000 \times \cos. x^2 + 3,153 \times \left(\frac{n}{s}\right)^{3\frac{1}{2}}.$$

## I X.

ON voit que nous ne proposons pas cette formule comme entièrement générale ; nous ne la donnons que pour les cas où l'angle d'incidence du fluide sur chaque face de la proue est un peu grand. Lorsque l'angle d'incidence du fluide est de 12 degrés, ce qui est le cas des Expériences *LXIV*, *LXV*, *LXVI*, le terme  $3,153 \times (\frac{x}{9})^{3\frac{1}{2}}$  devient 4766, tandis que l'expérience donne simplement 3631 ; la formule s'éloigne encore plus de la vérité pour de plus petits angles d'incidence.

Du reste, l'objection que la formule devrait donner la résistance nulle lorsque  $x = 90^d$ , n'a pas de fondement, 1.<sup>o</sup> parce que tous les triangles *NMQ* ayant la même base *NM*, il y aura toujours une résistance, même lorsque  $x = 90^d$ , puisque le bateau poussera toujours devant lui une colonne fluide dont la largeur est finie ; 2.<sup>o</sup> parce que l'angle  $x$  étant parvenu aux environs de  $90^d$ , la proue s'allonge considérablement ; d'où il résulte que le frottement du fluide le long des parois du bateau, peut augmenter au point de former une résistance sensible, comparable & additive à celle qui provient du choc de l'eau.

## X.

▼ Mémoires de  
l'Acad. 1763.

QUELLE que soit la loi de la résistance des proues angulaires simples, elle n'est pas applicable aux proues polygones & curvilignes, ou du moins elle n'y est applicable qu'avec des modifications ou des coefficients que nous n'avons pu découvrir jusqu'ici. M. le Chevalier de Borda avoit déjà remarqué\* que la théorie ordinaire donne les résistances des surfaces courbes plus grandes qu'elles ne se trouvent par l'expérience, tandis qu'au contraire l'expérience donne les résistances des surfaces planes plus grandes qu'elles ne se trouvent par la théorie. Nous avons fait la même observation, & nous en avons constaté la justesse par un grand nombre d'expériences où nous avons employé des proues composées de parties planes



planes & de parties angulaires, & des proues circulaires : ainsi, par exemple, les Expériences cotées ci-dessus, *LXX*, *LXXI*, *LXXII*, font voir que la proue demi-circulaire éprouve une résistance qui est à celle du diamètre *MN*, comme 13 est à 25 environ, tandis que suivant la théorie ordinaire, ces deux résistances devroient être entr'elles comme les nombres 2 & 3 ; au contraire, selon l'expérience, la proue angulaire *MQN* pour l'angle *Q* de  $90^d$ , éprouve une résistance qui est à celle du diamètre *MN*, comme 29 est à 50 environ, tandis que suivant la théorie, ces deux résistances devroient être entr'elles comme les deux nombres 1 & 2 ; d'où l'on voit que la résistance des proues curvilignes & celle des proues angulaires simples, contredisent en sens opposé la théorie ordinaire. Nous n'avons point encore trouvé de formule propre à représenter généralement ces deux espèces de résistances. Pour espérer de parvenir à une telle formule, il faudroit faire directement des expériences sur des proues polygones ou curvilignes d'un très-grand nombre d'espèces ; mais on sent combien un pareil travail seroit long, pénible & dispendieux : il y a un autre moyen de parvenir au même but, c'est d'étudier avec attention dans les bateaux ordinaires, dans les Vaisseaux flottans à la mer, les propriétés dépendantes de la résistance du fluide, & de combiner l'effet de cette résistance avec la forme de la carène. Des Tables construites sur de semblables observations, variées & multipliées, serviroient à déterminer la loi de la résistance, & à régler la proportion des parties de chaque Vaisseau, relativement à son objet : les défauts, qui se glissent presque inévitablement dans les constructions de toutes les machines, pourroient être ensuite corrigés, du moins en grande partie, par le moyen de l'arrimage. Nous ne pouvons pas répondre d'une manière plus précise à la première des questions qui ont été proposées dans le Scholie du chapitre précédent.

Fig. 16.

## X I.

LA seconde question de ce Scholie, *si la proue demeurant*  
*Mém. 1778.* B b b

## 378 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

la même, une poupe plus ou moins alongée fait diminuer la résistance, est plus simple; & nous pouvons y répondre avec une certaine précision. En comparant les *Expériences LXXVI, LXXVII*, chacune avec chacune des *Expériences III, V*; les *Expériences LXXVIII, LXXIX, LXXX*, chacune avec chacune des *Expériences III, IV, V*; & l'*Expérience LXXXI* avec l'*Expérience III*: on voit qu'une poupe alongée fait augmenter sensiblement la vitesse du sillage; & comme on connoît par ces expériences les rapports des temps employés à parcourir un même espace, on est en état de déterminer les rapports des résistances: ainsi, par exemple, on trouvera que sous même vitesse le bateau de la *Figure 12*, garni d'une poupe triangulaire isocèle, dont l'angle du sommet est de 48 degrés, éprouve une résistance moindre que celle qu'il éprouvoit quand il n'avoit pas de poupe, dans le rapport de  $15\frac{1}{4}$  à 14 environ.

## X I I.

LA troisième question du même Scholie, si la longueur d'un vaisseau influe sur la vitesse du sillage, est en quelque sorte comprise dans les précédentes, & se résout par les mêmes moyens. Il est constant, par nos *Expériences de 1775*, que les résistances perpendiculaires de différentes surfaces planes, pour une même vitesse, sont sensiblement proportionnelles aux étendues de ces surfaces; mais, comme nous l'avons déjà observé dès ce temps-là, cette loi n'a lieu que pour des bateaux qui ont une certaine longueur relative à leur largeur. Aujourd'hui, si l'on compare l'*Expérience LXXXII* avec l'*Expérience II*, on trouvera que pour une même vitesse la résistance du bateau de la *Figure 14* est à la résistance du bateau de la *Figure 12*, comme 31 est à 11 à peu-près, tandis que si la loi citée avoit lieu généralement, les deux résistances devroient être comme les nombres 22 & 11. La raison pour laquelle le bateau de la *Figure 14* éprouve une si grande résistance, est qu'il a trop de largeur comparativement à sa longueur ou à la dimension, suivant le sens de laquelle il est mu; d'où

il résulte que le fluide écarté par-devant, n'a pas une liberté suffisante pour couler le long du bateau, & pour venir occuper le creux qui se forme à l'arrière. Il existe donc dans tous les cas un certain rapport entre la largeur & la longueur d'un Vaisseau, pour que la vitesse du sillage acquiesse toute la plénitude dont elle est susceptible; mais quel est ce rapport? Il dépend visiblement en partie de la direction des molécules fluides, en partie de la forme de la carène, & en partie de la vitesse même du sillage: vainement on entreprendroit de le soumettre aux formules de l'analyse; les élémens de la question sont trop compliqués, trop peu appréciables, trop mêlés ensemble; mais les *Expériences LXXVI, LXXVII, LXXVIII, LXXIX, LXXX, LXXXI*, où le bateau de la *Figure 12* a une poupe angulaire, étant combinées avec les expériences *I, II, III, IV, V*, où le même bateau est dépourvu d'une poupe angulaire, font voir que pour la résistance directe & pour des vitesses de 2 ou 3 pieds par seconde, la longueur du Vaisseau doit être au moins triple de sa largeur, si l'on veut que la vitesse du sillage atteigne son *maximum*. Si la vitesse étoit plus grande, le rapport de la longueur du Vaisseau à sa largeur seroit aussi plus grand. Nous n'avons pas besoin d'ajouter que la longueur étant une fois suffisante pour la vitesse du sillage, on ne pourroit que diminuer cette vitesse en augmentant la longueur du Vaisseau, puisqu'on augmenteroit par-là le frottement le long de ses côtés; mais il faut avouer que ce frottement est peu sensible, & qu'il ne le deviendrait que sur des longueurs considérables.

## XIII.

ENFIN la quatrième question proposée également dans le Scholie cité, au sujet des changemens qui peuvent arriver dans la vitesse du sillage, lorsque l'on couvre d'une pointe triangulaire le milieu d'une proue plane, ou d'une poupe plane, va s'éclaircir par les *Expériences LXXXIII, LXXXIV, LXXXV, LXXXVI*; elle embrasse, comme on voit, deux

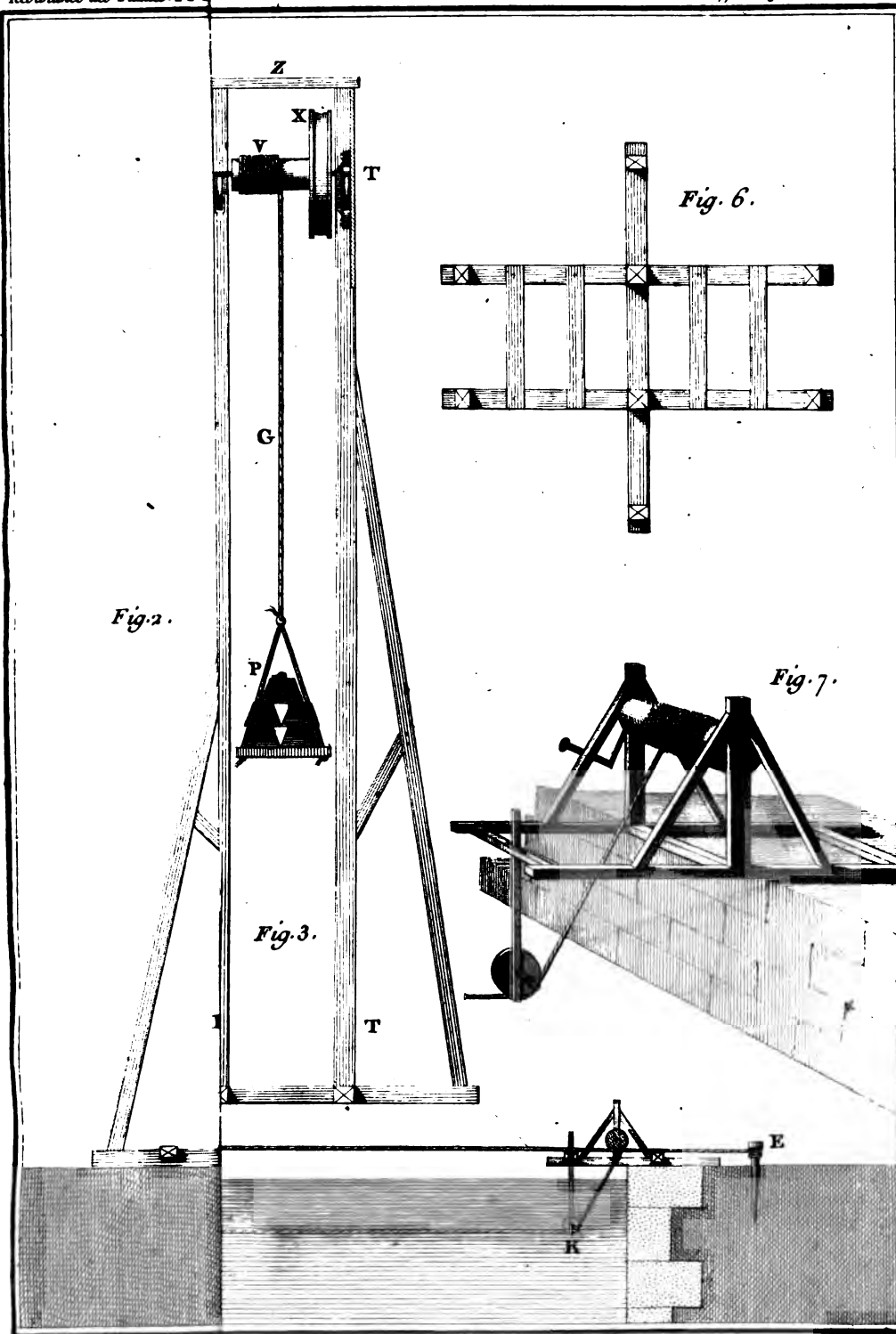
B b b ij

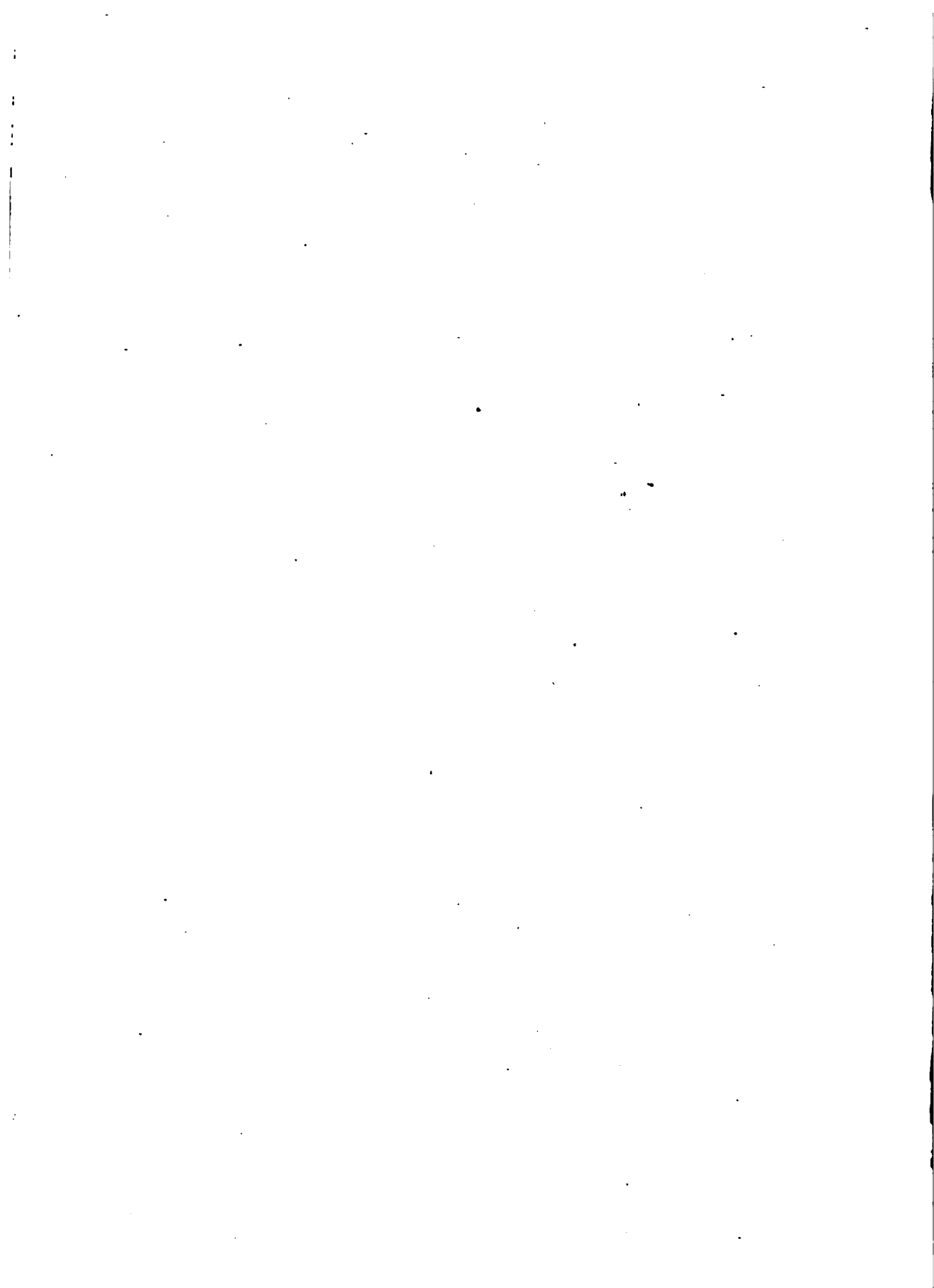
objets. Ce qui a donné lieu au premier de ces Problèmes, est que le fluide allant choquer perpendiculairement les surfaces planes  $PK$ ,  $HM$ , doit se détourner moins facilement de sa direction, que si les parties  $KO$ ,  $HN$  étoient enlevées, ou que le bateau eût à l'avant une forme semblable à celui de la *Figure 13*; d'où il paroît s'ensuivre que la résistance de la proue  $KQN$ , doit augmenter. Les *Expé-*

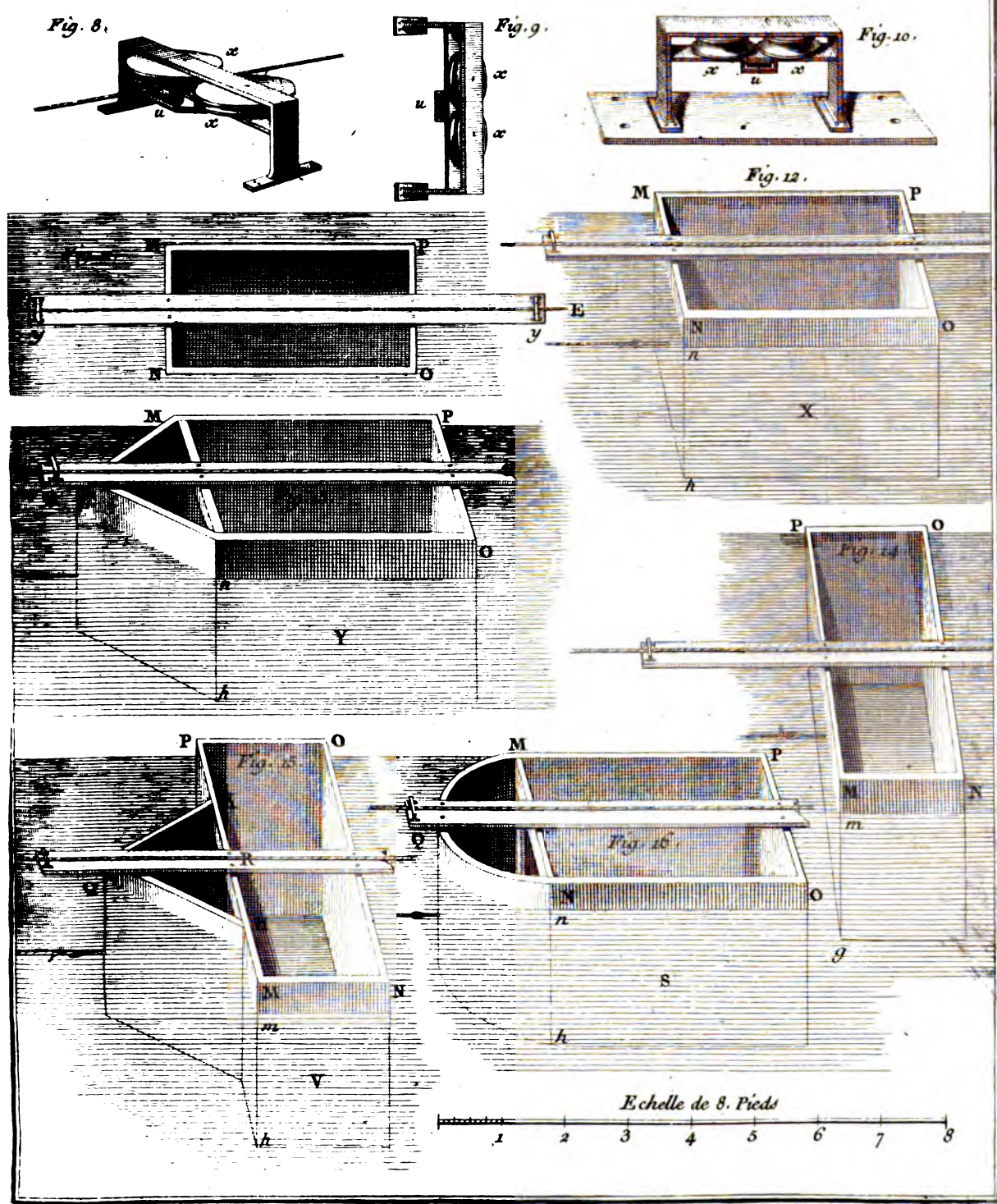
*Fig. 15. riences LXXXIII, LXXXIV*, prouvent que cette conjecture est fondée; car il résulte de l'*Expérience LXXXII*, que le système des deux surfaces  $PK$ ,  $HM$ , tiré par un poids de  $56^{\text{liv.}}$ ,  $25$ , parcourroit 72 pieds en 72 secondes, ou que le même système, tiré par un poids de 81 livres, parcourroit 72 pieds en 60 secondes, qui font la durée de l'*Expérience LXXXIII*. Retranchant 81 livres de  $112^{\text{liv.}}$ ,  $5$ , le reste  $31^{\text{liv.}}$ ,  $50$  sera le poids qui tire la proue  $KQN$  dans le cas de l'*Expérience LXXXIII*; or si cette proue étoit isolée, ou que les deux parties planes  $PK$ ,  $MH$  fussent enlevées, on trouveroit, au moyen de l'*Expérience LXIV* & de la loi pour les vitesses d'un même bateau; on trouveroit, dis-je, que la proue dont il s'agit, étant tirée simplement par un poids de  $23^{\text{liv.}}$ ,  $53$ , parcourroit 72 pieds en 60 secondes; d'où l'on voit que la proue  $KQN$ , dans le cas de l'*Expérience LXXXIII*, éprouve une plus grande résistance que si elle étoit isolée: la même chose se conclut par l'*Expérience LXXXIV*.

Quant à la seconde partie de la question, on trouve, en comparant l'*Expérience LXXXV* avec l'*Expérience LXXXII*, que la poupe  $KQH$  fait diminuer la résistance, ce qui rentre dans l'article *XI*.













## QUATRIÈME MÉMOIRE

### SUR L'ANATOMIE DES OISEAUX.

*De la structure de l'organe de l'Ouïe des Oiseaux comparé avec celui de l'Homme, des Quadrupèdes, des Reptiles & des Poissons.*

Par M. VICQ-D'AZYR.

DE toutes les propriétés particulières aux Animaux, la sensibilité est celle qui les distingue le mieux d'avec les corps dont ils se rapprochent le plus, tels que les Plantes : ceux dans lesquels elle a le plus d'influence, sont regardés comme les plus parfaits, & la pulpe nerveuse qui en est le siège, semble être destinée à établir une liaison constante entre les corps auxquels elle appartient & tout ce qui les environne.

Lû  
à la Séance  
publique  
de la  
S.<sup>e</sup> Martin,  
1778.

C'est pour cette raison que la description des nerfs & celle des organes des sens, dans lesquels ils se distribuent, ont toujours fixé l'attention des Physiciens ; mais il ne suffit pas de connoître leur développement dans une classe d'animaux, ce n'est qu'en faisant un tableau dont l'anatomie comparée peut seule offrir l'ensemble, qu'il est possible de déterminer leurs rapports & leur étendue respective dans le système général des corps organiques.

Il est vrai que pour obtenir des résultats satisfaisans, on doit supposer un nombre prodigieux de connoissances acquises dans l'anatomie des différens Animaux : il s'en faut bien que l'on soit assez avancé pour que l'histoire de tous les sens puisse être traitée de cette manière.

L'organe de l'ouïe est un de ceux que l'on a examinés avec le plus de soin, sur-tout dans l'homme & dans les quadrupèdes.

Nous avons cru devoir placer ici une courte description de l'oreille de l'homme, que l'on peut regarder comme le modèle le plus parfait, & qui d'ailleurs sera le point central de toutes nos comparaisons dans ce Mémoire.

En dehors, une conque figurée comme un pavillon, & un conduit externe tortueux & oblique, sont destinés à transmettre les sons jusqu'à une membrane élastique & tendue comme celle d'un tambour : les frémissemens de cette membrane ébranlent trois osselets que deux muscles meuvent & qui sont placés dans la cavité du tympan ; celle-ci communique avec la bouche par un conduit appelé *trompe d'Eustache* ; avec la partie postérieure de la tête, par les cellules mastoïdiennes ; & avec le labyrinthe, par deux ouvertures, appelées des noms de *fenêtre ronde & ovale* ; un des osselets qui est implanté dans la dernière, propage le mouvement jusqu'au labyrinthe ; ses impressions y sont reçues par une pulpe nerveuse qui se distribue dans trois conduits ovales & demi-circulaires & dans une spire osseuse très-élégamment contournée, & que l'on a comparée à un limaçon : une humeur lymphatique maintient la souplesse de cette pulpe & peut être resorbée dans l'intérieur du crâne par deux conduits appelés *aqueducs de Cotunni*.

On sait que ces grosses masses vivantes qui habitent les mers les plus profondes, & que l'on connoît sous le nom de *cétacées*, sont pourvues de l'organe de l'ouïe : le poisson muet est sensible à l'impression des sons, sans pouvoir en produire aucun ; l'animal qui rampe, le froid reptile, entend aussi, & la structure de son oreille n'a point échappée à la curiosité des Anatomistes. M.<sup>rs</sup> Geoffroy & Camper sont ceux qui se sont le plus distingués dans ce genre de recherches (a).

C'est pour compléter ces travaux, que je me suis déterminé

---

(a) J'ai aussi donné la description de l'organe de l'ouïe des Poissons, dans deux Mémoires sur l'anatomie de ces animaux, imprimés parmi ceux des Savans étrangers.

à faire connoître l'organe de l'ouïe des oiseaux dans tous ses détails.

Leur voix est très-étendue, & dans un grand nombre d'espèces, elle est très-mélodieuse; un double larynx & une trachée-artère très-mobile, & quelquefois même singulièrement recourbée, en sont les instrumens; mais un animal qui produit une suite de sons, doit prendre quelque plaisir à les entendre: la mélodie de la voix suppose donc une grande perfection dans l'oreille des oiseaux.

Parmi les Anciens, *Ælien* (*lib. II, cap. 12*), *Aristote.* (*lib. IX, cap. 39*), *Pline*, en ont à peine eu quelque connoissance; ils avoient seulement observé que les oiseaux sont très-sensibles au bruit, que l'éducation peut leur apprendre à former les sons les plus agréables, & que cependant ils manquent d'oreille externe. Parmi les Modernes, *Aldrovande*, *Peyer* (*Obs. p. 45*), *Derham* (*b*), *Pérault* & *Brich*, ont parlé de l'osselet que le tympan contient; il en est aussi fait mention dans les *Transactions Philosophiques*, n.º 199, & *Haller* l'a décrit dans le tome V.º de sa *Physiologie*, p. 213. La trompe qui établit une communication entre le tympan & la partie interne & postérieure du bec, est annoncée dans le n.º 119 des *Transactions Philosophiques*; enfin les conduits demi-circulaires ont été décrits par *Pérault*, qui en a même donné une figure, accompagnée d'une explication très-succincte, par *Schelammer*, & dans les *Transactions Philosophiques*, n.º 199.

Mais quoique les parties les plus essentielles à l'organe de l'ouïe des oiseaux soient connues, elles n'ont pas été décrites avec assez de soin; il y en a d'ailleurs quelques-unes dont on n'a fait aucune mention, & nul auteur n'en a présenté l'ensemble.

Afin de remplir le mieux qu'il nous sera possible l'objet que nous nous proposons dans ce Mémoire, nous donnerons

---

(b) *Derham* l'a représenté dans la vingt-troisième figure qui est très-défectueuse; il place un triangle sur l'osselet, & la longue branche n'y est point exprimée. Voyez aussi *Blas. anat. planche 42, fig. 3.*

# 384 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

d'abord une explication exacte de la structure de cet organe; nous le comparerons ensuite avec celui des autres animaux qui en sont pourvus, & nous finirons en faisant quelques réflexions sur la perception des sons en général.

## ARTICLE PREMIER.

UN examen attentif de l'organe de l'ouïe des oiseaux présente le conduit auditif externe, la membrane du tympan, le tympan lui-même, l'osselet conique qu'il renferme, les cellules osseuses communicantes, le conduit qui tient lieu de trompe d'Eustache, le labyrinthe, les conduits demi-circulaires, le conduit droit, le nerf auditif & les ouvertures auditives internes.

Conduit auditif externe.

1.° Dans la région externe, on aperçoit le conduit auditif; il est environné de plumes qui ont une structure particulière: elles sont divisées en un grand nombre de filets longs, grêles, égaux de chaque côté & assez écartés les uns des autres, comme on peut le voir dans la *figure 7*; presque tous les oiseaux ont ces plumes arrangées symétriquement sur plusieurs lignes; elles sont très-élégamment disposées dans le coing ordinaire, ainsi que dans celui dont le bec est surmonté par un appendice, dans l'alouette de Cayenne, dans la tourterelle des bois, & même dans le roitelet; dans quelques-uns, leur forme est des plus agréables; l'oiseau-mouche huppé de Cayenne & l'oiseau-mouche à oreilles, en fournissent des exemples: dans l'oiseau de Paradis à gorge dorée, décrit par M. Sonnerat, & connu maintenant sous le nom de *ffilet*, elles sont très-longues & terminées par une lentille de belle couleur; dans le grand & le petit duc, elles forment une espèce de bouquet; dans le chat-huant, toutes les plumes qui environnent les yeux & le bec, ont le même caractère; dans le cazoar & dans l'autruche, au contraire, les parties latérales de la tête sont nues & absolument à découvert.

Le conduit auditif des oiseaux est ligamenteux, oblique, arrondi, assez court, soutenu sur un bord creux qui le rétrécit &

& très-mobile ; le muscle crotaphyte adhère à la paroi antérieure ; deux petits muscles sont situés en bas & en arrière, & paroissent destinés à le mouvoir & à redresser les plumes qui sont courbées sur son ouverture.

2.<sup>o</sup> La membrane du tympan, placée au fond du conduit auditif, est tournée en devant, elle s'insère à un contour assez inégal ; sa forme est ovale, & son volume est très-grand par rapport à celui de l'oiseau ; elle fait une saillie en dehors ; on y trouve trois lames, l'interne & l'externe sont fournies par le périoste ; la lame moyenne est très-mince, transparente & imperforée. La figure 5 représente la membrane du tympan en *L, B.*

Membrane  
du tympan,

3.<sup>o</sup> Le tympan offre une cavité qui est simplement arrondie dans quelques oiseaux, comme dans les gallinacées, & qui, dans la chouette & dans plusieurs autres, est divisée par une saillie transversale : ces différences sont exprimées dans la première & dans la troisième figure. J'ai trouvé cinq ouvertures principales dans le tympan, trois conduisent au tissu cellulaire osseux ; la première est très-élevée & se dirige obliquement ; la seconde est située dans le tissu réticulaire de la base du crâne ; la troisième est placée en arrière : on les voit en *A, D, C.* Les deux autres sont, 1.<sup>o</sup> celle qui communique avec le labyrinthe, & qu'on appelle la *Fenêtre ovale* ; 2.<sup>o</sup> l'orifice de la trompe d'Eustache, que j'ai été surpris de trouver aussi considérable : ces deux ouvertures sont représentées en *D, E.*

Le tympan,

Fig. 1.

Idem.

4.<sup>o</sup> Un osselet conique, appelé *collumella* par Schellammer, est placé dans le tympan ; sa base qui ressemble à un petit paralol, est fermée par une plaque osseuse arrondie, qu'une membrane assujettit dans l'ouverture ovale ; le manche ou pétiole, plus étroit dans le milieu, augmente un peu de volume auprès de la membrane du tympan à laquelle il adhère ; dans ce contact, on voit deux petites branches de longueur inégale qui font un angle aigu avec le manche de l'osselet. Il m'a semblé quelquefois qu'une de ces deux branches étoit musculaire ; la plus longue ne se trouve pas dans tous

L'osselet,

Mém, 1778.

C c c

### 386 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

les oiseaux; je l'ai observée constamment dans les gallinacées; elle est très-déliée, & elle se porte le long de la membrane du tambour, à peu-près suivant la direction de la trompe d'Eustache; l'autre, plus courte, plus grosse, & qui se trouve dans tous les oiseaux, s'attache à la même membrane dont elle mesure la convexité, & elle s'insère auprès de l'ouverture ovale; on les voit toutes deux en *f, g*, où l'osselet est représenté en *DE*: ce dernier est quelquefois environné par plusieurs filets ligamenteux très-fins; on n'y observe rien de plus: Derham a donc eu tort de le représenter comme surmonté par un appendice triangulaire qui débordé des deux côtés.

Fig. 5.

Cellules communicantes.

5.° Tout l'appareil de l'organe de l'ouïe, dans les oiseaux, est entouré par un tissu spongieux très-étendu, dont les cellules communiquent entr'elles d'un côté de la tête à l'autre & avec le tympan; la base du crâne est également creusée par des cavités réticulaires qui s'étendent jusqu'à la membrane supérieure, de sorte que les conduits demi-circulaires se trouvent comme isolés, & placés librement au milieu d'un espace assez considérable: ces cavités paroissent en *E, F*.

Fig. 6.

Trompe d'Eustache.

6.° Le conduit qui tient lieu de la trompe d'Eustache, est étroit & un peu aplati; il est placé en bas, & il s'ouvre antérieurement vers les deux petites faces articulaires sur lesquelles le mouvement de la partie supérieure du bec s'exécute.

Labyrinthe.

7.° La cavité du labyrinthe est ronde & fort étroite; une pulpe nerveuse très-fine y est répandue; une seule ouverture communique avec le tympan, & c'est par le moyen de l'osselet conique implanté dans cette ouverture, que la pulpe nerveuse est ébranlée.

Conduits demi-circulaires.

8.° Les conduits demi-circulaires sont au nombre de trois; deux, inégaux en grandeur, sont verticaux; le troisième est horizontal: le grand conduit vertical est incliné de devant en arrière; le petit conduit perpendiculaire est situé obliquement de droite à gauche, & il coupe les deux autres à angle droit: le conduit demi-circulaire horizontal, s'ouvre par les

deux extrémités au niveau de celles du grand conduit perpendiculaire. J'ai trouvé dans plusieurs oiseaux des renflemens vers leurs orifices, qui en augmentent l'étendue & la surface : on voit ces trois conduits dans la *figure 2*, & les renflemens dans la *figure 6*, en *H*, *C*.

9.<sup>o</sup> On aperçoit à la partie interne du labyrinthe un prolongement figuré, comme une portion de conduit demi-circulaire, avec cette différence qu'il est droit ; il forme en bas & en arrière une espèce de cul-de-sac. Pérou le regardoit comme un limaçon ; mais outre qu'il n'y a ni rampe, ni cloison quelconque, il ne communique point immédiatement avec le tympan par une ouverture qui puisse être comparée à la fenêtre ronde, de sorte qu'il n'a aucun des caractères du *socle* : on le voit en *HI* & en *D*.

Conduit droit;

Fig. 2 &amp; 6.

10.<sup>o</sup> Dans la région interne & postérieure du crâne, on trouve quatre ou cinq ouvertures remarquables ; deux plus grandes ne communiquent point avec l'organe de l'ouïe ; deux plus petites donnent passage aux nerfs qui y sont destinés.

Trous & nerfs  
auditifs.

La plus grande de ces ouvertures est placée au milieu d'une excavation étroite & circulaire, qui répond au grand conduit vertical. Je l'ai prise au premier coup-d'œil pour le conduit auditif interne ; mais elle ne contient qu'un prolongement de la substance cérébrale, avec quelques vaisseaux qui m'ont paru sortir par son extrémité.

La seconde des ouvertures, qui ne communique point avec l'organe de l'ouïe, est située en bas & en arrière.

Les nerfs auditifs naissent de la moëlle allongée près du cervelet ; ils passent par deux ouvertures très-rapprochées & fort étroites, qui sont représentées en *B*, *E* ; ils sont eux-mêmes très-minces ; un des deux est plus gros & fait un trajet plus considérable.

Fig. 4.

J'ai cru que je rendrois mon travail plus complet en recherchant la structure de l'organe de l'ouïe dans l'autruche, qui, comme l'on sait, est un oiseau très-pesant & pour ainsi dire attaché à la surface de la terre ; & dans la chauve-

fouris, animal dont la forme bizarre semble réunir les caractères des quadrupèdes avec ceux des oiseaux, & qui habitant le même élément que ces derniers, pourroit être soupçonné d'avoir dans la structure de l'oreille, de grands rapports avec eux. M. Daubenton m'ayant procuré une tête d'autruche, je l'ai disséquée avec beaucoup d'attention ; les conduits demi-circulaires m'ont paru peu étendus & fort étroits, vu le grand volume de l'oiseau, & je n'y ai trouvé que l'ébauche du conduit droit : l'organe de l'ouïe de l'autruche n'est donc pas aussi-bien développé que celui des autres oiseaux ; ceux-ci étant en effet souvent placés au centre d'une sphère très-étendue, avoient besoin de conduits auriculaires très-ouverts & très-vibratils.

Pour ce qui est de la chauve-souris, l'organe de l'ouïe de cet animal, dont aucun Anatomiste n'a fait la description, l'éloigne de la structure des oiseaux pour le rapprocher de celle des quadrupèdes : la dissection m'y a fait voir un pavillon cartilagineux très-ample ; un tympan formé par une cavité sphérique & transparente ; une membrane qui s'y inséroit obliquement ; trois osselets dont un tenoit lieu de marteau, avec une apophyse grêle très-prolongée, & un muscle très-exprimé, un limaçon contenu dans un tubercule que le tympan renfermoit, & trois conduits demi-circulaires.

Les oiseaux dont j'ai disséqué l'organe de l'ouïe, sont le Coq-d'Inde, la Poule, le Pigeon, la Chouette, la Pie, le Geai, la Tourterelle, le Pic-vert, le Canard, le Moineau & le Serin.

## ARTICLE II.

LA description qui a été faite de l'organe de l'ouïe des oiseaux, la force & la mélodie de leur voix, & sur-tout cette extrême sensibilité au bruit, qui en les avertissant du moindre danger, rend leur fuite aussi prompte qu'utile en une infinité de circonstances, suffisent sans doute pour faire connoître combien ce sens est parfait dans cette classe d'animaux ; mais nous en apprécierons plus facilement les rapports



en comparant les différentes parties qui le composent, avec celles que l'Anatomie a démontrée dans l'oreille de l'homme, des quadrupèdes, des reptiles & des poissons.

La conque auditive sert dans l'homme & dans les quadrupèdes à réunir & à diriger les vibrations sonores vers le tympan; cette partie manque dans les oiseaux; elle auroit peut-être nuï dans le vol, en augmentant le poids & l'étendue des parties antérieures du corps : dans plusieurs reptiles & dans les poissons, il n'y a pas même de conduit auditif externe.

L'usage de la membrane du tambour est de transmettre le son jusqu'au labyrinthe, par l'intermède d'un ou de plusieurs osselets; elle est très-grande & très-déliée dans l'oiseau, où elle fait une saillie en dehors; dans l'homme, elle en fait une en dedans; dans les reptiles & dans les poissons, elle est très-épaisse; & dans quelques-uns même, elle ne diffère pas de la peau qui recouvre le reste du corps.

La cavité du tympan est moins grande, relativement au volume du corps dans l'homme & dans les quadrupèdes, que dans les oiseaux; la conque, en réunissant un plus grand nombre de vibrations sonores, supplée peut-être dans les premiers à l'étendue du tympan; & cette étendue est nécessaire dans les oiseaux, qui, comme nous l'avons dit, n'ont pas de conque auditive : dans les reptiles, le tympan est étroit; & dans les poissons, il existe à peine; on ne trouve d'ailleurs la corde du tambour ni dans ces derniers, ni dans les oiseaux.

Dans l'homme & dans les quadrupèdes, la cavité du tympan est agrandie par des cellules, qu'on appelle *mastoi-diennes*, & un assemblage de petits grains osseux recouvre les conduits demi-circulaires & le limaçon; dans les oiseaux, ces cellules n'existent point à la vérité, mais un réseau osseux très-étendu y supplée, & environne tous les conduits qui sont presque isolés; la force des vibrations doit être augmentée par les ondulations de l'air qui y circule avec facilité; les ouvertures qui établissent une communication entr'elles & le

tympan, sont plus nombreuses dans les oiseaux que dans tous les autres animaux connus : on n'y trouve point de fenêtre ronde, non plus que dans les reptiles ; dans les poissons, il n'y a pas même de fenêtre ovale.

Quelques reptiles, tel que la Grenouille, ont, suivant la remarque de M. Geoffroy, la trompe d'Eustache courte & large ; dans les oiseaux au contraire, elle est longue & étroite.

Les osselets du tympan sont destinés à communiquer le mouvement jusqu'à la fenêtre ovale : dans tous les animaux qui ont un limaçon, on trouve trois osselets, le marteau, l'enclume & l'étrier ; cette conformation est celle de l'homme & des quadrupèdes ; les oiseaux qui manquent de limaçon, n'ont qu'un osselet ; dans quelques-uns des reptiles qui ont des extrémités, il est figuré en platine comme dans l'oiseau. La *figure 8* présente celui de la tortue, dégagé de toute adhérence ; il est très-alongé ; on le voit en place dans la *figure 9* en *ED*, & il tient à la membrane du tympan représentée en *D* dans la *figure 10* ; celui du caméléon est plus grêle ; la platine est fort étroite, & il se termine vers l'autre extrémité par un léger renflement ; on le voit dans la *figure 11* en *DEf*, où cet osselet est isolé, & dans la *figure 12* où il occupe la place naturelle en *G*. Ces trois dessins ont été faits par M. Geoffroy lui-même, qui a bien voulu me permettre d'en faire usage : j'ai cru que cette courte description, en servant de pièce de comparaison pour mon travail, compléteroit celui des Anatomistes sur l'organe de l'ouïe des reptiles qui ont des extrémités ; dans les reptiles alongés, l'osselet est très-irrégulier ; dans l'oiseau, il supplée à l'étrier, & il est, comme lui, placé dans la fenêtre ovale : les deux appendices paroissent répondre au marteau & à l'enclume. Dans les poissons épineux, on trouve trois osselets aplatis & situés sur la pulpe auditive ; & dans les cartilagineux, une substance friable comme de l'amidon, en tient la place ; mais il est essentiel de remarquer que c'est dans le crâne qu'elle se trouve, ainsi que les osselets, & non dans le tympan, dont les poissons sont dépourvus.

Les conduits demi-circulaires sont également au nombre de trois dans presque tous les animaux, si l'on en excepte peut-être quelques-uns des reptiles qui n'ont point d'extrémités; mais c'est dans les oiseaux où, eu égard au volume du corps, ils ont incomparablement le plus d'étendue, & où ils sont d'ailleurs le plus élégamment contournés; ceux de l'homme se terminent sur le même niveau : dans l'oiseau, le petit conduit vertical descend plus bas que le grand, de toute la moitié de son segment.

Les reptiles & les poissons n'ont rien qui ressemble au limaçon; dans les oiseaux, un conduit droit y supplée.

Tous les animaux dans lesquels on trouve la conque auditive, les trois osselets & le limaçon, ont aussi un conduit auditif interne : dans les oiseaux & dans les reptiles au contraire, les deux ouvertures nerveuses sont placées au niveau de la surface interne du crâne; de sorte que l'organe de l'ouïe des oiseaux, quoique beaucoup plus parfait que celui des reptiles, a cependant avec lui des rapports constants.

Nous n'avons point parlé des insectes, parce que, quoique plusieurs, tels que la sauterelle & le grillon, appellent leurs femelles, on ignore cependant jusqu'ici comment la perception des sons se fait dans ces animaux.

### ARTICLE III.

Ce Tableau de comparaison, qui prouve combien les travaux des Modernes ont avancé l'anatomie de l'Oreille, fournit immédiatement les conséquences suivantes :

1.<sup>o</sup> L'existence des osselets, si elle n'est pas essentielle, est au moins très-utile pour la perception des sons, puisqu'on la trouve sans aucune exception dans tous les animaux susceptibles de les entendre; mais il n'est pas nécessaire qu'il y en ait plusieurs, puisqu'un seul suffit aux oiseaux & aux reptiles.

2.<sup>o</sup> Il est également démontré que les conduits demi-circulaires sont une partie essentielle à l'organe de l'ouïe, puisqu'ils existent dans tous les animaux où cet organe a été aperçu & bien décrit.

3.<sup>o</sup> Enfin le limaçon, qui est particulier à l'homme & aux quadrupèdes, n'est pas indispensablement nécessaire aux fonctions de l'oreille interne, puisque les oiseaux qui en sont dépourvus entendent très-bien.

Il y a apparence ( nous prions que l'on veuille bien nous permettre cette conjecture ) que le limaçon forme avec les conduits demi-circulaires, dans chaque oreille, un double instrument composé de deux parties très-distinctes, dans lesquelles la perception des sons se fait séparément, mais avec des rapports déterminés, ce qui doit ajouter à l'harmonie, à la sensibilité, & pour ainsi dire à l'intelligence de l'organe.

Ne pourroit-on pas d'après ces réflexions, considérer le sens de l'ouïe sous un double point de vue ; premièrement, par rapport aux parties essentielles à sa structure, qui sont une membrane, au moins un osselet, des conduits demi-circulaires & une pulpe nerveuse ; secondement, par rapport à ses parties accessoires, qui sont la conque, le conduit auditif interne, plusieurs osselets, des muscles, la corde du tympan, & surtout le limaçon ? Ainsi les animaux dans lesquels on a démontré cet organe, pourroient être divisés en deux classes ; les uns réunissent en effet toutes les parties qui le constituent ; les autres ont seulement celles que nous avons dit lui être essentielles. L'homme & les quadrupèdes doivent être rangés dans le premier ordre : outre que les oiseaux sont à la tête du second, on peut encore ajouter qu'ils ont les parties essentielles à l'organe de l'ouïe, les seules dont ils soient pourvus, beaucoup plus développées que l'homme & tous les autres animaux ; de sorte que le sens de l'ouïe dans les oiseaux est aussi parfait qu'il est simple, & jusqu'à ce que l'on ait déterminé avec plus d'exactitude l'usage de la lame spirale du limaçon qui leur manque, nous ne croyons pas que l'on puisse rien dire de plus précis sur la place qu'il convient de leur assigner,



SECOND

Fig. 3.

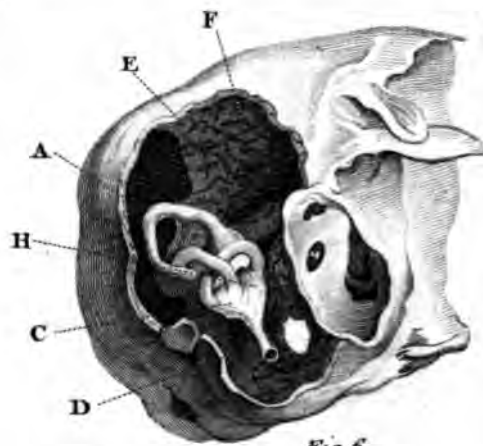
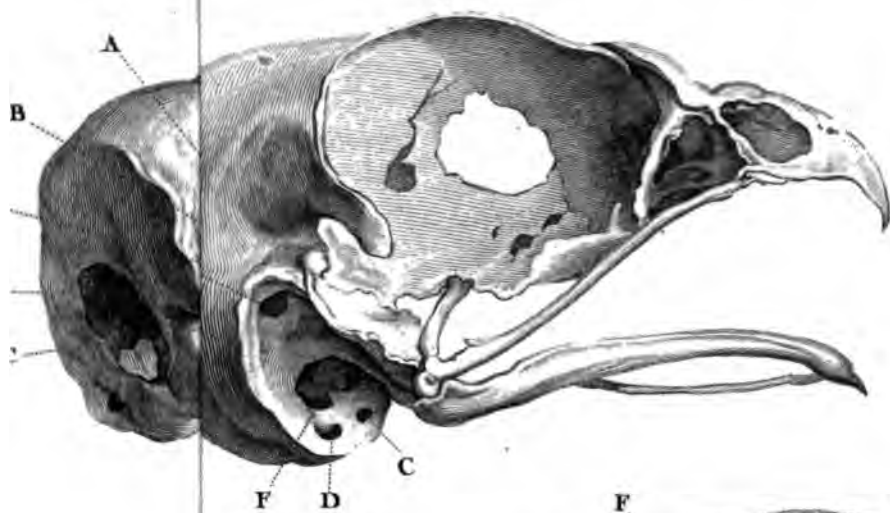
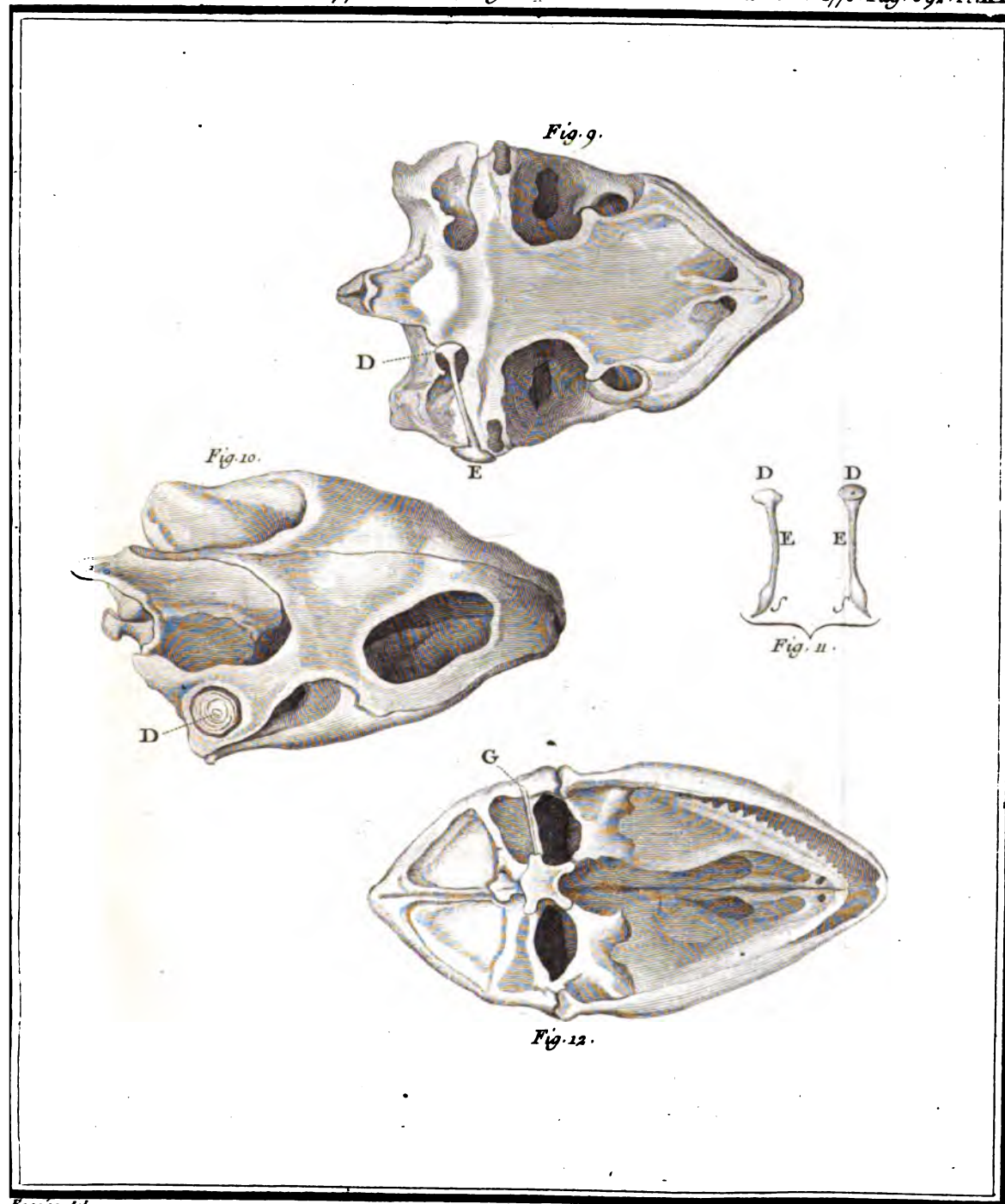


Fig. 6.

Fig. 7.







*Forner del*

*F. le Gros Sculp.*





**SECONDE MÉMOIRE**  
**SUR**  
**LES TACHES DU SOLEIL,**  
**CONTENANT**  
**DIVERSES OBSERVATIONS DE TACHES,**  
*Avec les positions qui en résultent, & la confirmation*  
*des résultats précédens.*

Par M. DE LA LANDE.

**D**ANS mon premier Mémoire sur les Taches du Soleil (Mém. de l'Acad. année 1776, page 457) j'ai donné une détermination nouvelle de l'Équateur & de la rotation du Soleil ; mais je n'ai pas dissimulé que, vu le petit nombre d'observations faites jusqu'à présent, ces recherches étoient susceptibles d'être perfectionnées : je n'ai pas perdu de vue cet objet, & je vais rassembler ici des observations que j'ai faites depuis l'impression de mon premier Mémoire.

Commencé  
en 1778,  
fini en 1780.

Je commencerai par quelques réflexions relatives aux premiers Astronomes qui observèrent les taches du Soleil ; ce sera un supplément qui complètera le Traité des taches du Soleil, contenu dans le Mémoire précédent. Le premier Ouvrage qui parut sur les taches du Soleil, fut celui de Fabricius, intitulé *Joh. Fabricii Phrysi de maculis in sole observatis, & apparente earum cum sole conversione narratio*. Wittebergæ, 1611, petit in-4.<sup>o</sup>

L'Épître dédicatoire est datée du 13 Juin 1611 : dans cet Ouvrage, qui a quarante-trois pages, il n'y en a que huit où il soit parlé des taches du Soleil. En voici un extrait, où j'ai renfermé en peu de mots tout ce que l'Auteur dit sur cette matière ; le reste est un verbiage de Métaphysique inutile à notre objet.

Mém. 1778.

D d d

« Après que les Lunettes ont été découvertes en Hollande,  
 » on a commencé à regarder la Lune , ensuite Jupiter & Saturne,  
 » & Galilée y a trouvé des choses singulières: pour moi , poussé  
 » par la même curiosité , je m'occupai à regarder le Soleil , dont  
 » les bords me paroissoient avoir des inégalités remarquables ,  
 » que mon père , David Fabricius , avoit déjà remarquées ,  
 » comme je l'ai appris par ses Lettres dans le temps que je m'en  
 » occupois. J'aperçus une tache noirâtre sur le Soleil , plus rare &  
 » plus pâle d'un côté , assez grande par rapport au disque du Soleil;  
 » je crus d'abord que c'étoit un nuage ; mais l'ayant regardée dix  
 » fois avec différentes lunettes , & ayant appelé mon père pour  
 » la lui faire voir , nous fumes assurés que ce n'étoit point un  
 » nuage ; le Soleil s'élevant de plus en plus , nous ne pouvions  
 » plus le regarder , d'autant que lors même qu'il est à l'horizon ,  
 » il affecte les yeux de manière que , pendant plus de deux  
 » jours , la vue des objets est altérée : c'est pourquoi j'avertis  
 » ceux qui voudroient faire de pareilles Observations , de  
 » commencer à recevoir la lumière d'une petite portion du  
 » Soleil , afin que l'œil s'y accoutume , & parvienne peu-à-peu  
 » à supporter la lumière du disque entier du Soleil. Nous pas-  
 » sames le reste de la journée & la nuit suivante avec une  
 » extrême impatience , & en rêvant sur ce que pouvoit être cette  
 » tache : si elle est dans le Soleil , je la reverrai sans doute ; si  
 » elle n'est pas dans le Soleil , son mouvement nous la rendra  
 » invisible. Enfin je la revis dès le matin avec un plaisir in-  
 » croyable ; mais nous vîmes qu'elle avoit un peu changé de  
 » place , ce qui augmenta notre incertitude : cependant nous  
 » imaginâmes de recevoir les rayons du Soleil par un petit  
 » trou dans une chambre obscure & sur un papier blanc , & nous  
 » y vîmes très-bien cette tache en forme de nuage alongé ;  
 » le mauvais temps nous empêcha de continuer ces Observa-  
 » tions pendant trois jours. Au bout de ce temps-là , nous vîmes  
 » la tache qui étoit avancée obliquement vers l'Occident ; nous  
 » en vîmes une autre plus petite vers le bord du Soleil , qui  
 » dans l'espace de peu de jours parvint jusqu'au milieu ; enfin  
 » il en survint une troisième ; ensuite la première disparut , &

les autres quelques jours après. Je flottois entre l'espérance «  
 & la crainte de ne pas les revoir ; mais dix jours après , la «  
 première reparut à l'Orient : je compris alors qu'elle faisoit «  
 une révolution , & depuis le commencement de l'année ja «  
 je me suis confirmé dans cette idée , & je les ai fait voir à «  
 d'autres qui en sont persuadés. Cependant j'avois un doute «  
 qui m'empêcha d'abord d'écrire à ce sujet , & qui me faisoit «  
 même repentir du temps que j'avois employé à cette Obser- «  
 vation : je voyois que ces taches ne conservoient pas entr'elles «  
 les mêmes distances , qu'elles changeoient de forme & de «  
 vitesse ; mais j'eus d'autant plus de plaisir lorsque j'en eus senti «  
 la raison. Comme il est vraisemblable , par ces Observations , «  
 que les taches sont sur le corps même du Soleil ; qui est «  
 sphérique & solide , elles doivent devenir plus petites & «  
 ralentir leur mouvement sur les bords : nous invitons les «  
 Amateurs des vérités physiques à profiter de l'ébauche que «  
 nous leur présentons ; ils soupçonneront sans doute que le «  
 Soleil a un mouvement de conversion , comme l'a dit «  
 Jordanus Bruno \*, & en dernier lieu Képler dans son Livre «  
 sur les mouvemens de Mars , car sans cela je ne fais ce que «  
 nous ferions de ces taches. Je ne suis pas de l'avis que ce soient «  
 des nuages ; je ne suis pas non plus de l'avis de ceux qui ont «  
 placé les Comètes dans le Soleil , comme des émissaires «  
 destinés à y revenir bientôt : j'aime mieux me taire sur tout «  
 cela que de parler au hasard ; je suis même tenté de regarder «  
 ce mouvement du Soleil comme la cause des autres mouve- «  
 mens célestes , suivant ces paroles d'Aristote , qui dit dans «  
 ses Problèmes , *que le Soleil est le père & l'auteur des* «  
*mouvemens.* »

\* Brûlé  
 en 1600

On voit par-là que Fabricius étoit bien peu avancé sur  
 les taches que le hasard lui avoit fait apercevoir ; Galilée  
 alla bien plus loin , comme il est naturel de le penser. Galilée ,  
 dans son Discours sur la Comète de 1618 , page 3 , dans  
 son *Saggiatore* ou *Trutinator* , pages 2 & 209 , & dans ses  
 Dialogues du Système du Monde , page 337 , a toujours  
 soutenu qu'il étoit le premier qui eût vu les taches du Soleil ,

& que Scheiner n'avoit commencé à les observer qu'après avoir vu les Écrits de Galilée ; Scheiner s'en justifie dans son *Rosa Ursina* : il dit qu'il avoit commencé à les voir au mois de Mars 1611, en mesurant avec une lunette le diamètre du Soleil ; il reprit ces observations au mois d'Octobre ; il en avertit deux Jésuites , qui le dirent à M. Velfer , Magistrat d'Ausbourg , qui aimoit les Savans ; celui-ci engagea le P. Scheiner à lui écrire à ce sujet , des Lettres qui furent imprimées en 1611 sous le nom d'*Appelles* , parce que le P. Busæe , Provincial des Jésuites , ne voulut pas permettre que ces nouveautés parussent sous le nom du P. Scheiner : celui-ci observe que Galilée n'a produit aucune observation figurée avant celle du 5 Avril 1612 , tandis qu'il en a produit de 1611.

Le premier livre où Galilée ait parlé des taches du Soleil , est intitulé *Istoria dimostrazioni intorno alle macchie Solari* ; *Roma* , 1613 : on lit dans la Préface , que Galilée étant à Rome au mois d'Avril 1611 , avoit fait voir les taches du Soleil à plusieurs personnes dans le jardin Quirinal du Cardinal Bandini , & qu'il en avoit parlé quelques mois auparavant à ses amis de Florence , tandis que l'anonyme , caché sous le nom d'*Apelles* (ou le P. Scheiner) ne cite que des observations du mois d'Octobre 1611.

On y voit aussi (*page 10*) que Marc Velfer , Duumvir d'Ausbourg , avoit envoyé à Galilée , le 6 Janvier 1612 , les trois Lettres qui portoient le nom d'*Apelles* , en lui demandant son avis à ce sujet ; Galilée qui craignoit les ennemis des nouveautés , n'osoit qu'à peine s'expliquer , & encore moins faire imprimer ses idées sur les choses qu'il n'avoit pas parfaitement approfondies : cependant , on voit dans la Lettre à Velfer , du 4 Mai 1612 (*page 16*) des raisonnemens solides contre l'idée de Scheiner , qui ne croyoit pas possible que les taches fussent dans le corps même du Soleil , & qui les regardoit alors comme des Planètes tournant autour du Soleil , à une petite distance , ainsi que Mercure & Vénus. Galilée le réfute , quoiqu'en lui donnant beaucoup d'éloges ,

& le traitant de génie sublime (*page 28*). Il observe que ces taches ne sont pas permanentes, qu'elles se condensent ou se divisent, s'augmentent & se dissipent; il les compare à des fumées ou à des nuages (*page 21*); il ajoute que quelquefois il y en a beaucoup, & quelquefois point du tout: il pense qu'elles sont à la surface du Soleil (*page 26*); qu'elles n'ont pas de hauteur sensible (*page 41*); qu'elles décrivent toutes des cercles parallèles entr'eux (*page 32*), quoiqu'il y en ait quelquefois une trentaine à la fois (*page 33*), & que le Soleil en tournant chaque mois, les ramène à notre vue (*page 49*); qu'il y en a qui durent un ou deux jours, d'autres trente ou quarante & plus (*page 31*); qu'elles se rétrécissent & se rapprochent les unes des autres sur les bords du Soleil, sans changer de longueur ou de distance du Nord au Sud (*pages 20 & 34*), & que ce rétrécissement est celui des différentes parties d'un globe, vu de loin (*page 35*). Galilée y parle des pôles de la rotation du Soleil; mais il n'avoit pas encore remarqué la différence de 7 degrés qu'il y a entre ces pôles & ceux de l'écliptique (*page 37*), & il croyoit que l'écliptique même étoit le plus grand cercle de leur conversion.

Dans la Lettre du 14 Août 1612, il observe que les taches ne s'écartent pas de plus de 30 degrés de l'Équateur solaire, ce qui a été confirmé par la suite des Observations qu'on a faites; il y donne la manière d'observer les taches, en recevant sur un papier l'image du Soleil au travers d'une lunette; il attribue cette idée à un de ses Élèves, Benedetto Castelli (*page 52*); il ajoute que les plus belles taches se voient sans instrument, en faisant entrer par un petit trou l'image du Soleil dans une chambre obscurcie, ce qu'il avoit fait sur-tout le 20 Août 1612. Enfin il explique, par les taches du Soleil, le prétendu passage de Mercure sur le Soleil, dont il est parlé dans la vie de Charlemagne.

Dans la troisième Lettre, du 1.<sup>er</sup> Décembre 1612, Galilée répond aux argumens par lesquels Scheiner soutenoit que les taches étoient éloignées de la surface du Soleil: il assure que

toutes les taches sont visibles pendant le même espace de temps (*page 116*), un peu plus de quatorze jours (*pages 116, 129 ou 142*), quoique (*page 131*) Scheiner prétendît en avoir vu qui employoient quatorze jours, & d'autres seize, à traverser le disque du Soleil (*page 126*), & qu'il en voulût conclure qu'elles étoient éloignées du Soleil (*page 128*). Galilée dit s'en être assuré par plus de cent dessins, faits en grand & avec soin (*page 116*).

Il assure (*page 132*) que l'on voit quelquefois dans le Soleil de petits endroits plus clairs que le reste, & dans lesquels s'observe le même mouvement que dans les taches, ce qui étoit bien suffisant pour démontrer le mouvement de rotation du Soleil, & par conséquent la cause du mouvement des taches. Ainsi il ne manquoit dès-lors à la théorie des taches du Soleil qu'une suite d'Observations détaillées pour bien constater la durée de la rotation du Soleil & la situation de son Équateur : c'est ce que fit le P. Scheiner dans son grand Ouvrage, intitulé *Rosa Ursina*. Il est assez indifférent à leur réputation de savoir lequel des deux les a le premier aperçues dans sa lunette ; mais Galilée paroît être le premier qui ait raisonné avec justesse sur la nature & le mouvement des taches, & le P. Scheiner celui qui les a le plus observées & qui a le mieux approfondi toutes les circonstances de leur mouvement. Je ne parlerai point dans ce Mémoire du Problème qui consiste à déterminer la position de l'Équateur solaire par trois Observations d'une tache ; je me suis assez étendu sur cet article (*Mém. de 1776, p. 465 & suiv.*) ; j'ajouterai seulement qu'il a paru vers le même temps une pièce de M. Hedin, intitulée : *Dissertatio Astronomica de rotatione Solis & Planetarum* ; *Upsalæ, 1776, in-4.* : on y trouve une solution du Problème de la rotation du Soleil, qu'il a tâché de rendre un peu plus simple que celle de M. de S.<sup>t</sup> Jacques de Sylvabelle, qui se trouve dans le quatrième Volume des *Mémoires présentés à l'Académie*.

M. du Séjour a donné aussi dans les *Mémoires de 1776, page 278*, une méthode analytique pour trouver l'Équateur

solaire, & M. de la Grange en avoit donné une en 1764 dans la Pièce qui remporta le Prix sur la Nutation de la Lune, & qui a été publiée en 1777 dans le neuvième & dernier Volume des Pièces des Prix.

Je viens aux Observations qui peuvent servir à constater les retours des taches & les élémens de la rotation solaire, & je commencerai par reprendre d'anciennes Observations par lesquelles j'ai calculé les déclinaisons solaires de diverses taches, afin que quand on croira les avoir vu reparoître, on puisse vérifier la période par les anciennes Observations.

Les premières taches qui paroissent avoir été observées avec l'exactitude des nouvelles méthodes, sont celles de 1672, dont M. le Monnier a rapporté les Observations dans son *Histoire céleste*, pages 23 & 24.

ANNÉE	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.
1672.				
Novemb. 12	18" au 2. <sup>e</sup> bord	7' 10" au bord A.	11 <sup>e</sup> 15 <sup>d</sup> 9	12 <sup>d</sup> 48' A.
13	22 $\frac{1}{2}$	8. 0.	11. 26. 41	11. 18
14	31 $\frac{1}{2}$	24. 10. au bord B.	0. 9. 37	13. 0
20	28 au 1. <sup>er</sup> bord	18. 0.	3. 3. 59	15. 33
22	9	15. 0.	4. 1. 48	11. 3

La seconde colonne contient les différences de passages entre la tache & l'un des bords du Soleil : dans les trois premières Observations, on compare la tache avec le second bord ou le bord oriental ; dans les autres, avec le bord suivant.

Dans la troisième colonne, on trouve la différence de hauteur méridienne ou de déclinaison entre la tache & le bord austral ou le bord boréal du Soleil.

Dans la quatrième, sont les longitudes vues du Soleil, mesurées sur l'écliptique, & que j'ai déduites des Observations.

Dans la dernière colonne, sont les déclinaisons de la tache par rapport à l'Équateur solaire, que j'ai calculées, en

# 400 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

supposant le nœud à  $2^{\circ} 18^d$  & l'inclinaison de  $7^d 20'$  : ces déclinaisons devroient être toutes égales ; mais on n'avoit alors ni micromètres ni verniers sur les quarts-de-cercle : ces hauteurs méridiennes n'étoient probablement pas d'une assez grande exactitude ; il ne faut pas 15 secondes d'erreur pour produire 1 degré sur la déclinaison solaire ; d'ailleurs une tache qui est un peu irrégulière & qui change de forme, ne peut pas se déterminer avec une si grande précision : cependant on voit que cette tache avoit environ 12 degrés  $\frac{1}{4}$  de déclinaison australe.

Les observations suivantes seront disposées dans le même ordre.

La tache du mois de Juin 1676 avoit à peu-près la même déclinaison que la précédente : les observations se trouvent à la page 206 de l'*Histoire céleste*.

ANNÉE	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.
1676.				
Juin.... 26	$34^{\frac{1}{2}}$ au 1. <sup>er</sup> bord	$19' 25''$ au bord sup.	$8^{\circ} 4^d 21'$	$13^d 46' A.$
27	$50 \frac{1}{2}$	$19. 45.$	$8. 20. 1$	$13. 27$
28	67	$20. 0.$	$9. 5. 14$	$13. 11$
Juillet... 1	15 au 1. <sup>er</sup> bord	$20. 2.$	$11. 3. 46$	$12. 11$

Le milieu entre ces déclinaisons est  $13^d 9'$ .

Ces deux taches ayant paru à peu-près sur le même parallèle, j'ai voulu voir si ce seroit la même tache qui auroit reparu après cinquante-deux rotations du Soleil ; mais il faudroit supposer quelques heures de plus pour la durée de chacune : ainsi elles ne s'accordent pas avec mes résultats antérieurs.

Dans la même année, on trouve d'autres observations, *Histoire céleste*, page 218 & suivantes, que j'ai calculées de la manière suivante ; mais les calculs de la dernière colonne supposent le nœud à  $2^{\circ} 16^d$ .

ANNÉE



ANNÉE 1676.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de HAUTEURS.	LONGIT.	DÉCLIN. solaire.
Octob.. 30	34" au 1. <sup>er</sup> bord	15' 20" au bord sup.	2 <sup>f</sup> 6 <sup>d</sup> 46'	5 <sup>d</sup> 10' A.
Nov.... 1	15	12. 55	3. 3. 11	5. 10
19	11 $\frac{1}{4}$	22. 50	11. 20. 59	4. 54
21	27 $\frac{1}{4}$ au 2. <sup>e</sup> bord	21. 20	0. 14. 1	5. 31
22	40	20. 20	1. 2. 57	4. 12
23	53 $\frac{1}{4}$	19. 20	1. 13. 52	5. 44
24	68 $\frac{1}{4}$	17. 40	2. 1. 21	2. 54
25	56 au 1. <sup>er</sup> bord	16. 55	2. 14. 48	4. 33
27	29	14. 40	3. 12. 7	3. 36
28	18	14. 10	3. 26. 5	4. 27
29	9 $\frac{1}{4}$	13. 46	4. 10. 1	5. 11
30	3	13. 20	4. 26. 6	5. 4
Déc.... 16	6 $\frac{1}{4}$ au 2. <sup>e</sup> bord	19. 50	0. 16. 48	4. 25
18	22 $\frac{1}{4}$	19. 0	1. 18. 19	5. 27

Il paroît que c'étoit la même tache observée pendant deux périodes: les deux observations extrêmes éloignées d'environ deux rotations solaires, donnent pour chacune 25<sup>j</sup> 4<sup>h</sup>; il s'en faut six heures que cela ne s'accorde avec mon résultat; mais six heures ne font que 3 degrés  $\frac{1}{2}$ ; ce n'est pas une minute sur le Soleil.

A la page 314, on trouve les observations de la tache du mois de Mai 1684, que M. Cassini regardoit comme étant la même que les taches de 1625, 1644, 1688 & 1702 (*Mémoires de l'Académie, 1702, page 133*); mais il n'y a que deux observations complètes.

ANNÉE 1684.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de HAUTEURS.	DISTANCE au bord le plus proche.	LONGIT. héliocentrique,	DÉCLIN. solaire.
Mai.... 6	9" au 2. <sup>e</sup> bord	12' 40" b. B.	1' 26" au b. le pl. pr.	5 <sup>f</sup> 11 <sup>d</sup> 25'	10 <sup>d</sup> 23' A.
7	16 $\frac{1}{4}$	13. 40	3. 37	5. 27. 22	11. 43

Mém. 1778.

E e e

# 402 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

J'en conclus que cette tache dut passer par le milieu de son parallèle, le 10 à 21<sup>h</sup> 22'. En la comparant avec celle qui y passa le 5 Mai 1688, à 18 heures, ou à cinquante-trois retours de 27<sup>j</sup> 11<sup>h</sup> 16'; c'est une heure de moins que suivant M. Cassini : ainsi les taches même qui lui ont servi à établir la durée de la rotation, n'y satisfont pas d'une manière convaincante.

Quand aux taches du mois de Mai 1686, je desirois beaucoup de pouvoir les discuter, puisqu'il y en a une dont M. Cassini s'étoit servi pour déterminer la durée de la rotation solaire : M. Cassini le fils, qui s'occupe avec beaucoup de zèle de tout ce qui intéresse l'Astronomie, a pris la peine de chercher ces observations dans les Registres originaux; il m'a communiqué même celles du P. Bonfa, faites à Avignon; je les ai calculées, & je n'ai rien pu trouver de concluant: il faut qu'il y ait eu beaucoup de taches dans ce temps-là, & je n'ai pu distinguer celle dont M. Cassini s'étoit servi; j'ai lieu de croire que ce n'étoit pas une des plus grosses, & dès-lors elle ne peut guère servir à appuyer des conclusions générales pour la durée de la rotation.

Dans les anciens *Mémoires de l'Académie*, tome X, page 708, on trouve cinq observations de M. de la Hire, faites vers ce temps-là, & toujours à midi.

ANNÉE	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. héliocentrique	LONGIT. solaire.
1686.				
Avril.... 23	0 <sup>d</sup> 8' 30" <i>or.</i>	1' 3" au Nord.	6 <sup>d</sup> 1 <sup>d</sup> 47'	13 <sup>d</sup> 58' A.
28	0. 7. 12 <i>occ.</i>	7. 0 au Midi.	8. 14. 40	15. 59
29	0. 9. 13	7. 58	8. 27. 11	15. 34
30	0. 11. 0	9. 0	9. 12. 2	15. 33
Mai.... 1	0. 12. 18	9. 50	10. 2. 27	14. 20

Cette tache ayant la même déclinaison que celle de 1713, observée par M. de l'Isle, j'ai voulu les comparer, & j'ai

trouvé trois cents quatre-vingt-neuf rotations de  $25^{\text{h}} 10^{\text{m}} 5^{\text{s}}$ ; il faudroit supposer une heure & demie de plus pour trouver une révolution de moins dans cet intervalle : la période de M. Cassini ne satisfait point du tout à cet intervalle ; elle donne trois cents quatre-vingt-six rotations & trente-sept centièmes ; ainsi il y a un tiers de révolution de trop , ce qui augmenteroit d'une demi-heure chaque période.

Cette tache n'est pas celle qui servit à M. Cassini pour déterminer la période des retours  $27^{\text{d}} 12^{\text{h}} 20'$ , puisqu'elle devoit avoir  $10^{\circ} \frac{1}{2}$  de déclinaison , & passer par le milieu du Soleil, le 23 Avril au matin ; mais il paroît qu'elle étoit bien peu considérable. S'il y a donc quelque chose de probable à cet égard , c'est la détermination que j'ai donnée dans mon premier Mémoire, fondée sur plusieurs apparitions d'une très-grosse tache au même point du globe solaire , & que l'on verra confirmée encore ci-après par les observations du mois de Juin 1778 , & par d'autres taches de 1777 & 1779.

Dans l'Histoire de l'Académie de 1707, page 11, il est parlé de deux taches observées en 1705 & 1707, qui avoient 12 à 13 degrés de déclinaison boréale : les observations n'y sont pas rapportées , mais on y voit que la première avoit passé par le milieu du Soleil, le 11 Avril 1705 à 20 heures, & la seconde le 30 Novembre 1707 à 7 heures : l'intervalle est de  $962^{\text{d}} 46^{\text{h}}$ , qui, divisé par 35, donne pour chaque révolution synodique  $27^{\text{d}} 11^{\text{h}} 58'$  ; c'est 23 minutes de moins que suivant M. Cassini ; il faudroit donc qu'il y eût 13 heures d'erreur dans un des passages par le milieu du Soleil, ce qui ne peut pas se présumer : ainsi cet intervalle ne satisfait pas à la période de  $27^{\text{d}} 12^{\text{h}} 21'$ , mais la mienne y répond encore moins.

Le 8 Janvier 1750, il y avoit sur le Soleil cinq taches, dont M. Garipuy, Correspondant de l'Académie, à Toulouse, déterminâ la position, à cause de l'éclipse du Soleil de ce jour-là (*Mémoires présentés, tome II, page 336*) ; la seconde étoit la plus grosse, & la quatrième la plus petite. Voici les observations avec le calcul que j'en ai fait ; les distances ont

404 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
été mesurées parallèlement à l'Équateur , & dans le sens  
perpendiculaire à l'Équateur.

ANNÉE	DISTANCES au bord OCCIDENTAL.	DISTANCES au bord AUSTRAL.	LONGITUDE.	DÉCLINAIS. solaire.	
1750.					
Janvier. 8	6' 46"	11' 2"	4 <sup>r</sup> 28 <sup>d</sup> 9'	20 <sup>d</sup> 51' A.	belle tache.
8	8. 52.	14. 5.	4. 26. 21.	11. 1	
8	12. 50.	13. 19.	4. 2. 0.	13. 51	
8	13. 11.	14. 5.	4. 0. 13.	11. 9	
8	28. 35.	18. 45.	1. 28. 3.	5. 13 B.	

La seconde tache paroît avoir la même déclinaison que celle qui fut observée aux mois de Juin & Juillet 1684 , & dont j'ai rapporté les calculs dans mon premier Mémoire ; mais l'intervalle de temps est trop grand pour qu'on en puisse tirer des conclusions, faute d'observations intermédiaires ; d'ailleurs, des taches qui n'ont été observées qu'une fois, ne sont pas les plus propres à inspirer de la confiance dans les résultats.

En 1752 , étant à Berlin à l'occasion de la parallaxe de la Lune, avec le quart-de-cercle mural de M. le Monnier, qui a cinq pieds de rayon , je ne négligeois aucune des observations qui se présentoient à faire : j'eus occasion de voir plusieurs taches , sur-tout celle du mois de Juillet que j'ai employée avec succès à déterminer la rotation du Soleil. Voici le détail des observations que je n'avois pas rapportées dans mon premier Mémoire, en y joignant les observations de deux autres taches. La lunette du quart-de-cercle porte un vernier qui donne 15 secondes, mais avec lequel on distingue facilement trois secondes, comme on peut en juger par l'accord des hauteurs méridiennes que j'ai rapportées dans nos *Mémoires de 1751* ; ce n'est pas qu'il n'y ait des erreurs plus grandes dans les divisions, mais elles ne sont pas dans l'espace de quelques minutes ; ainsi les différences des hauteurs méridiennes ou des déclinaisons entre les taches & les bords du Soleil, sont exactes à 3 ou 4 secondes près.

ANNÉE 1752.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.
Mars... 9	24 $\frac{1}{2}$ " au 1. <sup>er</sup> bord.	14' 10" au bord sup.	6 <sup>e</sup> 23 <sup>d</sup> 10'	14 <sup>d</sup> 39' B.
11	8 $\frac{1}{2}$ "	17. 0.	7. 19. 53	13. 23
Juin... 27	13 au 2. <sup>e</sup> bord.	23. 49 au bord sup.	6. 22. 45	14. 33 A.
Juillet... 1	66	20. 16.	9. 6. 24	13. 59
2	82 $\frac{1}{2}$ "	20. 29.	9. 21. 57	14. 12.
10	6 au 2. <sup>e</sup> bord.	13. 49.	7. 12. 11	9. 54 B.
12	7	13. 30.	7. 16. 4	12. 14
13	14	14. 0.	7. 29. 14	11. 6
17	68	13. 59.	9. 26. 36	10. 52
19	91	12. 58.	10. 19. 17	12. 32
20	108 $\frac{1}{2}$ "	12. 35.	11. 7. 40	11. 34
M I L I E U entre les six observations de la dernière tache... 11. 22				

En 1767, M. Darquier, Correspondant de l'Académie, à Toulouse, observa le 30 Janvier une belle tache, comme on le voit à la page 128 de ses Observations imprimées; sa longitude se trouve de 3<sup>e</sup> 19<sup>d</sup> 14', & sa déclinaison solaire de 20<sup>d</sup> 7' australe.

La même année j'ai observé quelques taches; il y en a une dont j'ai rapporté les observations dans mon premier Mémoire. Voici le détail d'une autre.

ANNÉE 1767.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.
Avril... 17	41" au 1. <sup>er</sup> bord	11' 18" au bord sup.	7 <sup>e</sup> 12 <sup>d</sup> 35'	20 <sup>d</sup> 4' B.
18	29	12. 10.	7. 22. 29	19. 47

Celle du mois de Juin de la même année, observée avec soin par le P. Fixmillner, se trouve dans son excellent Ouvrage intitulé *Decennium Astronomicum*; Styrae, 1776.

*in-4.<sup>o</sup>*, page 23 ; la déclinaison solaire étoit de  $25^{\text{d}} 40'$  boréale. Le 7 Juin à  $2^{\text{h}} 42'$ , au Méridien de Paris, la longitude héliocentrique de cette tache étoit de  $8^{\text{f}} 16^{\text{d}} 52'$ , & la latitude boréale  $26^{\text{d}} 20'$ .

En 1768, M. Messier a observé trois taches pendant plusieurs jours ; j'en ai calculé vingt-une observations ; j'avois d'abord intention de les employer à la recherche de l'inclinaison & du nœud, mais elles n'étoient pas assez d'accord entr'elles pour cet objet ; je vais les rapporter pour servir au moins à les comparer avec d'autres taches à pareilles déclinaisons.

La seconde, qui a  $25$  degrés de déclinaison australe, m'a déjà servi à confirmer ma détermination de la durée de la rotation solaire, comme je l'ai dit dans mon premier Mémoire, en la comparant avec celle du mois de Juin 1777, dont on trouvera les observations ci-après (*page 410*).

Le 4 Mars 1768, quelques minutes après midi, cette tache avoit  $6^{\text{f}} 27^{\text{d}} 46'$  de longitude héliocentrique, suivant l'observation de M. Messier, faite avec un ancien télescope Newtonien, dont M. de l'Isle s'étoit servi long-temps pour ces sortes d'observations. Le 5 Juin 1777, la tache observée aussi par M. Messier, passa au fil horaire de la lunette achromatique,  $1^{\text{f}} 55''\frac{1}{2}$  après le bord du Soleil, à  $19^{\text{f}} 58''\frac{1}{2}$  du bord supérieur ou du bord boréal du Soleil, ce qui me donne pour la longitude héliocentrique  $7^{\text{f}} 0^{\text{d}} 6'$ .

Ces deux longitudes n'étant différentes que de  $2^{\text{d}} 20'$  seulement, la réduction à l'équateur solaire étoit inutile à considérer, & j'ai comparé les longitudes seulement ; la différence de  $2^{\text{d}} 20'$  répond à 4 heures, suivant la Table du mouvement des taches que j'ai donnée dans les *Mémoires de 1776*, page 503 ; il faut donc ôter 4 heures de l'intervalle, entre le 4 Mars 1768 & le 5 Juin 1777, qui est de 3380 jours, & l'on aura 3379,83 intervalle de temps qui répond à cent trente-trois révolutions, dont chacune seroit de  $25^{\text{f}} 9^{\text{h}} 54'$  ; tel est le fondement du résultat que j'avois annoncé avant que de rapporter les observations qui me l'avoient fourni (*Mémoires de l'Académie, 1776, page 500*).

ANNÉE 1768.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. héliocentrique	DÉCLIN. solaire.
Mars. 1	56" au 1. <sup>er</sup> bord	21' 0" au bord sup.	5 <sup>f</sup> 27 <sup>d</sup> 41'	19 <sup>d</sup> 36' A.
2	43 $\frac{1}{2}$	22. 39	6. 11. 3	20. 54
3	33	24. 13	6. 25. 43	21. 37
4	24 $\frac{1}{2}$	25. 37	7. 11. 18	21. 55
5	20	26. 42	7. 26. 43	22. 6
6	19	27. 16	8. 6. 49	22. 22
1	66 au 1. <sup>er</sup> bord	21. 27 au bord sup.	5. 18. 16	25. 25 A.
2	54	22. 47	6. 3. 3	25. 30
3	41	24. 18	6. 17. 58	25. 18
4	35 $\frac{1}{2}$	25. 25	6. 27. 46	26. 23
5	29	26. 34	7. 10. 50	26. 45
6	25	27. 29	7. 23. 30	25. 19
7	23 $\frac{1}{2}$	28. 12	8. 5. 38	27. 26
1	68	8. 53	4. 28. 5	16. 33 B.
2	54	10. 20	5. 13. 41	16. 5
3	43 $\frac{1}{2}$	11. 43	5. 26. 13	15. 10
4	29	13. 6 $\frac{1}{2}$	6. 12. 52	16. 5
5	18 $\frac{2}{3}$	14. 26	6. 27. 18	16. 14
6	10	15. 45	7. 11. 50	16. 7
7	4	17. 7	7. 26. 31	15. 14
8	1	17. 55 $\frac{1}{2}$	8. 10. 30	15. 24

Le jour de l'éclipse de Soleil qu'il y eut en 1769, M. Messier observa les immersions de plusieurs taches ; & pour rendre ces observations plus utiles , il détermina les positions des taches , en observant deux jours de suite , leurs différences d'ascension droite & de déclinaison , par le moyen d'un micromètre \*. Voici les observations & le calcul que j'en ai fait en commençant par les taches les plus boréales.

\* C'est par erreur qu'on lit dans ce volume , passages au fil vertical , & différences de hauteurs.

ANNÉE 1769.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.
Jun. . . 3 , à 10 <sup>h</sup> $\frac{1}{2}$ mat.	9" du 1. <sup>er</sup> bord	13' 1" au bord B.	10 <sup>f</sup> 14 <sup>d</sup> 2'	22 <sup>d</sup> 31' B.
4	3	13. 17	10. 29. 4	22. 41
3	26 du 2. <sup>d</sup> bord	9. 10	6. 27. 50	14. 5
4	36	10. 11	7. 11. 30	12. 48
3	9	8. 25	5. 23. 20	13. 26
4	13	8. 51	6. 8. 27	13. 0
3	60 du 1. <sup>er</sup> bord	12. 30	8. 18. 25	12. 48
4	44	13. 21	9. 3. 59	13. 16
3	59 du 2. <sup>d</sup> bord	10. 23	7. 13. 41	12. 24
4	53	11. 22	7. 28. 32	12. 2
3	47	11. 19	7. 22. 8	10. 44
4	62	12. 48	8. 6. 57	10. 33
3	11	13. 5	6. 14. 11	2. 52
4	16	13. 28	6. 22. 47	2. 51
3	11 du 1. <sup>er</sup> bord	22. 8	6. 5. 39	23. 57 A.
3	23 du 2. <sup>d</sup> bord	20. 28	7. 0. 53	25. 55

M. Darquier observa une belle tache le 6 Juin 1773 ; la déclinaison étoit égale à celle du Soleil, & elle étoit 8' 41" à gauche du centre : j'en ai conclu la longitude 7<sup>f</sup> 15<sup>d</sup> 35', & sa déclinaison solaire 6<sup>d</sup> 58' australe.

La tache que j'observai depuis le 13 jusqu'au 23 Juin 1775, & qui m'a servi à déterminer les pôles de la rotation (*Mémoires de l'Académie, année 1776, page 464*) reparut le 10 Juillet, mais extrêmement foible. Voici les observations qu'en fit M. Messier, & le calcul que j'en ai fait, en supposant 8<sup>f</sup> 17<sup>d</sup> pour le nœud, & 7<sup>d</sup> 29' pour l'inclinaison.

ANNÉE



ANNÉE 1769.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISONS.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.
Juillet. 10	15'' $\frac{1}{2}$ au bord <i>or.</i>	18' 14'' $\frac{1}{2}$ au bord B.	7 <sup>c</sup> 26 <sup>d</sup> 12'	5 <sup>d</sup> 30'
11	23	18. 41	8. 5. 43	5. 10
12	36 $\frac{1}{2}$	18. 50	8. 19. 59	6. 36

Au mois de Juillet 1775, j'observai avec soin une autre tache, dans l'intention d'en conclure le lieu du nœud, mais je ne pus avoir assez d'observations exactes pour remplir cet objet; voici seulement les quatre observations que je fis, & que je ne pus accorder par aucune hypothèse vraisemblable sur l'inclinaison & le nœud. Les déclinaisons solaires supposent 8<sup>c</sup> 25<sup>d</sup> 18' pour le nœud, & 7<sup>d</sup> 30' pour l'inclinaison.

ANNÉE 1775.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISONS.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.
Juillet. 19	10'' au bord <i>or.</i>	14' 54'' au bord B.	7 <sup>c</sup> 28 <sup>d</sup> 46'	9 <sup>d</sup> 5' B.
20	18	14. 54	8. 11. 10	8. 53
21	30	14. 51	8. 25. 47	9. 44
22	41 $\frac{1}{2}$	14. 41	9. 7. 56	10. 17
M I L I E U.....				9. 30

En 1776, M. Fixlmillner observa une tache à Cremsmunster, au mois de Juillet, & il la revit encore au mois d'Août en forme de tache double; elle avoit 28 degrés  $\frac{1}{2}$  de déclinaison solaire australe: il trouve pour sa révolution 25<sup>j</sup> 13<sup>h</sup> 56', ce qui approche beaucoup de celle que M. Cassini avoit trouvée.

Deux autres taches observées au mois d'Août & au mois de Septembre, à 19 degrés de déclinaison australe, lui donnent 25<sup>j</sup> 13<sup>h</sup> 11'.

Dans la dernière observation, je trouve que chaque seconde dans la différence de déclinaison observée change de 11 minutes

Mém. 1778.

Fff

# 410 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

la déclinaison solaire, ce qui fait voir combien il faudroit de précision dans ces observations pour pouvoir en déduire le lieu du nœud & l'inclinaison.

En 1777, M. Meffier observa depuis le 2 jusqu'au 14 Juin, une tache qui a servi à M. Charles, habile Professeur de Mathématiques, pour calculer la position de l'axe du Soleil, par une méthode qui lui est particulière, & qui a eu l'approbation de l'Académie, mais qu'il n'a pas encore publiée. Je vais rapporter les douze observations, & j'y ajouterai celles de quatre autres taches observées vers le même temps.

ANNÉE	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISONS.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.
1777.				
Juin..... 2	2" au 1. <sup>e</sup> bord	18' 26" au bord B.	5 <sup>e</sup> 22 <sup>d</sup> 48'	24 <sup>d</sup> 5' A.
3	6 $\frac{1}{2}$	18. 47	6. 5. 57	24. 24
5	23	19. 58 $\frac{1}{2}$	7. 2. 19	25. 2
6	32	20. 31	7. 13. 21	24. 41
7	47 $\frac{5}{8}$	21. 35	7. 29. 29	25. 17
8	62	22. 14 $\frac{1}{2}$	8. 13. 51	24. 54
9	62 au 1. <sup>er</sup> bord	22. 50	8. 27. 42	24. 30
10	49	23. 33	9. 11. 54	24. 44
11	36 $\frac{1}{2}$	23. 58	9. 26. 17	24. 19
12	26	24. 11	10. 10. 29	23. 32
13	18	24. 27	10. 25. 23	23. 41
14	13	24. 20	11. 9. 34	22. 58
15	3 au 1. <sup>er</sup> bord	14. 11	10. 25. 1	20. 29 B.
16	8	12. 19	10. 19. 3	24. 50
17	5 $\frac{1}{2}$ au 2. <sup>e</sup> bord	20. 3	6. 10. 9	25. 28 A.
18	11 $\frac{1}{2}$	20. 13	6. 28. 15	22. 29

La première tache observée douze fois, a une déclinaison solaire qui diffère peu de celle de la seconde tache du mois de Mars 1768, dont on a vu les observations ci-dessus : il paroît que c'est la même qui a reparu après cent trente-trois révolutions, chacune de 25<sup>j</sup> 9<sup>h</sup> 54', ce qui s'accorde avec mon résultat de 25<sup>j</sup> 10<sup>h</sup> (*Mém. de l'Acad. 1776, p. 496*).

M. Fixlmillner observa depuis le 19 jusqu'au 28 Juin, à Cremsmunster, une tache à 21 degrés de déclinaison solaire australe. Le 24 Juin à 4<sup>h</sup> 2', elle avoit 9<sup>f</sup> 9<sup>d</sup>  $\frac{1}{3}$  de longitude: il l'observa encore à son retour au mois de Juillet; & le 12 8 à 3<sup>h</sup> 39', elle avoit 8<sup>f</sup> 16<sup>d</sup> de longitude. Enfin, dans une troisième apparition, le 15 Août à 4<sup>h</sup> 21', elle étoit à 9<sup>f</sup> 19<sup>d</sup>  $\frac{1}{2}$ . La comparaison de plusieurs observations à chaque période, lui donne 25<sup>j</sup> 15<sup>h</sup> 29' pour la durée de la rotation solaire, ce qui surpasse de 5 heures  $\frac{1}{2}$  celle que j'ai trouvée.

Au mois de Juillet 1777, il observa quatre autres taches; les premières étoient à 22 & à 24 degrés de déclinaison australe: il les revit au mois de Juillet suivant, mais cette seconde apparition lui donne pour la durée de la rotation 25<sup>j</sup> 21<sup>h</sup> 7' par la première tache, & 25<sup>j</sup> 6<sup>h</sup> 43' par la seconde.

Une troisième tache observée au mois de Juillet & au mois d'Août, à 23 degrés de déclinaison boréale, donne 25<sup>j</sup> 5<sup>h</sup> 53'.

Enfin la quatrième, à 19 degrés de déclinaison australe, lui donne 25<sup>j</sup> 19<sup>h</sup> 34'.

Ces différences font voir que les intervalles sont trop courts, ou que les taches avoient trop changé de forme, pour pouvoir être observées. Au reste, M. Fixlmillner publiera lui-même le détail de ses Observations, & des conséquences qu'il en a tirées.

Au mois de Juillet 1777, M. Messier observa une autre tache plus boréale qu'aucune de celles qui précèdent: en voici trois observations que j'ai calculées.

ANNÉE	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISONS.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.
1777.				
Juillet. 28	6 <sup>h</sup> $\frac{1}{2}$ au 1 <sup>er</sup> bord	10' 22" au bord B.	7 <sup>f</sup> 24 <sup>d</sup> 7'	30 <sup>d</sup> 29' B.
31	27 $\frac{1}{2}$	10. 19	9. 5. 26	31. 9
Août. 3	60 $\frac{1}{2}$	9. 9	10. 13. 54	31. 19

# 412 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Au reste , M. Messier a observé beaucoup d'autres taches depuis quelque temps , & il en publiera lui-même les détails.

Je rapportai dans mon premier Mémoire, page 407, des observations qui me servirent à déterminer la durée de la rotation solaire; elles avoient été faites depuis le 5 jusqu'au 12 Mai 1778 , & je les comparai avec des observations antérieures de la même tache , mais je ne parlai point de son retour à la fin de Mai; elle avoit reparu cependant plus petite à la vérité que dans son apparition précédente : je l'observai le 30 Mai, comme on l'annonça dans le Journal de Paris du 1.<sup>er</sup> Juin; je la vis encore les jours suivans , & voici les observations , quoiqu'elles ne soient pas des plus exactes , parce que je n'ai pu les faire qu'avec un petit instrument.

A N N É E 1778.	DIFFÉRENCE de P A S S A G E S.	DIFFÉRENCE de D É C L I N A I S O N S.	LONGIT. héliocentrique.	D É C L I N. solaire.
Mai 30, midi	25" du 2. <sup>d</sup> bord	8' 41" du bord B.	6 <sup>e</sup> 21 <sup>d</sup> 15'	14 <sup>d</sup> 10' B.
31	36	9. 40	7. 6. 32	13. 17
Juin... 1	21 $\frac{1}{2}$	10. 36	7. 19. 18	12. 47
2	61	11. 55	8. 3. 45	11. 21
5	34 $\frac{1}{2}$ du 1. <sup>er</sup> bord	14. 33	9. 13. 57	10. 50
6	22	15. 12	9. 28. 11	10. 53
			.	

L'observation du 1.<sup>er</sup> Juin m'a paru la plus exacte; elle donne pour l'ascension droite solaire 7<sup>e</sup> 17<sup>d</sup> 39' : cette observation, comparée avec celle du 5 Mai, où l'ascension droite solaire étoit de 6<sup>e</sup> 25<sup>d</sup> 48', donne pour la durée de la rotation 25<sup>j</sup> 10<sup>h</sup> 54'; l'observation du 31 Mai, comparée avec celle du 8, donne 14 heures  $\frac{1}{2}$ ; celle du 11 Mai avec celle du 1.<sup>er</sup> Juin donne 1 heure  $\frac{1}{2}$  seulement; le milieu est 25<sup>j</sup> 9<sup>h</sup>; ce qui s'accorde avec ma période, autant que le comporte un intervalle si court. Mais la même tache reparut au mois de Novembre 1778, comme je l'ai dit dans mon premier

Mémoire , & dans le Journal de Paris du 24 Novembre , & elle a confirmé la durée de la rotation, que j'avois fixée à 25<sup>j</sup> 10<sup>h</sup>.

Le 1.<sup>er</sup> Août 1778 il y avoit plusieurs taches sur le Soleil, la plus grosse & la plus terminée précédoit de 42 secondes le deuxième bord du Soleil , & étoit à 11' 37" du bord boréal; ainsi elle avoit 9<sup>f</sup> 21<sup>d</sup> 28' de longitude, & 24<sup>d</sup> 33' de déclinaison boréale, à midi.

Le 5 Août à 9 heures du matin, elle précédoit de 42 secondes  $\frac{3}{4}$  le premier bord, & étoit à 8' 57" du bord boréal; longitude 11' 13<sup>d</sup> 50'; déclinaison 25<sup>d</sup> 14' boréale.

Il y avoit dans le même temps une assez belle tache du côté du Midi, dont voici trois observations.

ANNÉE 1778.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISONS.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.
A O Û T.				
5 à 9 <sup>h</sup> mat.	1' 29" au 1. <sup>er</sup> bord	6' 18" au bord A.	9 <sup>f</sup> 8 <sup>d</sup> 3'	25 <sup>d</sup> 50' A.
6.. 9 $\frac{1}{2}$	0. 54 au 2. <sup>e</sup> bord	25. 30 au bord B.	9. 19. 20	28. 23
7.. midi	1. 7	6. 53 au bord A.	10. 4. 56	27. 34
M I L I E U.....				27. 16

Le 19 Août, parmi plusieurs taches qu'il y avoit sur le Soleil, on en remarquoit au Midi une belle à deux noyaux, environnée d'une grande nébulosité; ces taches à deux noyaux paroissent assez souvent : j'étois curieux de savoir si elles avoient une place fixe ; mais il n'y en a pas encore eu à une si grande déclinaison que la suivante. Je fis ces observations avec une lunette de neuf pieds, garnie d'un excellent micromètre.

A la fin d'Août, il y avoit huit ou dix taches sur le Soleil, mais elles n'étoient pas assez remarquables pour qu'on put espérer de les voir revenir, & je ne continuai pas pour lors ces observations.

414 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

ANNÉE 1778.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISONS.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.
A O Û T				
19 à 7 $\frac{1}{2}$ mat.	49" au 2. <sup>e</sup> bord	24' 50" au bord B.	9 <sup>e</sup> 28 <sup>d</sup> 50'	21 <sup>d</sup> 8' A.
21.. 8 $\frac{1}{2}$	54 $\frac{1}{2}$ au 1. <sup>er</sup> bord	22. 49	10. 28. 6	20. 58
22.. midi	40	10. 23 au bord A.	11. 14. 49	20. 52

Vers le même temps, M. Méchain, Astronome du Dépôt de la Marine, ayant chez lui une bonne lunette achromatique de M. de Létang, qui porte un micromètre, avec d'autres instrumens, que lui avoit confiés M. le Duc d'Ayen, s'en est servi pour observer plusieurs taches du Soleil, que j'ai calculées : chaque différence d'ascension droite est le milieu entre plusieurs observations du même jour.

ANNÉE 1778.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISONS.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.
A O Û T				
17 à 9 <sup>h</sup> mat.	53 $\frac{1}{2}$ apr. le cent.	16' 21 $\frac{1}{2}$ du bord B.	9 <sup>e</sup> 04 0'	15 <sup>d</sup> 31' B.
18... 8. 51'	43.2	15. 56 $\frac{1}{2}$	9. 15. 25	15. 50
20... 8. 5	18 $\frac{1}{2}$	14. 36	10. 13. 9	15. 53
21... 7. 47	5 $\frac{1}{2}$	13. 37	10. 26. 27	16. 7
22... 8. 5	8 avant	12. 32	11. 10. 13	16. 3
23... 8. 23	19.8	11. 11	11. 23. 29	16. 57
24... 8. 22	31 $\frac{1}{2}$	10. 3	0. 7. 21	16. 45
25... 8. 42	40 $\frac{1}{2}$	8. 37	0. 21. 42	17. 46
M I L I E U.....				16. 37

Cette tache a souffert des altérations considérables pendant la durée de son apparition, & sembloit s'être rapprochée d'une autre tache voisine, dont voici les observations, ainsi que de deux autres observées de même par M. Méchain, pendant quatre jours chacune, & de trois autres observées par moi.

ANNÉE 1778.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISONS.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN solaire.
<b>A O Û T</b>				
19 à 7 <sup>h</sup> 50'	40 <sup>h</sup> $\frac{1}{4}$ apr. le cent.	18' 19" du bord B.	9 <sup>f</sup> 16 <sup>d</sup> 14'	7 <sup>d</sup> 15' B.
20... 8. 5	26 $\frac{1}{2}$	17. 36	10. 2. 7	7. 15
21... 7. 47	12 $\frac{1}{2}$	16. 45	10. 16. 27	7. 6
22... 8. 5	1 $\frac{1}{2}$ av. le cent.	15. 35	11. 1. 0	7. 24
23... 8. 23	16	14. 18	11. 15. 36	7. 35
24... 8. 22	29 $\frac{1}{2}$	12. 55	11. 28. 4	7. 55
25... 8. 42	40 $\frac{1}{4}$	11. 30	0. 15. 2	8. 29
27... 6. 40	35 $\frac{1}{2}$ ap. le cent.	17. 57	9. 29. 50	9. 21
28... 8. 24	23 $\frac{1}{2}$	17. 17	10. 13. 18	8. 53
29... 8. 10	9 $\frac{1}{2}$	15. 52 $\frac{1}{2}$	10. 27. 32	8. 37
31... 8. 29	17 $\frac{1}{2}$ av. le cent.	13. 24	11. 24. 29	8. 5
27... 8. 40	46 $\frac{1}{2}$ ap. le cent.	14. 30	9. 20. 38	24. 0
28... 8. 24	37 $\frac{1}{2}$	13. 52	10. 3. 32	24. 25
29... 8. 10	26	13. 3	10. 16. 55	24. 34
31... 8. 29	2 $\frac{1}{2}$	10. 39	11. 13. 11	26. 0
29... midi	39 du 2. <sup>e</sup> bord	4. 21 du bord A.	9. 17. 43	20. 27 A.
<b>SEPTEMBRE</b>				
1... 9 $\frac{1}{2}$ m.	74	25. 17 du bord B.	11. 3. 8	30. 4
3... 9 $\frac{1}{2}$ m.	33 $\frac{1}{2}$ du 1. <sup>er</sup> bord	22. 50	0. 0. 56	28. 38
3... 9 $\frac{1}{2}$ m.	57 du 2. <sup>e</sup> bord	24. 28 $\frac{1}{2}$	10. 20. 47	22. 25

Cette dernière étoit une tache longue & remarquable, qui étoit entrée à la fin d'Août. Celle que j'ai observée le 1.<sup>er</sup> & le 3 étoit ronde, bien terminée, avec une large nébulosité.

La première des trois taches suivantes est une très-belle tache observée par M. Méchain & par moi : les observations du 19 Septembre sont doubles dans les trois taches suivantes, parce que ce jour-là je les observai, ainsi que M. Méchain. Dans les observations du 20 & du 23, M. Méchain a oublié de marquer l'heure, mais on peut supposer que c'est vers les 9 heures du matin.

416 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

ANNÉE 1778.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISONS.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.	MILIEU.
SEPTEMBRE					
18 à 7 <sup>h</sup> 46'	20 <sup>h</sup> $\frac{1}{2}$ ap. le cent.	5' 26" du bord A.	10 <sup>h</sup> 16 <sup>d</sup> 7'	22 <sup>d</sup> 16' A.	21 <sup>d</sup> 24'
19.. 8. 52	11 $\frac{1}{2}$	6. 28	10. 29. 27	19. 33	
19.. 10. 10	53 $\frac{1}{2}$ au 2. <sup>e</sup> bord	25. 34 du bord B.	11. 0. 19	22. 15	
20	0 $\frac{1}{2}$ av. le cent.	7. 33 du bord A.	11. 13. 59	21. 49	
23	36	19. 57 du bord B.	0. 28. 15	21. 10	
19.. 8. 52	37 $\frac{1}{2}$ ap. le cent.	6. 34 du bord A.	10. 2. 11	12. 42	13. 14
19.. 10. 10	27 au 2. <sup>e</sup> bord	25. 34 du bord B.	10. 2. 11	13. 37	
20	28 $\frac{1}{2}$ ap. le cent.	7. 2 du bord A.	10. 15. 16	13. 24	
19.. 8. 52	8 avant le cent.	14. 38 du bord B.	0. 4. 58	8. 32 B.	9. 9
19.. 10. 10	72 $\frac{1}{2}$ du 2. <sup>e</sup> bord	17. 43 du bord A.	0. 6. 12	10. 12	
20	19 avant le cent.	13. 5 du bord B.	0. 17. 36	9. 5	
23	48 $\frac{1}{2}$	8. 40	2. 2. 5	8. 48	

La suivante est une très-belle tache que j'ai observée six fois avec mon micromètre adapté à une lunette de neuf pieds; elle a bien la même déclinaison que celle du 1.<sup>er</sup> Août, mais elle retarde de deux jours; ainsi ce ne peut être la même. Elle est suivie de trois autres taches: il y a d'abord quatre observations sur deux taches assez remarquables, ensuite une seule observation sur une tache extrêmement méridionale, mais mal terminée, & qui faisoit l'extrémité d'un long amas dans cette partie méridionale, où elles étoient en général mal terminées; il est rare de voir des taches à une si grande distance de l'équateur du Soleil, comme l'avoit déjà remarqué Galilée (Voyez ci-dessus, page 397). Je n'en vois pas la raison; mais cela même est un motif suffisant pour observer spécialement les taches qui ont une grande déclinaison solaire, afin de parvenir à connoître s'il y a réellement une règle à cet égard. On verra ci-après une tache à 40 degrés de déclinaison, page 423.

ANNÉE



ANNÉE 1778.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.	MILIEU.
SEPTEMBRE 30 à 10 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup> .	5" du 2. <sup>e</sup> bord	15' 7" du bord A.	10 <sup>f</sup> 4 <sup>d</sup> 16'	23 <sup>d</sup> 56' B.	23 <sup>d</sup> 6'.
OCTOBRE					
1.. 11. 0	11 $\frac{1}{2}$	15. 25	10. 14. 51	22. 55	
2.. 10. 0	19	16. 14	10. 27. 4	23. 39	
4.. 11. 0	41 $\frac{1}{2}$	18. 21	11. 25. 1	23. 3	
5.. 10. 30	52 $\frac{1}{2}$	19. 45	0. 10. 44	21. 59	
8.. 9. 45	86 $\frac{1}{2}$	24. 7	1. 17. 25	23. 3	
12.. 9. 30	9 $\frac{1}{2}$ du 1. <sup>e</sup> bord	18. 38	2. 18. 48	10. 13 A.	
13.. 9. 30	5	19. 27	3. 1. 5	10. 30	
12.. 9. 30	25 $\frac{1}{2}$ du 2. <sup>e</sup> bord	12. 21	11. 8. 23	8. 13 B.	
13.. 9. 30	38	13. 41	11. 23. 55	8. 21	
27.. midi	46 $\frac{1}{2}$	3. 34	11. 19. 32	31. 24 A.	

Je n'avois pas encore vu de tache aussi éloignée de l'Équateur solaire, que la dernière du 27 Octobre, & je ne l'ai placée ici que par cette raison; mais au mois de Juillet 1780, il en a paru une à 40 degrés de déclinaison solaire boréale.

Au mois de Novembre, M. Méchain a observé deux belles taches; l'une étoit la même que celle du mois de Mai & du mois de Juin, dont j'ai parlé ci-dessus; les observations du mois de Novembre sont dans mon premier Mémoire; l'autre étoit un peu moindre: voici les observations de celle-ci.

ANNÉE 1778.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.	MILIEU.
NOVEMBRE					13 <sup>d</sup> 30'
7 à 0 <sup>h</sup> 37 <sup>f</sup> .	35" $\frac{1}{2}$ ap. le cent.	7' 47" $\frac{1}{2}$ du bord A.	0 <sup>f</sup> 1 <sup>d</sup> 28'	13 <sup>d</sup> 31' A.	
8. 10. 5m.	25 $\frac{1}{2}$	8. 50	0. 15. 1	12. 33	
11. 9. 28	13 $\frac{1}{2}$ av. le cent.	12. 35	1. 27. 5	12. 48	
13. 9. 33	40 $\frac{1}{2}$	17. 45	2. 25. 20	15. 6	

Mém. 1778.

Ggg

# 418 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

La première des deux suivantes ressembloit à celle qui précède; mais elle a reparu trois jours plus tôt que la précédente n'auroit dû revenir.

ANNÉE 1778.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.
DÉCEMBRE				
2 à 1 <sup>h</sup> 0'.f.	108" au 1. <sup>er</sup> bord	9' 2" au bord A.	1 <sup>f</sup> 0 <sup>d</sup> 45'	15 <sup>d</sup> 50' A.
12 à 9.50 m.	21 $\frac{1}{2}$ ap. le cent.	12. 33 au bord B.	2. 3. 18	16. 25 B.

Au mois de Janvier 1779, M. le Fevre, qui s'occupe depuis long-temps & avec succès, de l'Astronomie, a observé quatre taches, dans mon Observatoire du Collège royal, avec un sextant de 4 pieds de rayon placé dans le Méridien, & il en a fait lui-même le calcul.

ANNÉE 1779.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.
Janvier 7	19",5, 2. <sup>e</sup> bord	10' 57" du bord B.	1 <sup>f</sup> 25 <sup>d</sup> 48'	16 <sup>d</sup> 9' B.
8	31	10. 42	2. 9. 38	16. 19
9	43,5	10. 39	2. 22. 40	16. 7
10	58,5	10. 43	3. 7. 0	15. 42
11	36,5, 1. <sup>er</sup> bord	11. 31	4. 20. 17	15. 25
12	1. 49, 1. <sup>er</sup> bord	18. 37	2. 19. 41	13. 25 A.
13	1. 36,5	18. 35	3. 00. 57	13. 11
14	1. 21,5	18. 47	3. 16. 23	13. 44
15	1. 6	18. 57	4. 0. 10	13. 29
13	0. 19, 2. <sup>e</sup> bord	19. 47	2. 6. 47	17. 44
15	1. 39, 1. <sup>er</sup> bord	19. 41	3. 2. 29	17. 58
16	1. 23,5	19. 54	3. 17. 12	17. 2
16	1. 37,5, 1. <sup>er</sup> bord	20. 10	3. 5. 9	19. 48
18	1. 9,5	20. 45	4. 1. 16	19. 3
19	0. 55	21. 3	4. 15. 13	19. 17

Voici encore trois belles taches observées par M. d'Agelet, dans son Observatoire de l'École Militaire, avec le grand quart-de-cercle mural de 7 pieds  $\frac{1}{2}$  de rayon, au moment de midi.

ANNÉE 1779.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.
Mars. 6	0' 9", 2. <sup>e</sup> bord	16' 19" bord supér.	3 <sup>f</sup> 18' 31"	23 <sup>d</sup> 42' A.
8	26	17. 15	4. 14. 31	23. 19
10	48	19. 42	5. 10. 42	25. 0
11	1. 11, 1. <sup>er</sup> bord	20. 44 $\frac{1}{2}$	5. 22. 8	24. 50
13	0. 48 $\frac{1}{2}$	23. 10	6. 17. 31	24. 6
22	0. 5 $\frac{1}{2}$ , 1. <sup>er</sup> bord	14. 58 $\frac{1}{2}$	8. 5. 55	23. 51 B.
22	0. 9 $\frac{1}{2}$ , 1. <sup>er</sup> bord	13. 43	7. 26. 18	25. 15

M. Méchain a observé la même année, plusieurs belles taches, dont j'ai fait le calcul : le 1.<sup>er</sup> Juillet il y en avoit une autre fort belle, qui passoit 43 secondes avant le centre du Soleil, & à 10' 9" du bord austral.

ANNEE 1779.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.
J U I N 25 à 7 <sup>h</sup> 34 <sup>m</sup> .	0' 26" $\frac{1}{2}$ , 2. <sup>e</sup> bord	11' 16" $\frac{1}{2}$ bord infér.	7 <sup>f</sup> 23 <sup>d</sup> 17'	18 <sup>d</sup> 31' A.
28.. 9. 0	0. 0 $\frac{1}{2}$ av. le cent.	10. 17	9. 5. 48	17. 56
J U I L L E T 1.. 8. 16	0. 42 $\frac{1}{2}$	9. 43 $\frac{1}{2}$	10. 20. 1	18. 37
S E P T E M B R E 29.. 8. 39	1. 13, 1 2. <sup>e</sup> bord	20. 54, 3 bord sup.	0. 6. 28	12. 32
30.. 8. 29	1. 25, 7	19. 14, 5	0. 20. 55	12. 11
O C T O B R E 2.. 8. 41	0. 20, 2, 1. <sup>er</sup> bord	15. 55, 7	1. 19. 45	11. 54
4..	0. 7	13. 25, 5	2. 15. 14	10. 58

# 420 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Tache  
qui a duré  
plus de quatre  
mois.

Au mois de Mai 1779, j'ai observé une belle tache qui me paroît avoir duré jusqu'au mois de Novembre, du moins les déclinaisons sont peu différentes, & les intervalles des retours sont à très-peu près proportionnels; les observations du mois de Juillet ont été faites & calculées par M. Lefevre, dans mon Observatoire du Collège royal: on la voyoit sans lunette; elle avoit 32 secondes de diamètre; & la nébulosité 1' 30" \*.

ANNÉE 1779.	TEMPS MOYEN.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	ASCENS. droite.	DÉCLIN. solaire.
Mai... 14	8 <sup>h</sup> 56' mat.	1' 10" bord or.	21' 6" au bord A.	7 <sup>f</sup> 18 <sup>d</sup> 58'	16 <sup>d</sup> 3' B.
Juin... 7	10. 0	0. 24,5	22. 13	6. 28. 33	14. 23
9	9. 0	0. 44.	21. 5	7. 22. 33	14. 51
13	9. 0	0. 36 bord occ.	18. 31	9. 18. 53	15. 32
Juillet.. 5	0. 4 soir.	0. 22 bord or.	12. 6	7. 27. 59	14. 58
8	0. 5	1. 2,2	12. 41 $\frac{1}{2}$	9. 10. 28	14. 39
9	0. 5	1. 0 bord occ.	12. 38	9. 24. 06	14. 51
10	0. 5	0. 46,5	12. 31 $\frac{1}{2}$	10. 6. 31	14. 58
11	0. 5	0. 33,5	12. 16 $\frac{1}{2}$	10. 20. 53	15. 7
12	0. 5	0. 22	11. 55	11. 4. 56	15. 23

Réfutation  
de M. Wilson.

Cette tache qui avoit une fort grande nébulosité, la conservoit encore très-sensiblement des deux côtés le 14 Juillet à 9 heures du matin, étant à 50 secondes seulement du bord du Soleil. Le 15, elle n'étoit qu'à peu de secondes du bord, & je distinguois encore la nébulosité dans la partie tournée du côté du centre du Soleil, avec ma lunette achromatique. J'ai fait la même observation les 13 & 14 Juillet 1780, sur une très-belle tache qui approchoit du bord, ce qui est positivement contre le système de M. Wilson, que j'ai déjà réfuté dans les *Mémoires de l'Académie*, 1776, pages 508. & suivantes.

\* Voyez le Journal de Paris, du 12 Juillet 1779.

M. Kratzeinstein, dans les *Mémoires de Copenhague pour 1778*, rapporte aussi des observations qui lui paroissent prouver que les taches du Soleil sont des cavités ; mais il croit aussi avoir distingué de larges éminences sur la surface brillante du Soleil, distinguées par une foible ombre. *Ephémérides de Berlin*, 1780, page 187. M. Bernoulli, *Nouvelles Littéraires*, 5.<sup>e</sup> cahier, page 22.

La tache dont on vient de voir les observations, fut vue encore par M. Méchain, au mois d'Août, car il est difficile de ne pas la regarder comme une seule & même tache ; elle avoit 40 secondes de diamètre, & on la voyoit à la vue simple. Ces observations sont très-exactes, parce qu'elles ont été faites avec une forte lunette achromatique, garnie d'un micro-mètre, où chaque seconde est sensible, & que les différences de passages ont été observées sept à huit fois de suite.

ANNÉE	TEMPS	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	ASCENS. droite solaire de la TACHE.	DÉCLIN. solaire.
1779.	MOYEN.				
Juillet.. 31	9 <sup>h</sup> 40' mat.	7",5 bord or.	15' 26" au bord B.	8 <sup>h</sup> 4 <sup>d</sup> 36'	12. 56 B.
Août.... 1	8. 30	15,0	15. 20	8. 19. 45	13. 28
5	9. 21	66,4	13. 45	10. 14. 18	13. 14
10	8. 24	12,0 bord occ.	9. 36,3	0. 23. 3	13. 13

L'exactitude de ces observations m'a fait desirer de les employer à l'examen de l'inclinaison & du nœud de l'Équateur solaire : mais pour accorder les deux premières déclinaisons solaires qui diffèrent de 32 minutes, il faudroit diminuer trop considérablement l'inclinaison de l'Équateur solaire ; une seconde d'erreur sur la différence de déclinaison observée, ne produit que 4 minutes sur la déclinaison solaire ; une demi-seconde sur la différence des passages en temps, ne produisoit que 2 minutes dans l'observation du 31 Juillet : il y a donc lieu de croire que s'il ne s'est pas glissé dans une de ces deux observations quelque erreur plus considérable, la tache aura subi quelque changement dans l'intervalle du 31 Juillet au 1.<sup>er</sup> Août.

## 422 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Au reste, si l'on prend le milieu entre les deux premières déclinaisons, on aura la même chose que dans les deux dernières observations; ainsi, mes déterminations de l'inclinaison & du nœud, satisfont, autant qu'il est possible, à ces quatre observations.

La nébulosité qui environnoit cette tache, examinée avec le fort équipage de la lunette de M. Méchain, lui paroissoit avoir autant d'étendue à l'Orient qu'à l'Occident, lorsque la tache étoit tout près du bord, le 11 Août; seulement, une ou deux petites taches moins avancées vers le bord du Soleil, paroissent manquer de nébulosité du côté du centre, quoiqu'elle fut bien visible du côté du bord; mais cela ne décide rien en faveur de l'hypothèse de M. Wilson, puisque la grande tache n'offroit point pareille apparence, & parce que M. Méchain ne fait point si les petites n'avoient pas déjà cette irrégularité dans leur nébulosité, avant que d'approcher du bord du Soleil.

Cette même tache a apparu les mois suivans; je l'observai à Bourg en Bresse, & M. Méchain l'a observée aussi avec soin, à Paris. Je vais employer l'apparition de Septembre à chercher la durée de la rotation.

ANNÉE	TEMPS	DIFFÉRENCE	DIFFÉRENCE	ASCENS.	DÉCLIN.
1779.	MOYEN.	de PASSAGES.	de DÉCLINAISON.	droite solaire de la TACHE.	solaire.
Août... 31	9 <sup>h</sup> 12' mat.	0' 48 bord or.	15' 53" au bord B.	10 <sup>h</sup> 23 <sup>d</sup> 36'	12 <sup>d</sup> 0' B
Sept.... 29	8. 27	1. 9	13. 16	0. 14. 34	13. 58
30	8. 29	1. 20 $\frac{1}{2}$	11. 54 $\frac{1}{2}$	0. 27. 37	13. 31
Octob.. 2	8. 30	0. 28 $\frac{1}{2}$ b. oc.	8. 43 $\frac{1}{2}$	1. 24. 20	14. 34
4	8. 35	0. 16 $\frac{1}{2}$			
Nov.... 1	0. 42	0. 15	6. 15	4. 1. 37	14. 31

J'ai réduit les quatre observations de la fin de Juillet & du commencement d'Août, à une seule, & en prenant un milieu, je trouve que la tache avoit 10<sup>h</sup> 14<sup>d</sup> d'ascension droite solaire, le 4 Août, à 20<sup>h</sup> 8', temps moyen; par les quatre observations de la fin de Septembre & du commencement

d'Octobre, je trouve qu'elle avoit 1<sup>r</sup> 20<sup>d</sup>, le 1.<sup>er</sup> Octobre à 10<sup>h</sup> 40' : en comparant ces deux résultats moyens, dans lesquels sont fondus huit observations très-exactes, j'ai pour la durée d'une rotation, 25<sup>j</sup> 9<sup>h</sup> 56', ce qui s'accorde singulièrement avec la durée que j'avois établie, *Mém. 1776, p. 497.*

Durée de la rotation,

J'ai réduit de même les six observations du commencement de Juillet, à une même époque, & elles m'ont donné pour le 8 Juillet, à 9<sup>h</sup> 50', une ascension droite solaire de 9<sup>r</sup> 15<sup>d</sup>; cette position, comparée avec celle du 1.<sup>er</sup> Octobre, donne pour chaque révolution, 25<sup>j</sup> 9<sup>h</sup> 43', ce qui diffère encore bien peu de 25<sup>j</sup> 10<sup>h</sup>; révolution que j'avois trouvée par de plus longs intervalles, *pages 403, 410 & 413.*

Au mois de Juillet 1780, il a paru une belle tache alongée, dans la partie septentrionale du Soleil, à une déclinaison de 40 degrés, plus grande qu'aucune de celles qu'on avoit observées. Voici trois observations de M. Méchain.

Tache à 40 degrés de déclinaison,

ANNÉE	TEMPS	DIFFÉRENCE	DIFFÉRENCE	ASCENS.	DÉCLIN.
1780.	MOYEN.	de PASSAGES.	de DÉCLINAISON.	droite solaire de la TACHE.	solaire.
Juillet. 5	4 <sup>h</sup> 52' mat.	29 <sup>''</sup> ,9 au 2. <sup>e</sup> bord	5' 46 <sup>''</sup> au bord sup.	7 <sup>r</sup> 12 <sup>d</sup> 21'	40 <sup>d</sup> 3' B.
8	10. 3	41,0	6. 16	8. 21. 42	40. 25
9	10. 5	50,7	6. 24	9. 4. 34	40. 15
12	8. 30	80,5	6. 16	.....	.....

Il a paru aussi dans le mois de Juillet, une belle tache double, visible sans lunette, & qui a subsisté jusqu'au mois d'Août, que M. Méchain a observé son retour. Son atmosphère étoit fort vaste; le 13, elle n'étoit pas à 2 minutes du bord du Soleil, & l'atmosphère étoit encore fort grande des deux côtés; le 14, on distinguoit à peine un petit filet d'atmosphère des deux côtés de la tache, mais il n'y en avoit pas plus d'un côté que de l'autre, ce qui infirme toujours de plus en plus, dans mon idée, l'hypothèse de M. Wilson, dont j'ai parlé ci-dessus, *page 420.*

ANNÉE 1780.	TEMPS MOYEN.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	ASCENS. droite solaire de la TACHE.	DÉCLIN. solaire.
Juillet. . 5	8 <sup>h</sup> 36' mat.	29 <sup>h</sup> ,9 du 2. <sup>e</sup> bord	11' 5" au bord B.	8 <sup>h</sup> 9 <sup>d</sup> 17'	19 <sup>d</sup> 26' B.
8	9. 48	71,7	11. 26	9. 21. 41	19. 18
9	9. 55	86,3	11. 31	10. 5. 29	18. 50
Août. . . 2	8. 44	30,0	13. 42	9. 9. 47	18. 42
5	8. 30	69,1	11. 49 $\frac{1}{2}$	10. 20. 15	19. 42
8	8. 9	28,4 du 1. <sup>er</sup> bord	9. 17	0. 0. 22	19. 55

Ayant calculé les ascensions droites solaires de la tache dans ces six observations, je les ai comparées deux à deux;

Par les Observations du 9 Juillet & du 2 Août, je trouve 25<sup>i</sup> 18<sup>h</sup> 50'

Par celles . . . . . du 8 Juillet & du 5 Août, je trouve 25. 15. 24

Et par celles . . . du 5 Juillet & du 8 Août, je trouve 25. 19. 9.

Ces résultats diffèrent beaucoup de ceux que j'ai trouvés par les observations précédentes; je ne sais si cela vient du peu d'intervalle des observations ou d'un changement dans la tache.

Il paroît donc par ce Mémoire & par le précédent, qu'il y a des taches fort considérables, qui reparoissent au même point physique du disque solaire, tandis que d'autres, également remarquables, paroissent à des points un peu différens; c'est une objection contre mon hypothèse des montagnes fixes dans le Soleil: si l'on vouloit s'en tenir à l'hypothèse ancienne, & supposer que les taches sont des scories nageantes à la surface du Soleil, on pourroit dire qu'il y a des montagnes intérieures qui arrêtent ces corps flottans, & que par cette double cause, il doit y avoir des taches qui reparoissent au même point, quoique la plupart paroissent en des points différens. Il faudra encore beaucoup de temps & d'observations pour achever d'éclaircir de pareils doutes; mais en attendant, je crois qu'on ne peut révoquer en doute la durée de la rotation, que j'ai établie de 25 jours 10 heures,



*EXTRAIT*



## EXTRAIT

DES

## OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES,

*Faites à la campagne, près de Paris, pendant les Froids de Janvier 1767; avec des Remarques sur la cause des inégalités des Observations au Thermomètre, & sur l'effet du Froid sur les Animaux, sur les Blés & sur les Plantes potagères. \**

Par M. ADANSON.

LE peu d'accord que l'on voit entre les Observations faites au Thermomètre dans les différens quartiers de Paris, sur les grands Froids que nous venons d'essuyer les 6, 7 & 12 de ce mois, dont la communication a été donnée à l'Académie; & entre celles que j'ai faites au milieu d'un grand jardin, bien à découvert & dans la campagne, me détermine à faire part de mes remarques, non-seulement sur ce froid, mais encore sur ses effets, tant sur les animaux & les plantes, que relativement à l'épaisseur de la glace & à la chaleur du Soleil à midi pendant les jours où il a paru. Voici les moyens dont je me suis servi pour observer avec précision.

La  
à l'Académie  
le samedi  
31 Janvier  
1767.

Deux thermomètres à l'esprit-de-vin, construits avec la plus grande attention par le sieur Cappy, suivant les principes de M. de Reaumur, portant 80 degrés à l'eau bouillante, nus, c'est-à-dire enfermés dans un tube de verre, & suspendus au milieu d'un châssis, sans autre appui que deux cordons qui lient ce tube au châssis par les deux bouts, étoient ainsi fixés à un pieu, & à trois pieds au-dessus de terre, au milieu du susdit jardin; je les appellerai A.

Moyens

Deux autres thermomètres aussi à tube, de la même

\* L'impression de ce Mémoire ayant été oubliée dans le volume de 1767, on a cru devoir le publier dans celui-ci, pour donner lieu à une comparaison entre le Froid de 1767 & celui de 1776.

## 426 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

construction, & d'une exactitude & conformité dans leur marche avec les deux précédens, éprouvée & confirmée par des observations suivies & très-variées depuis plusieurs années, étoient placés contre un mur, l'un au Nord, l'autre au Sud, en dehors d'une fenêtre de ma maison, à 21 pieds au-dessus du niveau des deux thermomètres ci-dessus; je les appellerai *B*.

Je ne parle pas d'un cinquième thermomètre, construit en 1745, par M. l'Abbé Menon, sous les yeux de M. de Reaumur, non plus que de deux autres thermomètres qui étoient placés, soit à côté des deux derniers, soit dans l'intérieur de mon appartement.

Observations. Je vais exposer dans une Table, les résultats que m'ont donnés ces divers thermomètres, dans les trois jours de grands froids que nous venons d'essuyer, en ne prenant pour chaque jour que trois termes les plus éloignés; le premier au point du jour, vers les 7 heures du matin, c'est-à-dire, avant le lever du Soleil, qui est communément le temps le plus froid de la nuit pendant toute l'année, si ce n'est en hiver, lorsque par un temps couvert, il vient à souffler successivement différens vents qui changent cette disposition; le second à midi précis, ou entre midi & une heure, qui est le temps le plus chaud du jour en hiver; le troisième à 8 heures du soir, où la température tient une espèce de milieu entre les deux précédentes. J'y ai joint les observations au baromètre, & sur les vents & les nuages, ou l'état de l'atmosphère.

ANNÉE	À 7 HEURES du MATIN.	À 12 HEURES au SOLEIL.	À 8 HEUR. du SOIR.	ÉPAISSEUR de la GLACE.	VENTS.	ÉTAT de L'ATMOSPH.
1767.						
Janvier 6	0,3 <sup>d</sup> A. 0,2 B. 27 <sup>10</sup> pouc. 9 <sup>11</sup> lig.	2 <sup>d</sup> ..... 2 ..... .....	0,11 <sup>d</sup> ..... 0,9 ..... .....	4 lignes	Sud-ouest, foible & fort par intervalle.	Couvert, petite neige.
Janvier 7	0,12 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> A. 0,10 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> B. 27 <sup>10</sup> pouc. 11 <sup>11</sup> lig.	0,3 ..... 0,2 ..... .....	0,8 ..... 0,6 ..... .....	20 lignes	Nord-est, foible & médiocre.	Serein. Serein.
Janvier 12	0,14 A. 0,12 B. 27 <sup>10</sup> pouc. 7 <sup>11</sup> lig.	0,3 ..... 0,2 ..... .....	0,11 ..... 0,9 ..... .....	24 lignes	Sud, foible & méd.	Serein. Serein.

Les différences données par ces thermomètres viennent, comme l'on voit, de la différence de leur exposition, & on conviendra aisément que les deux appelés *A*, exposés isolément au milieu du jardin, lesquels ont donné le plus grand froid de 0,14 degrés, le 12 au matin, un peu avant le lever du Soleil, ont marqué la vraie température de l'air libre, celle qui agit immédiatement sur les Plantes; au lieu que ceux appelés *B*, ont donné 1 à 2 degrés de moins, parce qu'étant contigus au mur de la maison & abrités, ils participoient à la chaleur de ces murs & du feu intérieur des appartemens.

Depuis que j'observe, j'ai remarqué constamment cette différence entre les thermomètres appliqués sur une planche contre un mur, & entre ceux qui sont isolés. J'en ai fait mention dans les observations météorologiques, que je communiquai dès l'année 1757, pour le *Journal de Médecine*, en disant que la différence de la température de l'air observée dans Paris & à la campagne, est de 1 degré dans l'espace de 0 à 5 degrés, tant au-dessus qu'au-dessous, & de 2 degrés dans l'espace de 0 à 10 degrés, progression qui doit sans doute augmenter à un plus grand nombre de degrés.

Le vent seul est capable de donner une différence pareille; c'est ainsi que le second des deux thermomètres *A*, qui est à l'abri derrière le piquet de 1 pouce de diamètre qui le supporte, marque un demi-degré depuis 0 jusqu'à 5 degrés, & 1 degré depuis 0 jusqu'à 14 degrés de moins que le premier qui est isolé; lorsque le vent froid vient du côté où le piquet le met à l'abri, comme les 12 & 13 Janvier, où il souffloit du Sud & du Sud-est. La même chose est arrivée, & arrive tous les jours au thermomètre *B*, de la fenêtre regardant le Sud; il marquoit 0,5 degrés par le vent froid de Sud qui frappoit dessus, pendant que le thermomètre opposé *B* regardant le Nord, se soutenoit constamment à 0,4 degrés.

Par les expériences rapportées dans la Table précédente, on voit que la chaleur du Soleil, donnant sur le premier des deux thermomètres *A* isolé, fut le 7 à midi, jusqu'à près

H h h ij

428 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

de 1 heure, à 3 degrés au-dessus de 0, tandis que le second de ces mêmes thermomètres, qui étoit à 6 pouces de distance du premier, exposé à l'ombre d'un piquet de 1 pouce seulement de diamètre, marquoit 0,3 degrés; ce qui donne à la chaleur du Soleil 6 degrés au-dessus de la température de la campagne ombragée. Le 12, jour du plus grand froid, le thermomètre isolé marquoit à midi au Soleil 9 degrés, pendant que son voisin marquoit 0,3 degrés à l'ombre, ce qui donne 9 degrés pour la chaleur des rayons du Soleil, frappant immédiatement sur le tube isolé du thermomètre.

Épaisseur  
de la glace.

L'épaisseur journalière de la glace fut assez proportionnelle aux degrés de froid, savoir; de 4 lignes par 0,3 degrés; de 20 lignes, par 0,12 degrés  $\frac{1}{2}$ ; & de 24 lignes, par 0,14 degrés. Les observations ont été faites d'un midi à l'autre, c'est-à-dire, sur de la glace cassée, par exemple, aujourd'hui à midi, en nettoyant aussitôt l'eau de manière que le lendemain à midi, au bout de 24 heures, on avoit une glace toute nouvelle.

L'épaisseur totale de la glace, formée depuis les premières gelées du 4 Janvier, jusqu'au premier dégel arrivé le 22 suivant, soit sur la Seine, soit sur les eaux tranquilles de la Gare, soit dans un bassin de mon jardin, prise dans les endroits unis, sans neige & sans autres boufins, & où les glaçons ne s'étoient pas entassés ni recouverts les uns les autres, étoit de 6 pouces  $\frac{1}{2}$  à 7 pouces au plus. Il est bon de remarquer que la rivière de Seine a été prise entièrement après un froid très-médiocre, comme de 0,3 à 0,5 degrés, parce que les eaux étant extrêmement basses, & même beaucoup plus basses qu'on ne les a vues en hiver, depuis bien des années, avoient moins de rapidité dans leur cours.

Si l'on ajoutoit ensemble tous les produits de la glace formée chaque jour, & enlevée toutes les 24 heures, depuis le 4 de Janvier inclusivement jusqu'au 21 inclusivement, on auroit 160 lignes, c'est-à-dire, 13 pouces  $\frac{1}{3}$  pour son épaisseur totale, au lieu de 7 pouces seulement qu'elle a eu en se formant par couches journalières, appliquées les unes

au-dessous des autres qui leur servoient d'abri. On sent bien par la même raison, que si l'on eût cassé la glace d'heure en heure, tous ces produits rassemblés eussent donné plus de 13 pouces à son épaisseur, ainsi occasionnée artificiellement. J'ai laissé tous ces objets de curiosité, pour m'en tenir à l'observation de son épaisseur naturelle, & pour la comparer à la congélation de la terre qui a été presque d'un tiers moindre, puisqu'elle n'a pas passé la profondeur de 5 pouces.

L'épaisseur de la glace montre dans sa formation bien des irrégularités qui reconnoissent plusieurs causes, dont je pourrois assigner la gradation ou la marche fondée sur nombre d'observations; mais j'en réserve le détail pour d'autres temps. Il me suffira de faire remarquer ici, en faveur des personnes qui construisent des thermomètres; 1.<sup>o</sup> que la glace conserve intrinséquement un degré de froid proportionnel à celui qui l'a formé; 2.<sup>o</sup> que la neige produite en pilant de la glace formée par 0,14 degrés de froid, le 12 de Janvier, employée ce même jour, sur le champ, dans une chambre qui étoit pour lors à la température de 8 à 9 degrés, marquoit le terme de la congélation à 0,5 degrés; 3.<sup>o</sup> enfin que pour avoir, dans un cas pareil, le terme 0 qui marque le premier degré de la congélation de l'eau, il faut laisser cette glace pilée en neige dans une chambre tempérée, & ne l'employer pour le thermomètre, que quand elle est presque entièrement fondue.

L'effet de ce froid de 0,14 degrés (qui ne fut par conséquent que de 1 degré moindre que celui observé en 1709, & plus grand que tous ceux observés depuis autour de Paris; soit en 1740, où il fut de 0,10 degrés  $\frac{1}{2}$ ; soit en 1742, où il fut de 0,13 degrés  $\frac{1}{2}$ ), a été tel que les Plantes qui avoient résisté aux froids précédens de 0,5 degrés, & qui n'étoient pas couvertes de neige, dont la hauteur étoit de 4 pouces environ, ont été gelées entièrement, comme le Souci, la Giroflée-quarantain blanc & rouge, le Lavatera, appelé *Althæa maritima arborea veneta*, par Tournefort, l'Ortie-grièche annuelle, la Mercuriale, la Valériane rouge, le Pois-

Effet  
de ce froid  
sur les Plantes,

miccho hâtif, & le Pois-nain, semés dès le 10 Octobre; néanmoins toutes les parties de ces Plantes qui étoient cachées sous la neige, ont résisté à l'action de la gelée, & promettent de repousser aux premières chaleurs.

Il en a été de même des blés semés au premier d'Août, de Septembre & d'Octobre; ceux d'Août étant trop avancés & montés en tuyaux, ont été entièrement détruits; ceux de Septembre ont peu souffert, excepté les blés mars; tels que le Scourjon de Bengale, le Sucrion, l'orge Baillarge, les Avoines, le Polar de Bengale, celui de Viljuif, l'Andalou, & la petite Speaute, appelée *Speauton* en Provence, qui étant déjà montés en chaume, ont péri jusqu'aux racines. Les Polars d'hiver les plus hâtifs, qu'on pourroit appeler *Mi-mars*, parce qu'ils semblent tenir un milieu entre les blés d'hiver & les blés mars, tels que le Grosset, la grande Speaute de Bordeaux, &c. ont perdu seulement toutes les feuilles qui étoient au-dessus de la neige. La grande Speaute de Flandre, le Locar des pays du Nord, & le Seigle qui paroît être plus dur au froid qu'aucun autre blé connu, ont été intacts dans toutes leurs parties. Les blés semés au 1.<sup>er</sup> Octobre & au 1.<sup>er</sup> Novembre, étant moins avancés que ceux de Septembre, & entièrement couverts de neige, ont encore moins souffert. Le Scourjon de Bengale, & le Sucrion ont été les seuls que la gelée ait détruits entièrement. Enfin de plus de trente espèces ou genres de blés les plus différens de tous les climats, qui ont été semés au 1.<sup>er</sup> Décembre, c'est-à-dire, depuis deux mois, pas un n'a encore levé faute de chaleur \*, & il y a peu d'hivers où le Froment reste si long temps sous terre; ces diverses remarques jointes à beaucoup d'autres expériences de ce genre, dont je ferai part à l'Académie, semblent fixer le temps moyen des semailles des blés d'hiver, au 1.<sup>er</sup> Octobre pour le climat de Paris.

Les herbes potagères qui auroient péri par des froids

---

Ils ont levé depuis la première lecture de ce Mémoire, le 14 de Février, c'est-à-dire, après soixante-douze jours,

beaucoup moindres que 0,14 degrés, ont résisté, parce qu'elles étoient couvertes de neige; telles sont les Laitues pommées d'hiver, les Chicons, la Chicorée frisée, la Scarole, l'Épinard, le Cerfeuil, l'Oseille, le Persil: l'Œillet, le Fraiser & les Choux-verts, quoique non couverts de neige, ont résisté au grand froid; & il paroît que ces Plantes, sur-tout le Fraiser, & peut-être l'Œillet, résisteroient à des gelées encore beaucoup plus fortes. La plupart des jeunes branches du Figuier & du Laurier-franc, ainsi que les feuilles & boutons à fleur de ce dernier, ont été gelés à la longueur de 5 à 6 pouces.

Si ces froids de 0,14 degrés qui ont sévi dans la campagne autour de Paris, ont épargné bien des Plantes, à cause de la couche de neige de 4 pouces d'épaisseur dont elles étoient heureusement couvertes, ils ont fait sentir leurs terribles effets sur quelques animaux, & même sur les hommes. J'ai trouvé dans mon jardin plusieurs oiseaux, entr'autres des Pinsons, morts de froid, & d'autres qui dénués de force, se laissoient prendre à la main; un Moineau-franc mâle bien vigoureux, mis par expérience en terre, le 11. au soir, à la profondeur de 6 pouces, dans un pot à fleur foncé d'un peu de paille, & recouvert d'un autre pot renversé en forme de chapeau, fut trouvé gelé le lendemain matin 12.

Sur  
les Animaux,

Le Peuple a beaucoup souffert: on amenoit tous les jours à Paris plusieurs hommes & femmes trouvés morts de froid & gelés à la campagne: il est aussi constant que plusieurs personnes aisées, obligées de voyager, allant de Paris à Versailles, dans leurs équipages, ont essuyé une maladie très-sérieuse, par le seul effet du froid: moi-même, pour avoir voulu seulement descendre dans mon jardin, j'ai essuyé une fluxion presque aussi considérable que celle que j'éprouvai par les grands froids de Février 1754, à mon arrivée du Sénégal en Bretagne, où j'eus gelée & dure comme une pierre, la moitié gauche du visage exposée au vent de Nord-est qui souffloit alors, & qui donnoit 0,18 degrés de froid au thermomètre de M. de Reaumur. Ma première fluxion de cette

432 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

année, occasionnée par le froid de  $0,12$  degrés  $\frac{1}{2}$ , du 7 Janvier, étoit presque entièrement dissipée le 12, lorsque le froid de  $0,14$  degrés, auquel je m'exposai pour observer le thermomètre, la renouvela au point que j'en ai encore aujourd'hui des ressentimens de douleurs très-violentes dans les os maxillaires. On peut juger par les effets de ces froids, qui ne sont que les froids les plus ordinaires de la Suède, de la Russie & des autres pays du Nord, à quels dangers s'exposent les habitans de nos climats tempérés, qui veulent s'expatrier pour aller habiter ces contrées glacées.

Je ne m'étendrai pas davantage sur ces observations isolées, mais je travaillerai, à mon premier loisir, à mettre en ordre une suite nombreuse de résultats que j'ai depuis plus de vingt ans que j'observe, soit au Sénégal, soit en France, les divers météores, les vents, les nuages, la quantité d'eau de pluie, & sur-tout son évaporation, & celle de la terre imbibée, dont je ne vois nulle part des Tables, lesquelles cependant me paroissent aussi importantes que celles de l'eau de pluie, pour trouver le rapport de l'une à l'autre, & saisir en quoi peut consister la quantité qui sert à la végétation des plantes, celle qui forme les lacs & les rivières, celle enfin qui pénètre dans l'intérieur de la terre pour s'y perdre, & ne reparoitre peut-être jamais à sa surface, ou au moins seulement dans ces circonstances éloignées qui occasionnent dans notre globe ces révolutions terribles, dont les siècles les plus reculés montreront encore les traces presque ineffaçables.



EXPÉRIENCES



## EXPÉRIENCES

*Sur une espèce de Stéatite blanche, qui se convertit seule  
au feu en un beau biscuit de Porcelaine.*

Par M.<sup>rs</sup> GUETTARD & LAVOISIER.

**L**A plupart des terres & pierres argileuses sont des composés plus ou moins métalliques, & il est extrêmement rare de trouver des argiles assez pures & assez blanches pour être employées à la fabrication de la Porcelaine: c'est sans doute cette grande rareté des argiles blanches & des kaolins qui a retardé long-temps en France les progrès de l'art de la Porcelaine; & nous manquerions peut-être encore de fabriques de ce genre, si les découvertes successives de M. Guettard, de M. le Comte de Lauraguais, & de M.<sup>rs</sup> Macquer, Baumé & de Montigny, n'eussent excité l'industrie nationale. Parmi un assez grand nombre de terres que nous avons ramassées en France dans différens voyages que nous y avons faits, M. Guettard & moi, & sur lesquelles j'ai fait depuis quelques expériences, il n'en est qu'une seule qui ait paru réunir la blancheur, la ténacité suffisante & la qualité réfractaire qui caractérisent la bonne terre à Porcelaine.

Le coteau où se trouve cette terre est situé à une lieue & demie ouest de Plombières: le *haut du seuil* est situé au haut de ce coteau, & *Fainmont* dans le bas; circonstances suffisantes pour en déterminer assez exactement la position, pour qu'il ne soit pas possible de s'y méprendre.

La hauteur du coteau, depuis le haut du seuil jusqu'au niveau du ruisseau qui passe à Fainmont, est de quatre cents cinquante à cinq cents pieds environ, mesuré par le baromètre; il est composé dans le haut 1.<sup>o</sup> de terre végétale, légère & sableuse, entre-mêlée en quelques endroits de pierres sableuses plates; 2.<sup>o</sup> de rochers horizontaux, de sable d'un grain fin, & qui approchent beaucoup de l'espèce de grès

*Mém. 1778.*

l i i

Lû le  
5 Septemb.  
1777.

dont on fait les meules des Rémouleurs : ces pierres sableuses occupent environ la moitié du coteau ; au-dessous on trouve des granits en bancs continus inclinés à l'horizon ; enfin, presque dans le bas , & à trente pieds environ du niveau du fond de la vallée , on trouve un banc de sept à huit pieds d'épaisseur, d'une terre blanche, verdâtre en quelques endroits, d'un grain très-fin, assez douce au toucher, & qui tient beaucoup de la stéatite.

C'est la terre blanche de ce banc qui fait l'objet de ce Mémoire : au-dessous on trouve un banc d'égale épaisseur, d'une terre à peu-près de semblable nature, mais qui, au lieu d'être blanche, est d'un vert-pâle assez agréable : cette couleur s'affoiblit beaucoup lorsque la terre se sèche.

Cette terre blanche est très-pure dans toute l'étendue du banc, & on pourroit même se dispenser de la laver ; elle n'a besoin pour être employée à faire de la Porcelaine, que d'être battue & corroyée, après quoi elle est susceptible de souffrir le tour & le moule, & cuite à l'aide d'un feu très-violent, elle donne seule & sans addition d'aucune autre matière, une belle Porcelaine assez blanche, gresseuse, infusible au plus haut degré de feu connu, & qui, d'après le petit nombre d'expériences auxquelles nous l'avons soumise, nous a paru réunir tous les caractères de perfection qu'on peut désirer.

Le banc de cette terre paroît avoir une très-grande continuité ; celui qui est au-dessous & qui a une teinte verdâtre très-marquée, peut être employé à faire des poteries de grès & des ustensiles de ménage ; nous nous en sommes assurés par des expériences. Le bois étant très-abondant dans tous les environs de ce canton, on pourroit y faire un établissement avantageux de Porcelaine & de Poterie de grès, & le transport même ne seroit pas très-dispendieux à cause de la proximité de Plombières, qui communique par plusieurs grandes routes avec l'Alsace, la Lorraine, la Franche-Comté & la Champagne.



## DESCRIPTION

DE DEUX

## MINES DE CHARBON DE TERRE,

*Situées au pied des montagnes de Voyes, l'une en Franche-Comté, l'autre en Alsace, avec quelques expériences sur le charbon qu'on en tire.*

Par M.<sup>re</sup> GUETTARD & LAVOISIER.

LES Observations rapportées dans ce Mémoire, sont extraites du Journal d'un voyage que nous avons fait ensemble en 1767, M. Guettard & moi; en conséquence, tout ce qui sera rapporté dans ce Mémoire, doit nous être regardé comme commun.

La  
le 5 Sept.  
1777.

La première des deux mines dont il va être question, est ouverte dans une montagne de schiste, entre les villages de Ronchamps & de Champagny, à deux lieues Ouest-sud-ouest de Lure, & à trois lieues Est-sud-est de Betfort.

Cette mine s'exploite à découvert & presque à la surface; comme elle étoit nouvellement ouverte lorsque nous avons eu occasion de l'observer, on ne l'avoit attaquée que par le bas de la montagne, & on n'avoit pas encore suivi les veines à une grande profondeur.

Les bancs de charbon de terre sont inclinés de trente degrés environ avec l'horizon; leur épaisseur est communément de neuf pieds, mais elle n'est pas par-tout la même.

Le banc de charbon de terre est souvent interrompu & troublé par des veines de pyrites qui n'ont pas cependant beaucoup de continuité; quelquefois aussi ces pyrites sont répandus en rognons, de la grosseur d'une noix, dans la masse du charbon.

Le ~~schiste~~ de la mine est un schiste jaunâtre dans des

endroits, & noirâtre dans d'autres; ce schite est assez tendre, il est feuilleté, mais il ne se débite pas en feuillets aussi minces que l'ardoise : lorsqu'il a été calciné, il donne de l'alun par lexiviation; on détaillera dans un moment la manière dont se fait ce travail en grand. Ce schite, comme presque tous ceux qui recouvrent le charbon de terre, contient quelques empreintes de végétaux, mais elles y sont très-rare : au-dessous du banc de charbon de terre, se trouve un schite plus noir que celui qui sert de tectum à la mine; les fouilles alors ouvertes ne nous ont pas permis de pousser plus loin nos observations.

Ce charbon de terre, par l'analyse chimique, donne à plusieurs égards les mêmes produits que le charbon de terre ordinaire, mais il en diffère essentiellement à d'autres; & c'est cette singularité, commune à la plupart des charbons de terre des Voyes, qui nous a engagés à donner cette observation à l'Académie. Soumis à la distillation à la cornue, nous en avons obtenu d'abord, à une chaleur très-douce, du flegme; ensuite il a commencé à se dégager une odeur empyreumatique très-marquée, & il a passé un peu d'huile claire & limpide, & en même temps un esprit légèrement acide, qui rougissoit complètement le sirop de violettes, & faisoit effervescence avec les alkalis; cette liqueur acide a été suivie d'une huile noire & épaisse, sentant fortement l'empyreume, & il est resté dans la cornue un charbon léger & très-inflammable.

Cette analyse du charbon de terre de Ronchamps, présente une exception remarquable, & dont il paroît que les exemples sont rares : toutes les analyses de charbons de terre qui ont été publiées jusqu'ici, si ce n'est celle publiée dans l'Encyclopédie à l'article *charbon*, annoncent qu'on retire de ce fossile de l'alkali volatil en grande abondance; celui de Ronchamps au contraire donne de l'acide.

L'un de nous se rappelle d'avoir entendu dire à M. Rouelle l'aîné, dans ses Leçons de Chimie, que le charbon de terre de Balleroy en Normandie, présentait le même phénomène,

& qu'il donnoit également de l'acide par la distillation, au lieu d'alkali volatil.

Nous avons dit que le schite qui servoit de tectum au charbon de terre de Ronchamps, étoit alumineux; & en effet, dans l'établissement naissant qui se formoit en cet endroit, lorsque nous y passâmes en 1767, M. Guettard & moi, on avoit entrepris d'y former une Fabrique d'alun, & voici comme on opéroit.

On concassoit grossièrement le schite alumineux, & on en formoit de longues planches ou couches pyramidales, disposées en toit par le haut; on entre-mêloit avec ce schite des morceaux de charbon de terre, & on ménageoit du jour pour la circulation de l'air.

Lorsque tout étoit ainsi disposé, on mettoit le feu au tas, & on laissoit la masse s'affaïsser & s'éteindre d'elle-même, ce qui n'arrive que quand tout le charbon de terre est consumé.

Il se dégage beaucoup de soufre dans cette opération, & ce soufre étoit perdu lorsque nous visitâmes cette Fabrique; mais on se proposoit de le recueillir dans la suite, & d'en tirer parti.

Lorsque le schite a été ainsi calciné, on le transporte dans de grands bassins quarrés, creusés dans la terre & revêtus de planches, dans lesquels on le lessive en remuant avec un ringard: de ces fosses, l'eau est conduite par des canaux de bois dans de grands réservoirs où elle s'épure, après quoi elle tombe dans des chaudières de plomb très-épais, qui forment des quarrés très-alongés; la liqueur est rapprochée, dans ces chaudières, jusqu'à ce qu'elle soit au point de cristallisation; enfin on la met à cristalliser dans de grandes caisses de bois.

Ces mêmes mines présentoient encore un autre objet d'industrie: on y avoit pratiqué une Fabrique de noir de fumée; cinq fourneaux étoient continuellement employés à brûler du charbon de terre pour cet objet; ces fourneaux sont fort bas, & n'ont point de cendrier; ils ont 12 pieds de long & 6 pieds de large par-devant, ils vont ensuite en

se rétrécissant vers le fond, & se terminent en un tuyau qui aboutit dans une chambre de 28 pieds de long sur 12 ou 13 de large; toutes ces chambres sont voisines & mitoyennes: à leur extrémité dans le haut est une cheminée qui aboutit dans une galerie haute, commune à toutes les chambres: cette cheminée s'ouvre & se ferme à volonté, par le moyen de tuiles & de briques, afin de pouvoir ménager convenablement le feu; communément, on ne laisse qu'une ouverture de la grosseur du poing. Au moyen de ces dispositions, la fumée circule dans la chambre, & s'attache à ses parois; une petite portion seulement parvient jusqu'à la galerie commune, où elle se rassemble de la même manière; on n'entre qu'une fois par mois dans chaque chambre; on détache le noir des murailles sur lesquelles il s'est rassemblé & on le passe à travers un tamis: ce noir est lourd, gras & mat; il sent l'empyreume, un peu le soufre, & au total il est de la qualité la plus médiocre.

On remplit les fourneaux de charbon de terre toutes les quatre heures: la matière charbonneuse qu'on en retire n'est pas encore perdue; on tire parti de tout dans ce travail, & elle est vendue pour la cuisine & les usages domestiques. Nous ignorons quel a été le succès de cette entreprise: tout ce que nous pouvons dire, c'est qu'elle promettoit beaucoup en 1767, & qu'elle paroïssoit montée & suivie par des personnes très-intelligentes.

Le charbon de terre de Ronchamps n'est pas le seul de ce canton qui donne de l'acide par distillation, au lieu de donner de l'alkali volatil: quelques morceaux que nous avons tirés de veines peu suivies qui se trouvent près Saint-Hypolite en Alsace, nous ont présenté le même phénomène.

Le village de Saint-Hypolite est situé au Nord-est de Schelestat en Alsace, & à la distance d'une lieue & demie environ de cette ville. Pour donner une idée des circonstances dans lesquelles se trouve le charbon de terre qu'on tire de ses environs, nous allons rapporter ici ce qui se trouve inscrit sur notre Journal d'observations, à la date du 23 Août 1767.

« Le village de Saint-Hypolite est à l'extrémité des

anciennes alluvions du Rhin , & tout le terrain voisin du «  
côté de la plaine d'Alsace est couvert de quartz blancs roulés, «  
qui sont quelquefois liés par un sable fin, & qui forment «  
des poudingues. «

Il en est bien autrement du terrain qui se trouve au-delà «  
de Saint-Hypolite, c'est-à-dire à l'Est, & en gagnant vers «  
la montagne : on n'est pas plutôt sorti de ce village qu'on «  
entre tout d'un coup dans un terrain composé de granit à «  
grandes plaques de Feld-spath; ces granits sont quelquefois durs, «  
mais souvent ils sont friables, & les grains qui les composent «  
se séparent aisément les uns des autres ; on diroit que ce sont «  
plutôt des détritiques de granit que des granits même, tant ils «  
ont peu de consistance. «

On s'élève ainsi insensiblement en suivant la route de «  
Sainte-Marie-aux-Mines, & en laissant à gauche un ruisseau «  
qui passe entre Roderich & Saint-Hypolite : lorsqu'on est «  
parvenu à une demi-lieue environ de ce dernier endroit, on «  
trouve à droite une coupe de 40 pieds, faite pour la facilité «  
du grand chemin ; elle offre les détails qui suivent. «

*ORDRE des bancs d'une coupe qui se trouve à une demi-lieue «  
de Saint-Hypolite, sur le grand chemin de cet endroit «  
à Sainte-Marie-aux-Mines. «*

1.° Terre rouge glaiseuse qui contient des quartz blancs roulés.....	3° 11'	«
2.° Terre noire fine sableuse, & qui a toute l'apparence d'une terre bitumineuse.....	1. 6.	«
3.° Gravier fin, ou espèce de granit tendre & sans consis- tance, mêlé de morceaux irréguliers de Feld-spath.....	4. "	«
4.° Même gravier mieux lié & plus dur, & qui forme un vrai granit.....	" 6.	«
5.° Même gravier ou granit sans consistance, qu'au N.° 3..	1. 6.	«
6.° Même gravier durci, & formant un vrai granit.....	" 4.	«
7.° Même gravier ou granit sans consistance, qu'au N.° 3..	1. 6.	«
8.° Schiste talqueux gris en feuillets.....	" 6.	«

# 440 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

» 9.° Schite noir très-bitumineux.....	n° 5.
» 10.° Granit jaunâtre, d'une consistance à-peu-près semblable » à celle des N.° 4 & 6.....	n° 4.
» 11.° Schite gris bitumineux, avec empreintes de fougères & » autres végétaux.....	1. n.
» 12.° Espèce de granit tendre, s'émiettant aisément & n'ayant » presque point de consistance, coupé par un petit filet de » charbon de terre, de 4 lignes d'épaisseur.....	5. n.
» 13.° Granit plus dur, dont les grains ont cependant médio- » crement de liaison, pénétré de bitume, & coupé par de petits » bancs de charbon de terre & de schite noir, dont les plus épais » ont 4 à 5 pouces environ.....	20. n.
» 14.° Granit un peu plus dur, & dont les grains sont passa- » blement liés, moins brun que le précédent, & qui ne paroît » pas bitumineux; il y en a environ de découvert.....	5. n.
TOTAL.....	44. 7.

Tous ces bancs s'inclinent vers le penchant de la montagne, c'est-à-dire, vers le Midi, en formant un angle environ de 20 degrés avec l'horizon,

Sur la gauche, en descendant vers le ruisseau, à peu-près dans le même plan que le banc ci-dessus n.° 13, on avoit fait différentes fouilles pour obtenir du charbon de terre: les trous sont creusés dans le même gravier graniteux que ci-dessus; mais comme ce gravier a peu de consistance, il se fait fréquemment des éboulemens qui ruinent les travaux: une circonstance qui doit encore rendre l'exploitation de ces mines peu profitable, c'est que quelquefois les petites veines de charbon de terre manquent tout-à-coup, & paroissent se fondre & pénétrer dans le gravier graniteux, qui alors est plus bitumineux. Malgré ces différens obstacles, on paroissoit disposé lors de notre passage en 1767, à entreprendre des travaux suivis en cet endroit: nous en ignorons l'évènement.

Les granits dont nous venons de parler, forment la base de la montagne: en s'élevant davantage, on observe que ces granits sont recouverts de sable rougeâtre mêlé de quartz roulés, & dans



& dans lequel on trouve des rochers d'un grain rougeâtre très-fin & très-propre à faire des meules de Rémouleur : ces grès se nomment *mollasse* dans le pays ; ce terrain sableux forme tout le haut de la montagne.

Des morceaux de charbon de terre pris dans les bancs qu'on vient de décrire , ont donné par la distillation à feu nu , par un degré de chaleur modérée , 1.<sup>o</sup> un peu de flegme ; 2.<sup>o</sup> un esprit très-légèrement acide ; 3.<sup>o</sup> une huile épaisse , noire & empyreumatique de l'acide , & pas un atome d'alkali volatil : il est resté dans la cornue un charbon léger , poreux , tel qu'on l'obtient de tous les charbons de terre.



**R E C H E R C H E S**  
**SUR L'INTÉGRATION**  
**DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.**

Par M. C O U S I N.

Lu  
en 1778.

(1.) TOUTES les Équations différentielles du second ordre peuvent être représentées par  $\frac{1}{dx} dz + \mu = 0$ ,  $\mu$  étant une fonction quelconque de  $x, y$  &  $\frac{dy}{dx} = z$ . Soit  $dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy$ ; on changera de cette manière l'équation différentielle en une équation aux différences partielles (A) . . .  $\frac{dz}{dx} + z \frac{dz}{dy} + \mu = 0$ .

On doit voir que toute solution de l'équation aux différences partielles qui renfermera une constante arbitraire, sera une des intégrales premières complètes de l'équation différentielle : une de ces solutions qui renfermeroit deux constantes arbitraires, donneroit, en faisant chacune de ces constantes successivement nulle, les deux intégrales premières complètes de l'équation différentielle ; on en tireroit encore l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles, par la Méthode que M. de la Grange a donnée dans les Mémoires de Berlin, de 1774. Mais de quelque manière qu'on parvienne à intégrer complètement l'équation aux différences partielles, on aura  $z$  par une équation qui renfermera une fonction arbitraire ; il sera facile d'en tirer deux équations particulières, qui seront les intégrales premières complètes de l'équation différentielle.

Le cas le plus simple est celui où  $\mu = 0$ , & où l'équation aux différences partielles a pour intégrale complète  $y - xz + Fz = 0$  ; on en tire  $y - xz = a, z = b$ ,

qui sont les deux intégrales premières complètes de l'équation différentielle  $\frac{dy}{dx} = 0$ ; & en éliminant  $z$ ,  $y - bx = a$ , qui, à cause des deux constantes arbitraires  $a$  &  $b$ , en est l'intégrale finie complète.

Lorsqu'on aura l'intégrale complète de l'équation (A), il sera facile de trouver celle de  $\frac{du}{dx} + (mu + n) \frac{du}{dy} + \mu' = 0$ ,  $m$  &  $n$  n'étant fonctions que de  $x, y$ ; car on réduira celle-ci à la première, en faisant  $mu + n = z$ .

(2.) Mais je remarquerai que si l'on donne à l'équation (A) la forme  $\frac{dz}{dx} + z \frac{dz}{dy} + az^2 + Cz + \gamma = 0$ ,  $a, C, \gamma$  étant des fonctions inconnues de  $x, y, z$ , telles que  $az^2 + Cz + \gamma = \mu$ , je remarquerai, dis-je, qu'on satisfera à cette équation aux différences partielles, en prenant

$$z = e^{\int(\sigma dx - a dy + \Sigma dz)} \{ a - \int e^{-\int(\sigma dx - a dy + \Sigma dz)} [\gamma dx + (C + \sigma) \cdot dy + \Sigma z dz] \},$$

où  $e$  est le nombre qui a pour logarithme l'unité,  $a$  une constante arbitraire, &  $\sigma, \Sigma$  des fonctions inconnues de  $x, y, z$ . Pour que cette expression signifie quelque chose, il faut que les différentes quantités sous le signe  $\int$  soient des différentielles exactes, c'est-à-dire qu'il faut que l'on ait les quatre équations

suivantes, dans lesquelles on a mis pour  $C$  la valeur  $\frac{\mu - az^2 - \gamma}{z}$ :

$$(a) \dots \begin{cases} \frac{d\sigma}{dy} + \frac{da}{dx} = 0, \frac{d\Sigma}{dy} + \frac{da}{dz} = 0, \frac{d\gamma}{dz} - z \frac{d\Sigma}{dx} + \Sigma(\sigma z - \gamma) = \sigma; \\ \frac{d\sigma}{dx} - \sigma^2 - \frac{\sigma}{z}(\mu - \gamma - az^2) = \frac{d\gamma}{dy} + a\gamma - \frac{1}{z} \frac{d(\mu - \gamma - az^2)}{dx}. \end{cases}$$

(3.) Si l'on fait  $e^{-\int(\sigma dx - a dy + \Sigma dz)} = A$ ; d'où l'on tire  $\sigma = -\frac{1}{A} \frac{dA}{dx}$ ,  $a = \frac{1}{A} \frac{dA}{dy}$ ,  $\Sigma = -\frac{1}{A} \frac{dA}{dz}$ , & par conséquent  $\frac{d\sigma}{dy} + \frac{da}{dx} = 0$ ,  $\frac{d\Sigma}{dy} + \frac{da}{dz} = 0$ ; que

l'on mette ensuite ces valeurs dans les deux dernières des équations (a), elles deviendront

$$(b) \dots \begin{cases} \frac{d^2 A}{dx^2} + z \frac{d^2 A}{dx dy} + \frac{1}{z} \frac{d \cdot A \gamma}{dx} + \frac{d \cdot A \gamma}{dy} - \frac{1}{z} \frac{d \cdot A \mu}{dx} = 0, \\ z \frac{d^2 A}{dx dz} + \frac{d \cdot A \gamma}{dz} = 0. \end{cases}$$

On tirera de la seconde de celles-ci,  $A \gamma = \int \frac{dA}{dz} dz$

$= z \frac{dA}{dx} + K$ ,  $K$  étant une fonction arbitraire de  $x, y$ ;

& cette valeur de  $A \gamma$  étant substituée dans la première, on aura

$$(c) \dots \frac{d(K - A \mu)}{dx} + z \frac{dK}{dy} + \int \frac{d^2 A}{dx^2} dz + z \int \frac{d^2 A}{dx dy} dz = 0.$$

Cette dernière équation étant différenciée deux fois pour faire disparaître les deux signes d'intégration, donne

$$(d) \dots \frac{d^2 A}{dx dz} + z \frac{d^2 A}{dy dz} - \frac{d \cdot A \mu}{dz} + 2 \frac{dA}{dy} = 0;$$

donc

$$z^2 \frac{dA}{dy} - z \frac{d \cdot A \mu}{dz} + A \mu = \int \frac{dA}{dx} dz - z \frac{dA}{dx} = A \gamma,$$

si l'on fait  $K = 0$ , & cette autre valeur de  $A \gamma$  étant substituée dans la première des équations (b), elle deviendra

$$(e) \dots \frac{d^2 A}{dx^2} + 2z \frac{d^2 A}{dx dy} + z^2 \frac{d^2 A}{dy^2} - \frac{d \cdot A \mu}{dx dz} - z \frac{d \cdot A \mu}{dy dz} + \frac{d \cdot A \mu}{dy} = 0.$$

Les équations (d) & (e) sont celles qu'on trouveroit par les méthodes connues, en supposant que  $A$  fût le facteur propre à rendre  $dz + \mu dx$  une différentielle exacte.

(4.) La proposée étant

$$(B) \dots \frac{dz}{dx} + z \frac{dz}{dy} + az^2 + \mathcal{C}z + \gamma = 0,$$

où  $a, \mathcal{C}, \gamma$ , sont des fonctions de  $x, y$ , seulement; si nous prenons pour y satisfaire

$$(C) \dots z = e^{\int (a dx - \mathcal{C} dy)} \{ a - \int e^{-\int (a dx - \mathcal{C} dy)} [\gamma dx + (\mathcal{C} + a) \cdot dy] \},$$

nous aurons pour équations de condition,

$$\frac{d\sigma}{dy} + \frac{da}{dx} = 0, \quad \frac{d(\zeta + \sigma)}{dx} - \sigma(\zeta + \sigma) = \frac{dy}{dy} + a\gamma.$$

Ces deux équations donnent

$$\frac{d^2 a}{dx^2} = \frac{d^2 \zeta}{dx dy} - \frac{d^2 \gamma}{dy^2} - \frac{d \cdot a \gamma}{dy} - (\zeta + \sigma) \frac{d\sigma}{dy} - \sigma \frac{d(\zeta + \sigma)}{dy},$$

où l'on mettra pour  $\frac{d\sigma}{dy}$  la valeur  $-\frac{da}{dx}$ , & on en tirera

$$\sigma = \frac{\frac{d^2 a}{dx^2} - \frac{d^2 \zeta}{dx dy} + \frac{d^2 \gamma}{dy^2} + \frac{d \cdot a \gamma}{dy} - \zeta \frac{da}{dx}}{2 \frac{da}{dx} - \frac{d\zeta}{dy}}.$$

Donc  $\sigma$  étant tel que nous venons de le définir, l'équation (C), qui renferme une constante arbitraire, satisfera à l'équation aux différences partielles (B), toutes les fois que les équations de condition auront lieu en même temps, & sera alors l'intégrale première complète de l'équation différentielle correspondante. Il en faut excepter le cas où  $2 \frac{da}{dx} - \frac{d\zeta}{dy}$  seroit nul, & que nous allons examiner.

(5.) Si je fais  $\frac{\zeta}{2} + \sigma = \varphi$ , je changerai les équations de condition du n.<sup>o</sup> précédent en celles-ci,

$$2 \frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\zeta}{dy} - 2 \frac{da}{dx}, \quad (D) \dots \frac{d\varphi}{dx} - \varphi^2 = \frac{dy}{dy} + a\gamma - \frac{1}{2} \frac{d\zeta}{dx} - \frac{\zeta^2}{4}.$$

Or ayant tiré de la première la valeur complète de  $\varphi$ , qui renfermera une fonction arbitraire de  $x$ , & l'ayant substituée dans la seconde, on verra aisément que comme celle qui en résultera doit servir à déterminer cette fonction arbitraire, elle ne pourra être vraie à moins que  $\frac{d\zeta}{dy} - 2 \frac{da}{dx}$  ne soit nul, & qu'on n'ait en même temps  $\frac{dy}{dy} + a\gamma - \frac{1}{2} \frac{d\zeta}{dx} - \frac{\zeta^2}{4}$  fonction de la seule variable  $x$ . Ainsi dans le cas dont il

# 446 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

s'agit, ayant pris pour  $\rho$  une fonction de  $x$ , qui satisfasse à l'équation (D), on aura pour solution de l'équation (B),

$$z = e^{\int[(\rho - \frac{c}{2}) \cdot dx - a dy]} \{ a - \int e^{-\int[(\rho - \frac{c}{2}) \cdot dx - a dy]} [\gamma dx + (\rho + \frac{c}{2}) \cdot dy] \};$$

& cette solution pourra renfermer deux constantes arbitraires, car il suffira d'en ajouter une en intégrant l'équation (D).

(6.) En faisant usage de la méthode de M. de la Grange; dont nous avons parlé plus haut, nous trouverons dans le cas présent l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles: en effet, en nommant  $b$  la constante arbitraire qui doit entrer dans la valeur de  $\rho$ , & faisant pour simplifier,

$$e^{\int(\frac{c}{2} dx + a dy)} = a', \quad e^{-\int \rho dx} = \rho', \quad \text{nous aurons}$$

$$z = \frac{1}{a' \rho'} \{ a - \int [a' \rho' (\gamma dx + \frac{c}{2} dy)] - \frac{d \rho'}{dx} a' dy \},$$

& par conséquent

$$\frac{dz}{da} = \frac{1}{a' \rho'}, \quad \frac{dz}{db} = -\frac{z}{\rho'} \frac{d \rho'}{db} - \frac{1}{a' \rho'} \int \left[ \frac{d \rho'}{db} a' (\gamma dx + \frac{c}{2} dy) - \frac{d \rho'}{dx} a' dy \right];$$

On mettra ces valeurs dans  $\frac{dz}{da} da + \frac{dz}{db} db = 0$ , & supposant  $a = f; b$ , on aura

$$f'; b - a' z \frac{d \rho'}{db} - \int \left[ \frac{d \rho'}{db} a' (\gamma dx + \frac{c}{2} dy) - \frac{d \rho'}{dx} a' dy \right] = 0;$$

cette équation & celle-ci,

$$f; b - a' \rho' z - \int [a' \rho' (\gamma dx + \frac{c}{2} dy) - \frac{d \rho'}{dx} a' dy] = 0;$$

suffiront pour résoudre le Problème.

Pour en donner un exemple bien simple, je supposerai

$$a = \frac{1}{y}, \quad c = \frac{2}{x}, \quad \gamma = \frac{X}{y}, \quad X \text{ étant une fonction de } x;$$

alors l'équation (D) devient  $\frac{d \rho}{dx} - \rho^2 = 0$ ; qui a pour

intégrale complète  $\varphi = -\frac{1}{x+b}$ ; donc  $\varphi' = x+b$ ; on a aussi  $a' = xy$ . Par la substitution de ces valeurs, les deux équations précédentes deviendront  $f': b = xyz + \frac{y^2}{2} + \int Xx dx$ ,  $f: b = b(xyz + \frac{y^2}{2} + \int Xx dx) = x^2yz + \int Xx^2 dx$ ; or comme la première fait voir que  $b$  ne peut être qu'une fonction de  $xyz + \frac{y^2}{2} + \int Xx dx$ , & que cela supposé, le premier membre de la seconde n'est fonction que de la même quantité; il suit de ce qui précède, que l'équation aux différences partielles proposée, a pour intégrale complète,

$$x^2yz + \int Xx^2 dx = F: (xyz + \frac{y^2}{2} + \int Xx dx).$$

(7.) Soient  $B$  &  $K$  deux fonctions de  $x, y, z$ , & supposons

$$dB = \frac{dB}{dx} dx + \frac{dB}{dy} dy + \frac{dB}{dz} dz,$$

$$dK = \frac{dK}{dx} dx + \frac{dK}{dy} dy + \frac{dK}{dz} dz;$$

cela posé, si  $B + F: K = 0$  est l'intégrale complète d'une équation aux différences partielles du premier ordre, en différenciant cette intégrale deux fois, l'une par rapport à  $y$ , l'autre par rapport à  $x$ , & en éliminant la fonction arbitraire, on trouvera que l'équation aux différences partielles, à laquelle elle appartient, est

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dy} \frac{dK}{dx} - \frac{dB}{dx} \frac{dK}{dy} + \frac{dB}{dz} \left( \frac{dK}{dx} \frac{dz}{dy} - \frac{dK}{dy} \frac{dz}{dx} \right) \\ - \frac{dK}{dz} \left( \frac{dB}{dx} \frac{dz}{dy} - \frac{dB}{dy} \frac{dz}{dx} \right) = 0. \end{aligned}$$

Nous avons pour objet de trouver quelques cas d'intégrabilité de  $\frac{dz}{dx} + z \frac{dz}{dy} + \mu = 0$ ; or si l'ayant multipliée

par un facteur  $\psi$ , on la compare à la précédente, on aura les trois équations

$$\begin{aligned}\frac{dK}{dz} \frac{dB}{dy} - \frac{dB}{dz} \frac{dK}{dy} &= \psi, \\ \frac{dB}{dz} \frac{dK}{dx} - \frac{dK}{dz} \frac{dB}{dx} &= \psi z, \\ \frac{dK}{dx} \frac{dB}{dy} - \frac{dK}{dy} \frac{dB}{dx} &= \psi \mu;\end{aligned}$$

& en éliminant  $\psi$ , celles que voici,

$$\begin{aligned}\Gamma... \frac{dK}{dz} \left( \frac{dB}{dx} + z \frac{dB}{dy} \right) - \frac{dB}{dz} \left( \frac{dK}{dx} + z \frac{dK}{dy} \right) &= 0, \\ \Delta... \frac{dK}{dy} \left( \frac{dB}{dx} - \mu \frac{dB}{dz} \right) - \frac{dB}{dy} \left( \frac{dK}{dx} - \mu \frac{dK}{dz} \right) &= 0.\end{aligned}$$

(8.) Si pour satisfaire à ces équations, je fais  $B = mz + n$ ,  $K = Mz + N$ ,  $m, n, M, N$  étant des fonctions inconnues de  $x, y$ ; l'équation ( $\Gamma$ ) deviendra

$$\begin{aligned}M \left[ \frac{dm}{dy} z^2 + \left( \frac{dn}{dy} + \frac{dm}{dx} \right) \cdot z + \frac{dn}{dx} \right] \\ - m \left[ \frac{dM}{dy} z^2 + \left( \frac{dN}{dy} + \frac{dM}{dx} \right) \cdot z + \frac{dN}{dx} \right] = 0,\end{aligned}$$

& donnera nécessairement

$$\begin{aligned}M \frac{dm}{dy} - m \frac{dM}{dy} &= 0, \\ M \cdot \left( \frac{dn}{dy} + \frac{dm}{dx} \right) - m \cdot \left( \frac{dN}{dy} + \frac{dM}{dx} \right) &= 0, \\ M \frac{dn}{dx} - m \frac{dN}{dx} &= 0.\end{aligned}$$

Il sera facile de tirer de la première  $m = M\phi_1 : x$ , & cette valeur étant substituée dans les deux autres, les changera en celles-ci,

$$\begin{aligned}\frac{dn}{dy} - \phi_1 : x \frac{dN}{dy} + M\phi_1' : x &= 0, \\ \frac{dn}{dx} - \phi_1 : x \frac{dN}{dx} &= 0.\end{aligned}$$

Si



Si nous convenons de nous servir de  $\dot{m}\dot{M}$  pour représenter  $\frac{dm}{dy} \frac{dM}{dx} - \frac{dm}{dx} \frac{dM}{dy}$ , & ainsi des autres quantités semblables, nous tirerons de l'équation ( $\Delta$ ),

$$-\mu M^2 \varphi'_{1:x} = \dot{m}\dot{M}z^2 + (\dot{m}\dot{N} + \dot{n}\dot{M})z + \dot{n}\dot{N};$$

nous pourrons donc supposer  $\mu$  de cette forme  $\alpha z^2 + \mathcal{C}z + \gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\gamma$  étant des fonctions de  $x$ ,  $y$ , & nous aurons les trois équations

$$\dot{m}\dot{M} = -\alpha M^2 \varphi'_{1:x}, \quad \dot{m}\dot{N} + \dot{n}\dot{M} = -\mathcal{C} M^2 \varphi'_{1:x},$$

$$\dot{n}\dot{N} = -\gamma M^2 \varphi'_{1:x},$$

que nous changerons facilement en celles-ci,

$$\frac{dM}{dy} = \alpha M, \quad \frac{dN}{dy} = \mathcal{C}M - \frac{dM}{dx}, \quad \frac{dN}{dx} = \gamma M;$$

on en tirera

$$M = e^{\int \alpha dy} f_{1:x}, N = f_{2:x} + \int e^{\int \alpha dy} \left[ \left( \mathcal{C} - \int \frac{d\alpha}{dx} dy \right) \cdot f_{1:x} - f'_{1:x} \right] dy;$$

$$\text{\& par conséquent} \quad m = e^{\int \alpha dy} f_{1:x} \varphi_{1:x},$$

$$n = \varphi_{2:x} + \int e^{\int \alpha dy} \left[ \left( \mathcal{C} - \int \frac{d\alpha}{dx} dy \right) \cdot f_{1:x} \varphi_{1:x} - \frac{d \cdot \varphi_{1:x} f_{1:x}}{dx} \right] dy;$$

on aura de plus pour équations de condition,

$$\frac{dN}{dx} = e^{\int \alpha dy} \gamma f_{1:x}, \quad \frac{dn}{dx} = e^{\int \alpha dy} \gamma f_{1:x} \varphi_{1:x}.$$

En substituant dans la première pour  $N$  sa valeur, on en tirera

$$\frac{f'_{2:x}}{f_{1:x}} = e^{\int \alpha dy} \gamma - \int e^{\int \alpha dy} \left[ \left( \mathcal{C} - 2 \int \frac{d\alpha}{dx} dy \right) \cdot \frac{f'_{1:x}}{f_{1:x}} - \frac{f''_{1:x}}{f_{1:x}} + \frac{d\mathcal{C}}{dx} - \int \frac{d^2 \alpha}{dx^2} dy + \int \frac{d\alpha}{dx} dy \cdot \left( \mathcal{C} - \int \frac{d\alpha}{dx} dy \right) \right] dy;$$

Mém. 1778.

LII

dont le second membre ne doit pas renfermer  $y$ ; en la différenciant par rapport à  $y$ , on aura l'équation

$$\frac{f''_{1:x}}{f_{1:x}} - (C - 2 \int \frac{da}{dx} dy) \dots (x_1) \frac{f'_{1:x}}{f_{1:x}} = (X) \dots$$

$$\therefore \frac{dC}{dx} - \int \frac{d^2a}{dx^2} dy + \int \frac{da}{dx} dy \cdot (C - \int \frac{da}{dx} dy) - \frac{dy}{dy} - a\gamma,$$

qui donne pour conditions d'intégrabilité que  $x_1$  &  $X$ , ne doivent renfermer de variable que  $x$ . Dans ce cas, la même équation donnera la valeur de  $f_{1:x}$ , & on tirera de celle qui précède  $\frac{f'_{2:x}}{f_{1:x}} = e^{\int a dy} \gamma - \int e^{\int a dy} (\frac{dy}{dy} + a\gamma) dy$ , dont le second membre est évidemment une fonction de  $x$  seul.

On mettra dans la seconde pour  $n$  la valeur, & on en tirera

$$\frac{\phi'_{2:x}}{f_{1:x} \phi_{1:x}} = e^{\int a dy} \gamma - \int e^{\int a dy} (\frac{dy}{dy} + a\gamma) dy,$$

$$\frac{d^2 \cdot f_{1:x} \phi_{1:x}}{dx^2 \cdot f_{1:x} \phi_{1:x}} - x_1 \frac{d \cdot f_{1:x} \phi_{1:x}}{dx \cdot f_{1:x} \phi_{1:x}} = X,$$

c'est-à-dire que le Problème est réduit à trouver deux valeurs de l'inconnue d'une équation linéaire du second ordre.

Autrement, des équations  $\frac{dn}{dy} = \frac{dN}{dy} \phi_{1:x} - M \phi'_{1:x}$ ,  $\frac{dn}{dx} = \frac{dN}{dx} \phi_{1:x}$ , on tirera, en différenciant la première par rapport à  $x$ , & l'autre par rapport à  $y$ ,

$$(\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dx}) \phi'_{1:x} - M \phi''_{1:x} = 0,$$

ou 
$$\frac{\phi''_{1:x}}{\phi'_{1:x}} = x_1 - \frac{x f'_{1:x}}{f_{1:x}},$$

qui donnera  $\phi_{1:x}$  lorsqu'on connoitra  $f_{1:x}$ , au moyen de l'équation linéaire dont il vient d'être question; on aura ensuite  $\phi'_{2:x} = \phi_{1:x} f'_{2:x}$ ; ainsi tout sera déterminé dans l'intégrale complète  $mz + n + F(Mz + N) = 0$ .

(9.) Si l'on prend  $B + F:K, q = 0$ , où  $B$  &  $K$  sont fonctions de  $x, y, \frac{dy}{dx} = z, \frac{dz}{dx} = z'$ , &  $q$  fonction de  $x, y, z$ , pour représenter l'intégrale complète d'une équation aux différences partielles; on trouvera cette équation en différenciant l'intégrale successivement par rapport à chacune des trois variables  $x, y, z$ . Ayant donc supposé

$$dB = \frac{dB}{dx} dx + \frac{dB}{dy} dy + \frac{dB}{dz} dz + \frac{dB}{dz'} dz',$$

$$dK = \frac{dK}{dx} dx + \frac{dK}{dy} dy + \frac{dK}{dz} dz + \frac{dK}{dz'} dz',$$

$dF:K, q = (\Pi dK + \pi \Pi dq) F':K, q$ ,  $\Pi$  &  $\pi$  étant des fonctions de  $K, q$ , on aura les trois équations

$$\frac{dB}{dx} + \frac{dB}{dz'} \frac{dz'}{dx} + [\Pi \cdot (\frac{dK}{dx} + \frac{dK}{dz'} \frac{dz'}{dx}) + \pi \Pi \frac{dq}{dx}] F':K, q = 0;$$

$$\frac{dB}{dy} + \frac{dB}{dz'} \frac{dz'}{dy} + [\Pi \cdot (\frac{dK}{dy} + \frac{dK}{dz'} \frac{dz'}{dy}) + \pi \Pi \frac{dq}{dy}] F':K, q = 0;$$

$$\frac{dB}{dz} + \frac{dB}{dz'} \frac{dz'}{dz} + [\Pi \cdot (\frac{dK}{dz} + \frac{dK}{dz'} \frac{dz'}{dz}) + \pi \Pi \frac{dq}{dz}] F':K, q = 0,$$

Je fais  $\frac{\frac{dK}{dz} + \frac{dK}{dz'} \frac{dz'}{dz}}{\frac{dK}{dx} + \frac{dK}{dz'} \frac{dz'}{dx}} = r$ , & après avoir multi-

plié la première par  $r$ , je l'ôte de la troisième, ce qui donne

$$\frac{dB}{dz} - r \frac{dB}{dx} + \frac{dB}{dz'} (\frac{dz'}{dz} - r \frac{dz'}{dx}) + \pi \Pi (\frac{dq}{dz} - r \frac{dq}{dx}) F':K, q = 0;$$

de celle-ci, j'ôte la seconde après l'avoir multipliée par

$$\frac{dq}{dz} : \frac{dq}{dy} = s, \text{ \& il vient}$$

$$\frac{dB}{dz} - r \frac{dB}{dx} - s \frac{dB}{dy} + \frac{dB}{dz'} (\frac{dz'}{dz} - r \frac{dz'}{dx} - s \frac{dz'}{dy}) - [\pi \Pi r \frac{dq}{dx} + \Pi s \cdot (\frac{dK}{dy} + \frac{dK}{dz'} \frac{dz'}{dy})] F':K, q = 0.$$

Mais cette dernière équation ne doit pas renfermer de fonction arbitraire; de plus,  $\pi$  ne doit prendre aucune valeur, on a donc nécessairement  $\frac{dq}{dx} = 0$ , &  $\frac{dK}{dy} + \frac{dK}{dz} \frac{dz}{dy} = 0$ ; de cette manière on la réduit à

$$\left( \frac{dB}{dz} \frac{dK}{dx} - \frac{dK}{dz} \frac{dB}{dx} \right) \frac{dz}{dz} + \left[ \frac{dK}{dz} \cdot \left( \frac{dB}{dz} - s \frac{dB}{dy} \right) - \frac{dB}{dz} \cdot \left( \frac{dK}{dz} - s \frac{dK}{dy} \right) \right] \frac{dz}{dz} \\ + \frac{dB}{dz} \frac{dK}{dx} - \frac{dB}{dx} \frac{dK}{dz} - s \frac{dK}{dx} \left( \frac{dB}{dy} - \frac{dK}{dy} \frac{dB}{dz} : \frac{dK}{dz} \right) = 0,$$

où  $s$  n'est fonction que de  $y, z$ , laquelle étant connue, on trouvera  $q$  en rendant exacte la différentielle  $dy + s dz$ .

Maintenant, soit l'équation différentielle du troisième ordre  $\frac{1}{dx} dz' + \mu = 0$ , qu'on changera en une équation aux différences partielles  $\frac{dz'}{dx} + z \frac{dz'}{dy} + z' \frac{dz'}{dz} + \mu = 0$ , qui devient par l'élimination de  $\frac{dz'}{dy}, \frac{dz'}{dx} + z' \frac{dz'}{dz} + \mu - z \frac{dK}{dy} : \frac{dK}{dz} = 0$ .

Après l'avoir multipliée par un facteur  $\psi$ , on la comparera à l'équation que nous venons de trouver, & on aura

$$\psi = \frac{dK}{dz} \cdot \left( \frac{dB}{dz} - s \frac{dB}{dy} \right) - \frac{dB}{dz} \cdot \left( \frac{dK}{dz} - s \frac{dK}{dy} \right), \psi z' = \frac{dB}{dz} \frac{dK}{dx} - \frac{dK}{dz} \frac{dB}{dx}, \\ \psi \mu = \frac{dB}{dz} \frac{dK}{dx} - \frac{dB}{dx} \frac{dK}{dz} - s \frac{dK}{dx} \frac{dB}{dy} + \frac{dK}{dy} \left( \psi z + s \frac{dK}{dx} \frac{dB}{dz} \right) : \frac{dK}{dz};$$

d'où l'on tirera, en éliminant  $\psi$ ,

$$(\Gamma') \dots \frac{dB}{dz} \left[ \frac{dK}{dx} + z' \cdot \left( \frac{dK}{dz} - s \frac{dK}{dy} \right) \right] - \frac{dK}{dz} \left[ \frac{dB}{dx} + z' \cdot \left( \frac{dB}{dz} - s \frac{dB}{dy} \right) \right] = 0, \\ (\Delta') \dots \mu \left( \frac{dB}{dz} \frac{dK}{dx} - \frac{dK}{dz} \frac{dB}{dx} \right) = z' \left( \frac{dB}{dz} \frac{dK}{dx} - \frac{dB}{dx} \frac{dK}{dz} - s \frac{dB}{dy} \frac{dK}{dx} \right) \\ - z \frac{dB}{dx} \frac{dK}{dy} + (z + s z') \frac{dK}{dx} \frac{dK}{dy} \frac{dB}{dz} : \frac{dK}{dz}.$$

(10.) Pour satisfaire à ces équations, je supposerai  $B = mz' + n, K = Mz' + N, m, n, M, N$  étant

des fonctions inconnues de  $x, y, z$ ; de cette manière je tirerai de l'équation ( $\Gamma'$ ),

$$m \frac{dN}{dx} - M \frac{dn}{dx} = 0, m \frac{dM}{dx} - M \frac{dm}{dx} + m \frac{dN}{dz} - M \frac{dn}{dz} \\ = s(m \frac{dN}{dy} - M \frac{dn}{dy}) = 0, m \frac{dM}{dz} - M \frac{dm}{dz} - s(m \frac{dM}{dy} - M \frac{dm}{dy}) = 0,$$

La troisième de celles qui précèdent n'étant autre que  $\frac{d(M:m)}{dz} - s \frac{d(M:m)}{dy} = 0$ , elle donne  $m = M \varphi : q, x$ ,

& par conséquent

$$m \frac{dM}{dx} - M \frac{dm}{dx} = -M^2 \frac{d\varphi : q, x}{dx}, m \frac{dM}{dy} - M \frac{dm}{dy} = -M^2 \frac{d\varphi : q, x}{dy};$$

alors les deux autres deviendront

$$(1) \dots \frac{dn}{dx} - \frac{dN}{dx} \varphi : q, x = 0,$$

$$(2) \dots M \frac{d\varphi : q, x}{dx} + \frac{dn}{dz} - s \frac{dn}{dy} - \left( \frac{dN}{dz} - s \frac{dN}{dy} \right) \varphi : q, x = 0;$$

De plus, à cause de  $\frac{d\varphi : q, x}{dz} - s \frac{d\varphi : q, x}{dy} = 0$ , l'équation

( $\Delta'$ ), par les substitutions précédentes, sera changée en celle-ci,

$$\mu M = \frac{dM}{dz} z'^2 + \left( \frac{dM}{dx} + \frac{dN}{dz} + z \frac{dM}{dy} \right) z' + \frac{dN}{dx} + z \frac{dN}{dy},$$

on pourra donc supposer  $\mu$  de cette forme  $\alpha z'^2 + \mathcal{C} z' + \gamma$ ,

$\alpha, \mathcal{C}, \gamma$  étant des fonctions connues de  $x, y, z$ , & on aura

$$\frac{dM}{dz} = \alpha M, \frac{dN}{dz} = \mathcal{C} M - \frac{dM}{dx} - z \frac{dM}{dy}, \frac{dN}{dx} + z \frac{dN}{dy} = \gamma M.$$

Je ferai usage de la caractéristique  $\partial$  pour désigner une différentielle prise par rapport aux seules variables  $x, y$ , & je remarquerai que  $P$  étant une fonction quelconque,

$$\frac{\partial \int P dz}{\partial x} = \int \frac{\partial P}{\partial x} dz + \iint \frac{dP}{dy} dz \cdot dz. \text{ Cela posé, il}$$

sera facile de tirer des équations précédentes,

$$M = e^{\int a dz} f_{1:x,y}, N = f_{2:x,y} + \int e^{\int a dz} \left( C - \frac{\partial f a dz}{\partial x} \right) dz \cdot f_{1:x,y} \\ - \frac{\partial f_{1:x,y}}{\partial x} \int e^{\int a dz} dz + \frac{d f_{1:x,y}}{dy} \iint e^{\int a dz} dz \cdot dz,$$

&amp;

$$\frac{\partial f_{2:x,y}}{\partial x} = \left\{ \gamma e^{\int a dz} - \int e^{\int a dz} \left[ \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial^2 f a dz}{\partial x^2} + \frac{\partial f a dz}{\partial x} \cdot \left( C - \frac{\partial f a dz}{\partial x} \right) \right] dz \right\} f_{1:x,y} \\ - \iint e^{\int a dz} \left\{ \left[ \frac{dC}{dy} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f a dz}{\partial y} + \frac{d f a dz}{dy} \cdot \left( C - \frac{\partial f a dz}{\partial x} \right) \right] f_{1:x,y} \right. \\ \left. + \frac{d f_{1:x,y}}{dy} \int \frac{da}{dx} dz - \frac{d f_{1:x,y}}{dx} \int \frac{da}{dy} dz \right\} dz \cdot dz \\ - \frac{\partial f_{1:x,y}}{\partial x} \int e^{\int a dz} \left( C - \frac{\partial f a dz}{\partial x} \right) dz + \frac{\partial^2 f_{1:x,y}}{\partial x^2} \int e^{\int a dz} dz \\ - \frac{d}{dx} \frac{\partial f_{1:x,y}}{\partial x} \iint e^{\int a dz} dz \cdot dz.$$

Celle-ci différenciée deux fois, en ne faisant varier que  $z$ , donne d'abord

$$\frac{d f_{2:x,y}}{dy} = e^{\int a dz} \left\{ \left[ \frac{d\gamma}{dz} + a\gamma - \frac{dC}{dx} + \frac{\partial^2 f a dz}{\partial x^2} - \frac{\partial f a dz}{\partial x} \cdot \left( C - \frac{\partial f a dz}{\partial x} \right) \right] \dots \right. \\ \left. \dots (H) f_{1:x,y} - \left( C - \frac{\partial f a dz}{\partial x} \right) \dots (I) \frac{\partial f_{1:x,y}}{\partial x} + \frac{\partial^2 f_{1:x,y}}{\partial x^2} \right\} \\ - \int e^{\int a dz} \left\{ \frac{dC}{dy} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f a dz}{\partial y} + \frac{d f a dz}{dy} \cdot \left( C - \frac{\partial f a dz}{\partial x} \right) \dots \right. \\ \left. \dots (h) f_{1:x,y} + \left( I + \int \frac{da}{dx} dz \right) \frac{d f_{1:x,y}}{dy} - \frac{d f_{1:x,y}}{dx} \int \frac{da}{dy} dz \right\} dz \\ + \frac{d}{dx} \frac{\partial f_{1:x,y}}{\partial x} \int e^{\int a dz} dz - \frac{d^2 f_{1:x,y}}{dx^2} \iint e^{\int a dz} dz \cdot dz,$$

&amp;

$$\left( \frac{dH}{dz} + aH - h \right) f_{1:x,y} - \left( \frac{dI}{dz} + aI - \int \frac{da}{dy} dz \right) \frac{d f_{1:x,y}}{dx} \\ - \left[ 2I + \int \frac{da}{dx} dz + z \cdot \left( \frac{dI}{dz} + aI \right) \right] \frac{d f_{1:x,y}}{dy} + a \frac{\partial^2 f_{1:x,y}}{\partial x^2} \\ + 3 \frac{d}{dx} \frac{\partial f_{1:x,y}}{\partial x} = 0;$$

qui renferme les conditions d'intégrabilité qui doivent avoir lieu dans l'hypothèse actuelle.

(11.) Prenons pour exemple le cas où  $\alpha = 0$ ,  $\zeta = \delta z + \epsilon$ ,  $\gamma = \pi z^3 + \varrho z^2 + \sigma z + \tau$ , tous ces coefficients étant des fonctions de  $x, y$ ; alors l'équation précédente devient  $3z(2\pi f_1 : x, y - \frac{d \cdot \delta f_1 : x, y}{dy} + \frac{d^2 f_1 : x, y}{dy^2}) + 2\varrho f_1 : x, y - \frac{d \cdot \delta f_1 : x, y}{dx} - 2 \frac{d \epsilon f_1 : x, y}{dy} + 3 \frac{d^2 f_1 : x, y}{dx dy} = 0$ ;

d'où l'on tirera deux équations, dont la première  $\frac{d^2 f_1 : x, y}{dy^2} - \frac{d \cdot \delta f_1 : x, y}{dy} + 2\pi f_1 : x, y = 0$ , aura pour intégrale complète  $f_1 : x, y = x_1 K_1 + x_2 K_2$ ,  $x_1$  &  $x_2$  étant des fonctions arbitraires de  $x$ , si par  $K_1$  &  $K_2$  on entend deux valeurs de  $f_1 : x, y$  qui satisfassent à cette équation, en regardant  $x$  comme constant. On mettra dans l'autre  $x_1 K_1$  pour  $f_1 : x, y$ ; ce qui la changera en celle-ci,

$$\frac{x_1'}{x_1} = (\psi_1) \dots \frac{3 \frac{d^2 K_1}{dx dy} - 2 \frac{d \cdot \delta K_1}{dy} - \frac{d \cdot \delta K_1}{dx} + 2 \varrho K_1}{\delta K_1 - 3 \frac{d K_1}{dy}}.$$

On aura de plus  $\frac{d f_2 : x, y}{dy} = \sigma f_1 : x, y - \frac{d \cdot \epsilon f_1 : x, y}{dx} + \frac{d^2 f_1 : x, y}{dx^2}$ ,  $\frac{d f_2 : x, y}{dx} = \tau f_1 : x, y$ , dont la première donnera

$$f_2 : x, y = X_1 + \int (\sigma f_1 : x, y - \frac{d \cdot \epsilon f_1 : x, y}{dx} + \frac{d^2 f_1 : x, y}{dx^2}) dy;$$

& comme cette valeur étant substituée dans la seconde, il en résulte que

$$X_1' = \tau f_1 : x, y - \int (\frac{d \cdot \sigma f_1 : x, y}{dx} - \frac{d^2 \cdot \epsilon f_1 : x, y}{dx^2} + \frac{d^3 f_1 : x, y}{dx^3}) dy,$$

il est donc nécessaire que ce second membre différencié, en

456 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
ne faisant varier que  $y$ , soit égal zéro, ou que l'on ait

$$\frac{d \cdot \tau f_1 : x, y}{dy} - \frac{d \cdot \sigma f_1 : x, y}{dx} + \frac{d^2 \cdot \epsilon f_1 : x, y}{dx^2} - \frac{d^3 f_1 : x, y}{dx^3} = 0.$$

On mettra dans cette équation  $x \mid K_1$  pour  $f_1 : x, y$ , & on aura

$$x \mid \left( \frac{d^3 K_1}{dx^3} - \frac{d^2 \cdot \epsilon K_1}{dx^2} + \frac{d \cdot \sigma K_1}{dx} - \frac{d \cdot \tau K_1}{dy} \right) + x' \mid \left( 3 \frac{d^2 K_1}{dx^2} - 2 \frac{d \cdot \epsilon K_1}{dx} + \sigma K_1 \right) \\ + x'' \mid \left( 3 \frac{d K_1}{dx} - \epsilon K_1 \right) + x''' \mid K_1 = 0.$$

Il faudra donc que  $\psi \mid$  & que les coefficients de  $x \mid$ ,  $x' \mid$ ,  $x'' \mid$ , dans l'équation précédente, divisés par  $K_1$ , soient chacun fonction de  $x$  seul; ce sont-là les conditions d'intégrabilité pour le cas présent.

(12.) Je reviens au cas plus général ( $n.^\circ 10$ ), & je remarque qu'on tirera de l'équation (2)

$$n = \phi_2 : q, x + \int \left[ \left( \frac{dN}{dz} - s \frac{dN}{dy} \right) \cdot \phi_1 : q, x - M \frac{d \cdot \phi_1 : q, x}{dx} \right] dz$$

En substituant cette valeur dans l'équation (1), elle deviendra

$$\frac{d \phi_2 : q, x}{dx} = \frac{dN}{dx} \phi_1 : q, x - \int \left[ \left( \frac{d^2 N}{dx dz} - s \frac{d^2 N}{dx dy} \right) \cdot \phi_1 : q, x \right. \\ \left. + \left( \frac{dN}{dz} - s \frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dx} \right) \cdot \frac{d \phi_1 : q, x}{dx} - M \frac{d^2 \phi_1 : q, x}{dx^2} \right] dz,$$

dont le second membre ne devra plus renfermer  $z$ , sitôt qu'on en aura éliminé  $y$ , au moyen de  $\int r(dy + s dz) = q$ , où  $r$  est le facteur propre à rendre  $dy + s dz$  une différentielle exacte; il faudra encore que l'équation qui résultera ne renferme pas de nouvelles conditions.

Je regarderai  $y$  comme une fonction de  $q, x, z$ , & différenciant par rapport à  $z$ , j'aurai,

$$\left( \frac{dy}{dz} + s \right) \frac{d^2 N}{dx dy} \phi_1 : q, x + \left( \frac{dN}{dz} - s \frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dx} \right) \frac{d \phi_1 : q, x}{dx} \\ - M \frac{d^2 \phi_1 : q, x}{dx^2} = 0, \quad \text{à laquelle}$$



à laquelle on satisfera bien simplement, en supposant  $s = \frac{y}{z}$ ,  
ce qui donne  $q = yz, \frac{dy}{dz} = \frac{-q}{z^2}$  &  $\frac{dy}{dz} + s = 0$ ;  
car alors on pourra prendre  $\phi : q, x = 1$ .

(13.) On peut considérer l'équation  $\frac{1}{dx} dz^2 + \mu = 0$ ,  
sous un autre point de vue, & la regarder comme une  
équation du second ordre, dont la variable principale ne  
renferme que  $x$  &  $y$ . En effet, on peut lui donner cette forme,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + 2z \frac{d^2 z}{dx dy} + z^2 \frac{d^2 z}{dy^2} + \frac{dz}{dy} \frac{dz}{dx} + z \left( \frac{dz}{dy} \right)^2 + \mu = 0.$$

Si l'on suppose que celle-ci ait pour intégrale complète  
de l'ordre immédiatement inférieur  $B + F : K = 0$ , on  
aura la transformée

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dy} \frac{dK}{dx} - \frac{dB}{dx} \frac{dK}{dy} + \left( \frac{dB}{dy} \frac{dK}{dz} - \frac{dK}{dy} \frac{dB}{dz} \right) \frac{dz}{dx} \\ + \left( \frac{dK}{dx} \frac{dB}{dz} - \frac{dB}{dx} \frac{dK}{dz} \right) \frac{dz}{dy} + \left[ \frac{dB}{dy} \frac{dK}{dz} \right. \\ \left. - \frac{dK}{dy} \frac{dB}{dz} + \frac{dz}{dy} \cdot \left( \frac{dB}{dz} \frac{dK}{dz} - \frac{dK}{dz} \frac{dB}{dz} \right) \right] \left( \frac{d^2 z}{dx^2} \right) \\ + z \left( \frac{d^2 z}{dx dy} + \frac{dz}{dx} \frac{dz}{dy} \right) + \left[ \frac{dK}{dx} \frac{dB}{dz} - \frac{dB}{dx} \frac{dK}{dz} \right. \\ \left. + \frac{dz}{dx} \left( \frac{dK}{dz} \frac{dB}{dz} - \frac{dB}{dz} \frac{dK}{dz} \right) \right] \left[ \frac{d^2 z}{dx dy} + z \frac{d^2 z}{dy^2} \right. \\ \left. + \left( \frac{dz}{dy} \right)^2 \right] = 0, \end{aligned}$$

à laquelle on comparera la proposée, après l'avoir multipliée  
par un facteur  $\psi$ , & on en tirera

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{dB}{dy} \frac{dK}{dz} - \frac{dK}{dy} \frac{dB}{dz} + \frac{dz}{dy} \cdot \left( \frac{dB}{dz} \frac{dK}{dz} - \frac{dK}{dz} \frac{dB}{dz} \right), \\ \psi z &= \frac{dK}{dx} \frac{dB}{dz} - \frac{dB}{dx} \frac{dK}{dz} + \frac{dz}{dx} \cdot \left( \frac{dK}{dz} \frac{dB}{dz} - \frac{dB}{dz} \frac{dK}{dz} \right), \\ \psi \mu &= \frac{dB}{dy} \frac{dK}{dx} - \frac{dB}{dx} \frac{dK}{dy} + \frac{dz}{dx} \cdot \left( \frac{dB}{dy} \frac{dK}{dz} - \frac{dK}{dy} \frac{dB}{dz} \right) \\ &\quad + \frac{dz}{dy} \cdot \left( \frac{dK}{dx} \frac{dB}{dz} - \frac{dB}{dx} \frac{dK}{dz} \right); \end{aligned}$$

ou bien, en éliminant  $\downarrow$ ,

$$(\Gamma') \dots \frac{dK}{dz} \left( \frac{dB}{dx} + z \frac{dB}{dy} \right) - \frac{dB}{dz} \left( \frac{dK}{dx} + z \frac{dK}{dy} \right) \\ + \left( \frac{dz}{dx} + z \frac{dz}{dy} \right) \left( \frac{dB}{dz} \frac{dK}{dz} - \frac{dK}{dz} \frac{dB}{dz} \right) = 0,$$

$$(\Delta') \dots \left( \frac{dB}{dx} - \mu \frac{dB}{dz} \right) \left( \frac{dK}{dy} + \frac{dK}{dz} \frac{dz}{dy} \right) \\ - \left( \frac{dK}{dx} - \mu \frac{dK}{dz} \right) \left( \frac{dB}{dy} + \frac{dB}{dz} \frac{dz}{dy} \right) \\ + \frac{dz}{dx} \left( \frac{dK}{dy} \frac{dB}{dz} - \frac{dB}{dy} \frac{dK}{dz} \right) = 0.$$

(14.) Soit  $B = mz' + n$ ,  $K = Mz' + N$ ,  $m, n, M, N$  étant des fonctions de  $x, y, z$ ; on tirera de l'équation  $(\Gamma')$

$$M \frac{dm}{dz} - m \frac{dM}{dz} = 0,$$

$$M \frac{dn}{dz} - m \frac{dN}{dz} + z \left( M \frac{dm}{dy} - m \frac{dM}{dy} \right) + M \frac{dm}{dx} - m \frac{dM}{dx} = 0,$$

$$M \frac{dn}{dx} - m \frac{dN}{dx} + z \left( M \frac{dn}{dy} - m \frac{dN}{dy} \right) = 0.$$

La première donne  $m = M \varphi_1 : x, y$ ; donc

$$M \frac{dm}{dy} - m \frac{dM}{dy} = M^2 \frac{d\varphi_1 : x, y}{dy},$$

$$M \frac{dm}{dx} - m \frac{dM}{dx} = M^2 \frac{d\varphi_1 : x, y}{dx},$$

& les deux autres deviendront

$$\frac{dn}{dz} = \frac{dN}{dz} \varphi_1 : x, y - M \left( \frac{d\varphi_1 : x, y}{dx} + z \frac{d\varphi_1 : x, y}{dy} \right),$$

$$\frac{dn}{dx} + z \frac{dn}{dy} = \left( \frac{dN}{dx} + z \frac{dN}{dy} \right) \varphi_1 : x, y.$$

Occupons-nous maintenant de l'équation ( $\Delta'$ ), qu'il sera facile de transformer comme il suit, en adoptant la caractéristique  $\partial$  avec la signification que nous lui avons donnée ci-dessus, & en faisant pour simplifier

$$\frac{dx}{dy} - \frac{dN}{dy} \phi_1 : x, y = n_1,$$

$$\frac{dx}{dz} - \frac{dN}{dz} \phi_1 : x, y = n_2,$$

$$\frac{dM}{dy} \frac{d\phi_1 : x, y}{dx} - \frac{dM}{dz} \frac{d\phi_1 : x, y}{dy} = \dot{M} \phi_1 : x, y,$$

& ainsi des autres quantités semblables; il sera, dis-je, facile de la transformer en

$$\begin{aligned} \mu [M. (\frac{dz}{dy} \frac{d\phi_1 : x, y}{dx} - \frac{dz}{dx} \frac{d\phi_1 : x, y}{dy}) - n_1] &= \frac{dM}{dz} z^2 (\frac{dz}{dy} \frac{d\phi_1 : x, y}{dx} - \frac{dz}{dx} \frac{d\phi_1 : x, y}{dy}) \\ &+ z \frac{dz}{dx} (\dot{M} \phi_1 : x, y - \frac{n_1}{M} \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dz} \frac{d\phi_1 : x, y}{dy} - \frac{dM}{dy} \frac{\partial \phi_1 : x, y}{\partial x}) \\ &+ z \frac{dz}{dy} (z \dot{M} \phi_1 : x, y + \frac{n_2}{M} \frac{dM}{dz} + \frac{dN}{dz} \frac{d\phi_1 : x, y}{dx} + \frac{dM}{dx} \frac{\partial \phi_1 : x, y}{\partial x}) \\ &+ \frac{dz}{dx} (\frac{n_2}{M} \frac{dM}{dy} - \frac{n_1}{M} \frac{dM}{dz} + \dot{N} \phi_1 : x, y - \frac{n_1}{M} \frac{dN}{dz} - \frac{dN}{dy} \frac{\partial \phi_1 : x, y}{\partial x}) \\ &+ \frac{dz}{dy} (z \frac{n_2}{M} \frac{dM}{dy} - \frac{z n_1}{M} \frac{dM}{dz} + z \dot{N} \phi_1 : x, y + \frac{n_2}{M} \frac{dN}{dz} + \frac{dN}{dx} \frac{\partial \phi_1 : x, y}{\partial x}) \\ &+ \frac{N_2}{M}. \end{aligned}$$

Cela posé, si l'on prend  $\mu = a z'^2 + \mathcal{C} z' + \gamma$ ,  $a, \mathcal{C}, \gamma$  étant des fonctions de  $x, y, z$ , & que l'on fasse cette substitution dans le premier membre de l'équation précédente, qui deviendra par-là

$$\begin{aligned} a M z'^2 (\frac{dz}{dy} \frac{d\phi_1 : x, y}{dx} - \frac{dz}{dx} \frac{d\phi_1 : x, y}{dy}) &- z' \frac{dz}{dx} (a n_1 + \mathcal{C} M \frac{d\phi_1 : x, y}{dy}) \\ &- z' \frac{dz}{dx} (a z n_1 - \mathcal{C} M \frac{d\phi_1 : x, y}{dx}) - \frac{dz}{dx} (\mathcal{C} n_1 + \gamma M \frac{d\phi_1 : x, y}{dy}) \\ &- \frac{dz}{dy} (\mathcal{C} z n_1 - \gamma M \frac{d\phi_1 : x, y}{dx}) - \gamma n_1, \end{aligned}$$

M m m ij

on en tirera, par la comparaison des termes homologues,

$$\frac{dM}{dz} = aM, \quad \frac{dN}{dz} = cM - \frac{\partial M}{\partial x}, \quad \& \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \gamma M.$$

Donc  $M = e^{\int a dz} f_1 : x, y,$

$$N = f_2 : x, y + f_1 : x, y \int e^{\int a dz} (c - \frac{\partial f_1}{\partial x}) dz \\ - \frac{\partial f_1 : x, y}{\partial x} \int e^{\int a dz} dz + \frac{\partial f_1 : x, y}{\partial y} \iint e^{\int a dz} dz \cdot dz,$$

$$m = e^{\int a dz} \phi_1 : x, y f_1 : x, y,$$

$$n = \phi_2 : x, y + \phi_1 : x, y f_1 : x, y \int e^{\int a dz} (c - \frac{\partial \phi_1}{\partial x}) dz \\ - \frac{\partial \phi_1 : x, y f_1 : x, y}{\partial x} \int e^{\int a dz} dz + \frac{\partial \phi_1 : x, y f_1 : x, y}{\partial y} \iint e^{\int a dz} dz \cdot dz.$$

On aura de plus les deux équations

$$\frac{\partial N}{\partial x} = e^{\int a dz} \gamma f_1 : x, y, \quad \frac{\partial n}{\partial x} = e^{\int a dz} \gamma f_1 : x, y \phi_1 : x, y,$$

qui serviront à déterminer les fonctions  $\phi_1, \phi_2, f_1, f_2$ , & à trouver les conditions d'intégrabilité. Ces conditions seront les mêmes que ci-dessus; & pour le cas dont il s'agit n.º 11, ayant deux valeurs de  $x_1$  qui satisfassent aux équations qui renferment cette quantité, si on nomme  $M_1, N_1$  &  $M_2, N_2$  ce que deviendront  $M, N$  par les substitutions successives de ces deux valeurs, on trouvera pour l'intégrale première complète de l'équation aux différences partielles du second ordre,

$$M_1 z' + N_1 + F : (M_2 z' + N_2) = 0.$$

(15.) Si l'on fait  $\frac{1}{dx} dz = z''$ , & qu'on représente par  $B + F : K = 0$ , l'intégrale première complète de l'équation aux différences partielles du troisième ordre,

$$\frac{d^3 z}{dx^3} + 3z \frac{d^2 z}{dx^2 dy} + 3z^2 \frac{d^2 z}{dx dy^2} + z^3 \frac{d^2 z}{dy^2} \\ + 3z' \left( \frac{d^2 z}{dx dy} + z \frac{d^2 z}{dy^2} \right) + z'' \frac{dz}{dy} + \mu = 0;$$

$B$  &  $K$  seront donnés par les deux équations

$$(\Gamma'') \dots \dots \frac{dK}{dz''} \left( \frac{dB}{dx} + z \frac{dB}{dy} + z' \frac{dB}{dz} + z'' \frac{dB}{dz'} \right) \\ - \frac{dB}{dz''} \left( \frac{dK}{dx} + z \frac{dK}{dy} + z' \frac{dK}{dz} + z'' \frac{dK}{dz'} \right) = 0_1$$

$$(\Delta'') \dots \left( \frac{dB}{dx} - \mu \frac{dB}{dz''} \right) \left( \frac{dK}{dy} + \frac{dK}{dz} \frac{dz}{dy} + \frac{dK}{dz'} \frac{dz'}{dy} \right) \\ - \left( \frac{dK}{dx} - \mu \frac{dK}{dz''} \right) \left( \frac{dB}{dy} + \frac{dB}{dz} \frac{dz}{dy} + \frac{dB}{dz'} \frac{dz'}{dy} \right) \\ + \frac{dz}{dx} \left( \frac{dK}{dy} \frac{dB}{dz} - \frac{dB}{dy} \frac{dK}{dz} \right) + \frac{dz'}{dx} \left( \frac{dK}{dy} \frac{dB}{dz'} - \frac{dB}{dy} \frac{dK}{dz'} \right) \\ + \left( \frac{dB}{dz'} \frac{dK}{dz} - \frac{dK}{dz'} \frac{dB}{dz} \right) \left( \frac{dz}{dy} \frac{dz'}{dx} - \frac{dz}{dx} \frac{dz'}{dy} \right) = 0_2$$

Soit  $B = m z'' + n$ ,  $K = M z'' + N$ ,  $m, n, M, N$  étant des fonctions de  $x, y, z'$ ; on tirera de l'équation  $(\Gamma'')$ ,

$$M \frac{dm}{dz'} - m \frac{dM}{dz'} = 0,$$

$$M \frac{dn}{dz'} - m \frac{dN}{dz'} + z' \left( M \frac{dm}{dz} - m \frac{dM}{dz} \right) + z \left( M \frac{dm}{dy} - m \frac{dM}{dy} \right) \\ + M \frac{dm}{dx} - m \frac{dM}{dx} = 0,$$

$$M \frac{dn}{dx} - m \frac{dN}{dx} + z \left( M \frac{dn}{dy} - m \frac{dN}{dy} \right) + z' \left( M \frac{dn}{dz} - m \frac{dN}{dz} \right) = 0_1$$

La première donne  $m = M \varphi_1 : x, y, z$ ; & par cette substitution, les deux autres deviennent

$$\frac{dn}{dz'} - \frac{dN}{dz'} \varphi_1 : x, y, z + M \left( \frac{d\varphi_1 : x, y, z}{dx} + z \frac{d\varphi_1 : x, y, z}{dy} + z' \frac{d\varphi_1 : x, y, z}{dz} \right) = 0_1$$

$$\frac{dn}{dx} - \frac{dN}{dx} \varphi_1 : x, y, z + z \left( \frac{dn}{dy} - \frac{dN}{dy} \varphi_1 : x, y, z \right) + z' \left( \frac{dn}{dz} - \frac{dN}{dz} \varphi_1 : x, y, z \right) = 0_2$$

On transformera l'équation  $(\Delta'')$  en celle-ci,

$$\begin{aligned}
& \{ M \left[ \frac{d\zeta}{dy} \cdot \left( \frac{d\phi_{1:x,y,z}}{dx} + \frac{d\phi_{1:x,y,z}}{dz} \frac{d\zeta}{dx} \right) - \frac{d\zeta}{dx} \cdot \left( \frac{d\phi_{1:x,y,z}}{dy} + \frac{d\phi_{1:x,y,z}}{dz} \frac{d\zeta}{dy} \right) \right] - n_1 \} \\
& = \zeta''^2 \frac{dM}{d\zeta} \left[ \frac{d\zeta}{dy} \cdot \left( \frac{d\phi_{1:x,y,z}}{dx} + \frac{d\phi_{1:x,y,z}}{dz} \frac{d\zeta}{dx} \right) - \frac{d\zeta}{dx} \cdot \left( \frac{d\phi_{1:x,y,z}}{dy} + \frac{d\phi_{1:x,y,z}}{dz} \frac{d\zeta}{dy} \right) \right] \\
& + \zeta'' \frac{d\zeta}{dx} \left[ M \dot{\phi}_{1:x,y,z} - \frac{n_1}{M} \frac{dM}{d\zeta} - \frac{dN}{d\zeta} \cdot \left( \frac{d\phi_{1:x,y,z}}{dy} + \frac{d\phi_{1:x,y,z}}{dz} \frac{d\zeta}{dy} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial \phi_{1:x,y,z}}{\partial x} \cdot \left( \frac{dM}{dy} + \frac{dM}{dz} \frac{d\zeta}{dy} \right) \right] + \zeta'' \frac{d\zeta}{dy} \left[ z M \dot{\phi}_{1:x,y,z} + \frac{n_2}{M} \frac{dM}{d\zeta} \right. \\
& \quad \left. + \frac{dN}{d\zeta} \cdot \left( \frac{d\phi_{1:x,y,z}}{dx} + \frac{d\phi_{1:x,y,z}}{dz} \frac{d\zeta}{dx} \right) + \frac{\partial \phi_{1:x,y,z}}{\partial x} \cdot \left( \frac{dM}{dx} + \frac{dM}{dz} \frac{d\zeta}{dx} \right) \right] \\
& + \frac{d\zeta}{dx} \left[ \frac{n_2}{M} \frac{dM}{dy} - \frac{n_1}{M} \frac{dM}{dx} + N \dot{\phi}_{1:x,y,z} + \frac{n_3}{M} \frac{dM}{dz} - \frac{n_1}{M} \frac{dN}{d\zeta} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial \phi_{1:x,y,z}}{\partial x} \cdot \left( \frac{dN}{dy} + \frac{dN}{dz} \frac{d\zeta}{dy} \right) \right] + \frac{d\zeta}{dy} \left[ \frac{n_2}{M} \frac{dM}{dy} z - \frac{n_1}{M} \frac{dM}{dx} z \right. \\
& \quad \left. + z N \dot{\phi}_{1:x,y,z} + \frac{n_3}{M} \frac{dM}{dz} z + \frac{n_2}{M} \frac{dN}{d\zeta} + \frac{\partial \phi_{1:x,y,z}}{\partial x} \cdot \left( \frac{dN}{dx} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{dN}{dz} \cdot \frac{d\zeta}{dx} \right) \right] + \frac{N_2}{M} = 0,
\end{aligned}$$

où la caractéristique  $\partial$  désigne une différentielle prise par rapport aux trois variables  $x, y, z$ , & où l'on a fait pour abrégé,

$$\begin{aligned}
\frac{dn}{dy} + \frac{dn}{dz} \frac{d\zeta}{dy} - \left( \frac{dN}{dy} + \frac{dN}{dz} \frac{d\zeta}{dy} \right) \phi_{1:x,y,z} &= n_1, \\
\frac{dn}{dx} + \frac{dn}{dz} \frac{d\zeta}{dx} - \left( \frac{dN}{dx} + \frac{dN}{dz} \frac{d\zeta}{dx} \right) \phi_{1:x,y,z} &= n_2, \\
\frac{dn}{dx} \frac{d\zeta}{dy} - \frac{dn}{dy} \frac{d\zeta}{dx} - \left( \frac{dN}{dx} \frac{d\zeta}{dy} - \frac{dN}{dy} \frac{d\zeta}{dx} \right) \phi_{1:x,y,z} &= n_3, \\
\frac{dM}{dy} \frac{d\phi_{1:x,y,z}}{dx} - \frac{dM}{dx} \frac{d\phi_{1:x,y,z}}{dy} + \frac{d\zeta}{dx} \cdot \left( \frac{dM}{dy} \frac{d\phi_{1:x,y,z}}{dz} - \frac{dM}{dz} \frac{d\phi_{1:x,y,z}}{dy} \right) \\
+ \frac{d\zeta}{dy} \cdot \left( \frac{dM}{dz} \frac{d\phi_{1:x,y,z}}{dx} - \frac{dM}{dx} \frac{d\phi_{1:x,y,z}}{dz} \right) &= M \dot{\phi}_{1:x,y,z}
\end{aligned}$$

& ainsi des autres quantités semblables.

Nous prendrons  $\mu = \alpha \zeta''^2 + \zeta'' + \gamma$ ; & ayant substitué cette valeur dans le premier membre de l'équation précédente, nous le comparerons terme à terme au second, ce qui nous donnera

$$\frac{dM}{dz} = \alpha M \quad \& \quad M = e^{\int \alpha dz} f_1 : x, y, z,$$

$$\frac{dN}{dz} = \zeta M - \frac{\partial M}{\partial x}$$

$$\& N = f_2 : x, y, z + \int e^{\int \alpha dz} \left[ \left( \zeta - \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) f_1 : x, y, z - \frac{\partial f_1 : x, y, z}{\partial x} \right] dz,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = e^{\int \alpha dz} \gamma f_1 : x, y, z.$$

On aura donc aussi

$$m = e^{\int \alpha dz} f_1 : x, y, z \varphi_1 : x, y, z,$$

$$n = \varphi_2 : x, y, z + \int e^{\int \alpha dz} \left[ \left( \zeta - \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) f_1 : x, y, z \varphi_1 : x, y, z - \frac{\partial f_1 : x, y, z \varphi_1 : x, y, z}{\partial x} \right] dz,$$

$$\frac{\partial n}{\partial x} = e^{\int \alpha dz} \gamma f_1 : x, y, z \varphi_1 : x, y, z.$$

En faisant les substitutions convenables dans l'équation

$$\frac{\partial N}{\partial x} = e^{\int \alpha dz} \gamma f_1 : x, y, z,$$

on en tirera

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2 : x, y, z}{\partial x} &= f_1 : x, y, z \left\{ \gamma e^{\int \alpha dz} - \int e^{\int \alpha dz} \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot \left( \zeta - \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) \right] dz \right\} - \iint e^{\int \alpha dz} \left\{ \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \cdot \left( \zeta - \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) \right] \dots (h) f_1 : x, y, z + \frac{df_1 : x, y, z}{dz} \left( \int \frac{d\alpha}{dx} dz \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + z \int \frac{d\alpha}{dy} dz \right) - f \frac{d\alpha}{dz} dz \left( \frac{df_1 : x, y, z}{dx} + z \frac{df_1 : x, y, z}{dy} \right) \right\} dz \cdot dz \\ &\quad - \frac{\partial f_1 : x, y, z}{\partial x} \int e^{\int \alpha dz} \left( \zeta - \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) dz + \frac{\partial^2 f_1 : x, y, z}{\partial x^2} \int e^{\int \alpha dz} dz \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \frac{df_1 : x, y, z}{dz} \iint e^{\int \alpha dz} dz \cdot dz; \end{aligned}$$

& différenciant deux fois, en ne faisant varier que  $z'$ ,

$$\begin{aligned} \frac{df_{1:x,y,z}}{dz} &= e^{\int a dz} \left\{ \left[ \frac{dy}{dz} + a\gamma - \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} + \frac{\partial^2 f a dz}{\partial x^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial f a dz}{\partial x} \cdot \left( \mathcal{C} - \frac{\partial f a dz}{\partial x} \right) \right] \dots \dots \dots (H) f_{1:x,y,z} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial f_{1:x,y,z}}{\partial x} (I) \dots \dots \dots \left( \mathcal{C} - 2 \frac{\partial f a dz}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 f_{1:x,y,z}}{\partial x^2} \right\} \\ &= \int e^{\int a dz} \left[ h f_{1:x,y,z} + \frac{df_{1:x,y,z}}{dz} \left( I + \int \frac{da}{dz} dz \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + z \int \frac{da}{dy} dz \right) - \int \frac{da}{dz} dz \left( \frac{df_{1:x,y,z}}{\partial x} + z \frac{df_{1:x,y,z}}{\partial y} \right) \right] dz \\ &\quad + \frac{\partial^2 f_{1:x,y,z}}{\partial x^2} \int e^{\int a dz} dz - \frac{\partial^2 f_{1:x,y,z}}{\partial z^2} \iint e^{\int a dz} dz \cdot dz, \\ 0 &= \left( \frac{dH}{dz} + aH - h \right) f_{1:x,y,z} - \left( \frac{dI}{dz} + aI - \int \frac{da}{dz} dz \right) \left( \frac{df_{1:x,y,z}}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + z \frac{df_{1:x,y,z}}{\partial y} \right) - \left[ 2I + z \cdot \left( \frac{dI}{dz} + aI \right) + \int \frac{da}{dz} dz \right. \\ &\quad \left. + z \int \frac{da}{dy} dz \right] \frac{df_{1:x,y,z}}{\partial z} + a \frac{\partial^2 f_{1:x,y,z}}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^3 f_{1:x,y,z}}{\partial x^2 \partial z}. \end{aligned}$$

(16.) Si l'on suppose

$$a=0, \mathcal{C}=\delta z' + \epsilon, \gamma = \pi z'^3 + \varrho z'^2 + \sigma z' + \tau,$$

l'équation précédente donnera

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_{1:x,y,z}}{\partial z^2} - \frac{d \cdot \partial f_{1:x,y,z}}{dz} + 2\pi f_{1:x,y,z} &= 0, \\ 3 \left( \frac{\partial^2 f_{1:x,y,z}}{\partial x \partial z} + z \frac{\partial^2 f_{1:x,y,z}}{\partial y \partial z} \right) - 2 \frac{d \cdot \partial f_{1:x,y,z}}{dz} - \frac{d \cdot \partial f_{1:x,y,z}}{\partial x} \\ &\quad - z \frac{d \cdot \partial f_{1:x,y,z}}{\partial y} + 2\varrho f_{1:x,y,z} = 0. \end{aligned}$$

Soit  $K_1$  &  $K_2$  deux valeurs de  $f_{1:x,y,z}$  qui satisfassent à la première de celles-ci, en regardant  $x$  &  $y$  comme constans, elle aura pour intégrale complète

$$f_{1:x,y,z} = K_1 \pi_{1:x,y} + K_2 \pi_{2:x,y}.$$

On



On mettra dans l'autre  $K_1 \pi_1 : x, y$  pour  $f_1 : x, y, z$ , & de cette manière on en tirera

$$\frac{\frac{d\pi_1 : x, y}{dx} + z \frac{d\pi_1 : x, y}{dy}}{\pi_1 : x, y} = (\downarrow 1) \dots \dots \dots$$

$$3 \left( \frac{d^2 K_1}{dx dz} + z \frac{d^2 K_1}{dy dz} \right) - 2 \frac{d \cdot K_1}{dz} - \frac{d \cdot \delta K_1}{dx} - z \frac{d \cdot \delta K_1}{dy} + 2 \rho K_1$$

$$\dots \frac{\delta K_1 - 3 \frac{d K_1}{dz}}{\dots}$$

On trouvera ensuite

$$\frac{df_2 : x, y, z}{dz} = \sigma f_1 : x, y, z - \frac{d \cdot \delta f_1 : x, y, z}{dx} - z \frac{d \cdot \delta f_1 : x, y, z}{dy}$$

$$+ \frac{d^2 f_1 : x, y, z}{dx^2} + 2z \frac{d^2 f_1 : x, y, z}{dx dy} + z^2 \frac{d^2 f_1 : x, y, z}{dy^2}$$

$$\frac{df_2 : x, y, z}{dx} + z \frac{df_2 : x, y, z}{dy} = \tau f_1 : x, y, z$$

Ayant tiré de la première

$$f_2 : x, y, z = \pi_3 : x, y + \int \left[ \left( \sigma K_1 - \frac{\partial \cdot K_1}{dx} + \frac{\partial^2 \cdot K_1}{dx^2} \right) \dots \dots \dots \right]$$

$$\dots (H) \pi_1 : x, y - \left( \epsilon K_1 - 2 \frac{\partial K_1}{dx} \right) \dots (I') \frac{\partial^2 \pi_1 : x, y}{dx^2} + K_1 \frac{\partial^3 \pi_1 : x, y}{dx^3} \Big] dz$$

où  $\partial$  désigne une différentielle prise par rapport aux deux variables  $x$  &  $y$ ; on mettra cette valeur dans la seconde, & on aura

$$\frac{\partial \pi_3 : x, y}{dx} = \tau K_1 \pi_1 : x, y - \int \left[ \frac{\partial H}{dx} \pi_1 : x, y + \left( \sigma K_1 - 2 \frac{\partial \cdot K_1}{dx} + 3 \frac{\partial^2 \cdot K_1}{dx^2} \right) \dots \right]$$

$$\dots (I) \frac{\partial^2 \pi_1 : x, y}{dx^2} - \left( \epsilon K_1 - 3 \frac{\partial K_1}{dx} \right) \dots (K') \frac{\partial^3 \pi_1 : x, y}{dx^3} + K_1 \frac{\partial^4 \pi_1 : x, y}{dx^4} \Big] dz$$

$$= \iint \left( \frac{dH}{dy} \pi_1 : x, y + H \frac{d\pi_1 : x, y}{dy} - \frac{dH}{dy} \frac{\partial \pi_1 : x, y}{dx} - y \frac{d^2 \pi_1 : x, y}{dx dy} \right.$$

$$\left. + \frac{dK_1}{dy} \frac{\partial^2 \pi_1 : x, y}{dx^2} + K_1 \frac{d^3 \pi_1 : x, y}{dx^3} \right) dz \cdot dz$$

Celle-ci étant différenciée deux fois par rapport à  $z$ , donnera d'abord

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_{1:1}, y}{dy} = & \left( \frac{d\tau K_1}{dz} - \frac{\partial \sigma K_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \pi K_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 K_1}{\partial x^3} \right) \dots \\ & \dots (H') \pi_{1:1}, y - I' \frac{\partial \pi_{1:1}, y}{\partial x} + K' \frac{\partial^2 \pi_{1:1}, y}{\partial x^2} - K_1 \frac{\partial^3 \pi_{1:1}, y}{\partial x^3} \\ & - f \left[ \frac{dH}{dy} \pi_{1:1}, y + H' \frac{d\pi_{1:1}, y}{dy} - \frac{dI}{dy} \frac{\partial \pi_{1:1}, y}{\partial x} \right. \\ & \left. - I' \frac{d^2 \pi_{1:1}, y}{\partial x^2} + \frac{dK_1}{dy} \frac{\partial^2 \pi_{1:1}, y}{\partial x^2} + K_1 \frac{d^3 \pi_{1:1}, y}{\partial x^3} \right] dz, \end{aligned}$$

puis l'équation

$$\begin{aligned} & \left( \frac{dH}{dz} - \frac{dH}{dy} \right) \pi_{1:1}, y - \left( \frac{dI}{dz} - \frac{dI}{dy} \right) \frac{\partial \pi_{1:1}, y}{\partial x} \\ & - (I' + H') \frac{d\pi_{1:1}, y}{dy} + \left( \frac{dK_1}{dz} - \frac{dK_1}{dy} \right) \frac{\partial^2 \pi_{1:1}, y}{\partial x^2} \\ & + (2K' + I') \frac{d^2 \pi_{1:1}, y}{\partial x^2} - \frac{dK_1}{dz} \frac{\partial^3 \pi_{1:1}, y}{\partial x^3} \\ & - 4K_1 \frac{d^3 \pi_{1:1}, y}{\partial x^3} = 0, \end{aligned}$$

qui renferme des conditions d'intégrabilité, auxquelles on ajoutera celle trouvée plus haut, relativement à  $\psi_1$ .

(17.) Lorsqu'on aura  $\delta$  &  $\pi$  nuls,  $\varphi$  fonction des seules variables  $x, y$ , &  $e = az + b$ ,  $\sigma = e z^2 + f z + g$ ,  $\tau = p z^4 + q z^3 + r z^2 + s z + t$ , tous ces coefficients de  $z$  étant des fonctions de  $x, y$ , on pourra prendre  $K_1 = 1$ ; & comme alors le dénominateur de  $\psi_1$  sera nul, il faudra que  $\varphi = a$ , & il ne s'agira plus que de déterminer  $\frac{\partial \pi_{1:1}, y}{\partial x}$  d'une autre manière: on fera usage pour cela de la dernière équation, qui donnera

$$\frac{d^3 \pi_1 : x, y}{dy^3} - \frac{d^2 . a \pi_1 : x, y}{dy^2} + \frac{d . e \pi_1 : x, y}{dy} - 3 p . \pi_1 : x, y = 0,$$

$$8 \frac{d^3 \pi_1 : x, y}{dx dy^2} - 3 \frac{d^2 . b \pi_1 : x, y}{dy^2} - 5 \frac{d^2 . a \pi_1 : x, y}{dx dy} + 3 \frac{d . f \pi_1 : x, y}{dy} \\ + 2 \frac{d . e \pi_1 : x, y}{dx} - 6 q \pi_1 : x, y = 0,$$

$$4 \frac{d^3 \pi_1 : x, y}{dx^2 dy} - 3 \frac{d^2 . b \pi_1 : x, y}{dx dy} - \frac{d^2 . a \pi_1 : x, y}{dx^2} + \frac{d . f \pi_1 : x, y}{dx} \\ + 2 \frac{d . g \pi_1 : x, y}{dy} - 2 r \pi_1 : x, y = 0.$$

Si nous désignons par  $H_1, H_2, H_3$ , trois valeurs de  $\pi_1 : x, y$  qui satisfassent à la première, en regardant  $x$  comme constant, elle aura pour intégrale complète,

$$\pi_1 : x, y = x_1 H_1 + x_2 H_2 + x_3 H_3,$$

$x_1, x_2, x_3$  étant des fonctions de  $x$ ; on mettra  $x_1 H_1$  pour  $\pi_1 : x, y$  dans les deux autres, qui deviendront par-là

$$(8 \frac{d^3 H_1}{dx dy^2} - 3 \frac{d^2 . b H_1}{dy^2} - 5 \frac{d^2 . a H_1}{dx dy} + 3 \frac{d . f H_1}{dy} + 2 \frac{d . e H_1}{dx} - 6 q H_1) \dots$$

$$\dots (a_1) x_1 + (8 \frac{d^3 H_1}{dy^2} - 5 \frac{d . a H_1}{dy} + 2 e H_1) - (b_1) x'_1 = 0,$$

$$(4 \frac{d^3 H_1}{dx^2 dy} - 3 \frac{d^2 . b H_1}{dx dy} - \frac{d^2 . a H_1}{dx^2} + \frac{d . f H_1}{dx} + 2 \frac{d . g H_1}{dy} - 2 r H_1) \dots$$

$$\dots (c_1) x_1 + (4 \frac{d^3 H_1}{dx dy} - 3 \frac{d . b H_1}{dy} + 2 \frac{d . a H_1}{dx} + f H_1) \dots$$

$$\dots (d_1) x'_1 + (4 \frac{d H_1}{dy} - a H_1) \dots (e_1) x''_1 = 0.$$

On trouvera ensuite

$$\frac{d \pi_1 : x, y}{dy} = s \pi_1 : x, y - \frac{d . g \pi_1 : x, y}{dx} + \frac{d^2 . b \pi_1 : x, y}{dx^2} - \frac{d^2 \pi_1 : x, y}{dx^2} ;$$

$$\frac{d \pi_1 : x, y}{dx} = t \pi_1 : x, y ;$$

Nnn ij

d'où il sera facile de tirer

$$\pi_2 : x, y = X + \int (s\pi_1 : x, y - \frac{d \cdot g\pi_1 : x, y}{dx} + \frac{d^2 \cdot b\pi_1 : x, y}{dx^2} - \frac{d^3 \pi_1 : x, y}{dx^3}) dy,$$

$$X' = t\pi_1 : x, y - \int (\frac{d \cdot s\pi_1 : x, y}{dx} - \frac{d^2 \cdot g\pi_1 : x, y}{dx^2} + \frac{d^3 \cdot b\pi_1 : x, y}{dx^3} - \frac{d^4 \pi_1 : x, y}{dx^4}) dy,$$

& comme le second membre de celle-ci ne doit pas renfermer  $y$ , on aura

$$\begin{aligned} & (\frac{d \cdot tH_1}{dy} - \frac{d \cdot sH_1}{dx} + \frac{d^2 \cdot gH_1}{dx^2} - \frac{d^3 \cdot bH_1}{dx^3} + \frac{d^4 H_1}{dx^4}) x^4 \\ & - (sH_1 - 2 \frac{d \cdot gH_1}{dx} + 3 \frac{d^2 \cdot bH_1}{dx^2} - 4 \frac{d^3 H_1}{dx^3}) x^3 \\ & + (gH_1 - 3 \frac{d \cdot bH_1}{dx} + 6 \frac{d^2 H_1}{dx^2}) x^2 \\ & - (bH_1 - 4 \frac{d H_1}{dx}) x' + H_1 x'' = 0. \end{aligned}$$

L'une des trois équations que nous venons de trouver, donnera  $x_1$ , & les deux autres renfermeront les conditions d'intégrabilité; ces conditions auroient été fort différentes, si au lieu de prendre  $K_1 = 1$ , on l'eût pris  $= z$ . Quoi qu'il en soit, ayant deux valeurs de  $x_1$ , si on nomme  $M_1, N_1$  &  $M_2, N_2$ , ce que deviendront  $M, N$ , par les substitutions successives de ces deux valeurs, on aura pour l'intégrale première complète de l'équation aux différences partielles du troisième ordre,  $M_1 z'' + N_1 + F : (M_2 z'' + N_2)' = 0$ .

(18.) Ayant proposé l'équation d'un ordre quelconque

$$\frac{d^3}{dx^3} dZ + aZ^2 + cZ + \gamma = 0, a, c, \gamma \text{ étant des fonctions de } x, y, z, z' \dots z;$$

si on lui suppose pour intégrale première complète  $mZ + n + F : (MZ + N) = 0$ , on aura

$$\begin{aligned} M &= e^{\int a dZ} P, N = Q + \int e^{\int a dZ} [c - \frac{\partial a dZ}{\partial x}] \cdot P - \frac{\partial P}{\partial x} dZ, \\ m &= e^{\int a dZ} Pp, n = Qq + \int e^{\int a dZ} [c - \frac{\partial a dZ}{\partial x}] \cdot Pp - \frac{\partial Pp}{\partial x} dZ, \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= e^{\int a dZ} \gamma P, \frac{\partial n}{\partial x} = e^{\int a dZ} \gamma Pp. \end{aligned}$$

où  $P, p, Q, q$  sont des fonctions arbitraires de  $x, y, z, z', \dots$  "Z, & où  $\partial$  désigne une différentielle prise par rapport à ces seules variables. Nous ne pousserons pas plus loin ce calcul qui n'a aucune difficulté, mais nous prions de remarquer que pour parvenir aux équations que nous avons nommées  $(\Gamma)$  &  $(\Delta)$ , nous avons fait l'hypothèse la plus simple, qu'il y en a une infinité d'autres aussi faciles à calculer, qui donneront autant de différentes conditions d'intégrabilité.

(19.) Nous remarquerons encore que pour satisfaire aux équations  $(\Gamma)$ ,  $(\Delta)$  elles-mêmes, nous avons donné à  $B$  &  $K$  une forme très-limitée. Généralisons cette supposition, &

pour le second ordre prenons  $B = mz + n$ ,  $K = Mz^\pi + Nz^{\pi-1} + Pz^{\pi-2} + Qz^{\pi-3} + \dots + 'Nz + 'M$ ,  $\pi$  étant un nombre entier positif, &  $m, n, M, N \dots 'M$  des fonctions de  $x, y$ ; alors l'équation  $(\Gamma)$  devient

$$\begin{aligned} & [\pi M z^{\pi-1} + (\pi-1).Nz^{\pi-2} + (\pi-2).Pz^{\pi-3} + \dots \\ & \dots + 'N] \left[ \frac{dm}{dy} z^2 + \left( \frac{dn}{dy} + \frac{dm}{dx} \right) \cdot z + \frac{dn}{dx} \right] \\ & - m \left[ \frac{dM}{dy} z^{\pi+1} + \left( \frac{dN}{dy} + \frac{dM}{dx} \right) \cdot z^\pi + \left( \frac{dP}{dy} + \frac{dN}{dx} \right) \cdot z^{\pi-1} + \dots \right. \\ & \left. \dots + \left( \frac{d'M}{dy} + \frac{d'N}{dx} \right) \cdot z + \frac{d'M}{dx} \right] = 0, \end{aligned}$$

& donne nécessairement ce nombre  $\pi + 2$  d'équations,

$$\pi M \frac{dm}{dy} - m \frac{dM}{dy} = 0,$$

$$\pi M \cdot \left( \frac{dn}{dy} + \frac{dm}{dx} \right) - m \cdot \left( \frac{dN}{dy} + \frac{dM}{dx} \right) + (\pi-1) \cdot N \frac{dm}{dy} = 0,$$

$$\pi M \frac{dx}{dx} - m \cdot \left( \frac{dP}{dy} + \frac{dN}{dx} \right) + (\pi-1) \cdot N \cdot \left( \frac{dn}{dy} + \frac{dm}{dx} \right) + (\pi-2) \cdot P \frac{dm}{dy} = 0,$$

$$(\pi-1) \cdot N \frac{dn}{dx} - m \cdot \left( \frac{dQ}{dy} + \frac{dP}{dx} \right) + (\pi-2) \cdot P \cdot \left( \frac{dm}{dy} + \frac{dm}{dx} \right) + (\pi-3) \cdot Q \frac{dm}{dy} = 0,$$

$$N \frac{dm}{dy} - m \left( \frac{d'N}{dy} + \frac{d'P}{dx} \right) + 2'P \left( \frac{dn}{dy} + \frac{dm}{dx} \right) + 3'Q \frac{dn}{dx} = 0,$$

$$N \left( \frac{dn}{dy} + \frac{dm}{dx} \right) - m \left( \frac{d'M}{dy} + \frac{d'N}{dx} \right) + 2'P \frac{dn}{dx} = 0,$$

$$N \frac{dn}{dx} - m \frac{d'M}{dx} = 0.$$

Il sera facile de tirer de la première  $m = M^{\frac{1}{\pi}} \phi_1 : x$  ;  
en substituant cette valeur dans la seconde, elle devient

$$\pi \frac{dn}{dy} - \frac{1}{\pi} M^{\frac{1}{\pi}-2} \phi_1 : x \left( \pi M \frac{dN}{dy} - (\pi-1) N \frac{dM}{dy} \right) = -\pi M^{\frac{1}{\pi}} \phi_1 : x,$$

qui a pour intégrale complète

$$\pi n - NM^{\frac{1}{\pi}-1} \phi_1 : x = (A) \dots \phi_2 : x - \pi \phi_1 : x \int M^{\frac{1}{\pi}} dy,$$

(20.) Occupons-nous maintenant de l'équation ( $\Delta$ ),  
dans laquelle le coefficient de  $\mu$  ou

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dy} \frac{dK}{dz} - \frac{dB}{dz} \frac{dK}{dy} &= \left[ \pi M \frac{dn}{dy} - m \frac{dN}{dy} + (\pi-1) N \frac{dm}{dy} \right] \dots \\ &\dots (\rho) z^{\pi-1} + \left[ (\pi-1) N \frac{dn}{dy} - m \frac{dP}{dy} + (\pi-2) P \frac{dm}{dy} \right] \dots \\ &\dots (\sigma) z^{\pi-2} + \left[ (\pi-2) P \frac{dn}{dy} - m \frac{dQ}{dy} + (\pi-3) Q \frac{dm}{dy} \right] \dots \\ &\dots (\tau) z^{\pi-3} + \dots + \left( 3'Q \frac{dn}{dy} - m \frac{d'P}{dy} + 2'P \frac{dm}{dy} \right) \dots \\ &\dots (\tau) z^2 + \left( 2'P \frac{dn}{dy} - m \frac{d'N}{dy} + N \frac{dm}{dy} \right) \dots (\sigma) z + \left( N \frac{dm}{dy} - m \frac{d'M}{dy} \right) \dots (\rho); \end{aligned}$$

or si nous convenons de nous servir de  $m \dot{M}$  pour représenter  $\frac{dm}{dy} \frac{dM}{dx} - \frac{dm}{dx} \frac{dM}{dy}$ , & ainsi des autres quantités semblables, nous pourrons la transformer en celle-ci,

$$\mu (\rho z^{\pi-1} + \sigma z^{\pi-2} + \tau z^{\pi-3} + \dots + \tau z^2 + \sigma z + \rho) = \dot{m} \dot{M} z^{\pi+1} \\ + (\dot{m} \dot{N} + \dot{n} \dot{M}) z^{\pi} + (\dot{m} \dot{P} + \dot{n} \dot{N}) z^{\pi-1} + (\dot{m} \dot{Q} + \dot{n} \dot{P}) z^{\pi-2} \\ + \dots + (\dot{m} \dot{N} + \dot{n} \dot{P}) z^2 + (\dot{m} \dot{M} + \dot{n} \dot{N}) z + \dot{n} \dot{M}.$$

(21.) C'est pourquoi si l'on suppose.

$$\mu = \frac{a z^{\pi+1} + c z^{\pi} + \gamma z^{\pi-1} + \delta z^{\pi-2} + \varepsilon z^{\pi-3} + \dots + \gamma z^2 + c z + a}{z^{\pi-1} + n z^{\pi-2} + \theta z^{\pi-3} + i z^{\pi-4} + \dots + i z^2 + \theta z + n}$$

où  $a, c, \&c.$  sont des fonctions de  $x, y$ ; en faisant pour abréger

$$c = an = c_1,$$

$$\gamma = a\theta + cn + an^2 = \gamma_1,$$

$$\delta = ai + c\theta + 2an\theta - \gamma n + cn^2 - an^3 = \delta_1,$$

$$\varepsilon = axi + ci + 2ani - \gamma\theta + a\theta^2 + 2c\theta\theta - 3an^2\theta - \delta n + \gamma n^2 - cn^3 + an^4 = \varepsilon_1,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$' \gamma' n^2 = 'c' n' \theta = 'a' n' i + 'a' \theta^2 = 'n^2' \gamma_1,$$

$$'c' n = 'a' \theta = 'n' c_1,$$

on aura les  $2\pi + 1$  équations que voici:

$$\dot{m} \dot{M} = a\rho,$$

$$\dot{m} \dot{N} + \dot{n} \dot{M} = c_1 \rho + a\sigma,$$

$$\dot{m} \dot{P} + \dot{n} \dot{N} = \gamma_1 \rho + c_1 \sigma + a\tau,$$

$$\dot{m} \dot{Q} + \dot{n} \dot{P} = \delta_1 \rho + \gamma_1 \sigma + c_1 \tau + a\theta,$$

$$\dot{m} \dot{R} + \dot{n} \dot{Q} = \varepsilon_1 \rho + \delta_1 \sigma + \gamma_1 \tau + c_1 \theta + a\varphi,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$'n (\dot{m} \dot{N} + \dot{n} \dot{P}) = '\gamma_1' \rho + 'c_1' \sigma + 'a' \tau,$$

$$'n (\dot{m} \dot{M} + \dot{n} \dot{N}) = 'c_1' \rho + 'a' \sigma,$$

$$'n \dot{n} \dot{M} = 'a' \rho.$$

(22.) Si on examine ces équations, on verra aisément que les  $\pi - 1$  dernières peuvent être mises sous la forme d'équations du premier degré entre  $\frac{\sigma}{\rho}, \frac{\tau}{\rho} \dots \frac{\varphi}{\rho}$ , & des

quantités connues, c'est-à-dire qu'il ne seroit question que d'un genre d'élimination qui n'a aucune difficulté, si on vouloit déterminer par ce moyen  $\frac{\sigma}{\rho}$ ,  $\frac{\tau}{\rho}$ , &c. que nous ferons pour simplifier  $= \sigma 1$ ,  $\tau 1$ , &c. Par exemple, lorsque  $\pi = 3$ , ces dernières équations ne sont autres que

$$\theta(\dot{m}\dot{Q} + \dot{n}\dot{P}) = \epsilon\sigma + (\delta - \frac{1}{\theta})\tau, \theta\dot{n}\dot{Q} = \epsilon\tau$$

desquelles il est facile de tirer

$$\sigma 1 = \frac{\delta(\epsilon\delta - \delta\theta + \epsilon\tau) + \delta\theta(\epsilon - \gamma\theta)}{(\epsilon - \gamma\theta)^2 + \delta(\delta\theta - \epsilon\tau - \epsilon\delta\theta)},$$

$$\tau 1 = \frac{(\delta\theta)^2 + \epsilon\delta(\epsilon - \gamma\theta)}{(\epsilon - \gamma\theta)^2 + \delta(\delta\theta - \epsilon\tau - \epsilon\delta\theta)}.$$

(23.) A cause de  $\rho = -\pi M^{\frac{1}{\pi} + 1} \phi' 1 : x$ , les deux premières équations du même numéro pourront être changées en celles-ci,  $\frac{dM}{dy} = \pi a M$ ,

$$\frac{dN}{dy} + aN = \frac{\dot{A}\dot{M}}{\pi \phi' 1 : x} M^{\frac{-1}{\pi}} + \pi M.(\epsilon 1 + a\sigma 1),$$

desquelles il sera facile de tirer  $M$  &  $N$ . Il ne sera pas plus difficile de tirer les valeurs de  $P$ ,  $Q$ , . . . .  $M$  de celles-ci

$$(\pi - 1).N \frac{dn}{dy} - m \frac{dP}{dy} + (\pi - 2).P \frac{dm}{dy} = \sigma 1 \rho,$$

$$(\pi - 2).P \frac{dn}{dy} - m \frac{dQ}{dy} + (\pi - 3).Q \frac{dm}{dy} = \tau 1 \rho,$$

$$(\pi - 3).Q \frac{dn}{dy} - m \frac{dR}{dy} + (\pi - 4).R \frac{dm}{dy} = \upsilon 1 \rho,$$

.....

$$3'Q \frac{dn}{dy} - m \frac{d'P}{dy} + 2'P \frac{dm}{dy} = \tau 1 \rho,$$

$$2'P \frac{dn}{dy} - m \frac{d'N}{dy} + 'N \frac{dm}{dy} = \sigma 1 \rho,$$

$$'N \frac{dn}{dy} - m \frac{d'M}{dy} = \rho 1 \rho \quad (24)$$



(24.) Mais les équations du n.<sup>o</sup> 19, en en exceptant les deux premières, deviennent

$$\begin{aligned} \pi M \frac{d\pi}{dx} - m \frac{dN}{dx} + (\pi-1) \cdot N \frac{dm}{dx} + \sigma 1 \rho &= 0, \\ (\pi-1) \cdot N \frac{d\pi}{dx} - m \frac{dP}{dx} + (\pi-2) \cdot P \frac{dm}{dx} + \tau 1 \rho &= 0, \\ (\pi-2) \cdot P \frac{d\pi}{dx} - m \frac{dQ}{dx} + (\pi-3) \cdot Q \frac{dm}{dx} + \upsilon 1 \rho &= 0, \\ (\pi-3) \cdot Q \frac{d\pi}{dx} - m \frac{dR}{dx} + (\pi-4) \cdot R \frac{dm}{dx} + \phi 1 \rho &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ 3' Q \frac{d\pi}{dx} - m \frac{d'P}{dx} + 2' P \frac{dm}{dx} + \sigma' 1 \rho &= 0, \\ 2' P \frac{d\pi}{dx} - m \frac{d'N}{dx} + 'N \frac{dm}{dx} + \tau' 1 \rho &= 0, \\ 'N \frac{dN}{dx} - m \frac{d'M}{dx} &= 0. \end{aligned}$$

Donc si l'on différencie

$$\pi M \frac{d\pi}{dy} - m \frac{dN}{dy} + (\pi-1) \cdot N \frac{dm}{dy} = \rho,$$

& toutes celles du numéro précédent par rapport à  $x$ , & qu'on les compare aux précédentes, différenciées par rapport à  $y$ , on aura

$$\begin{aligned} \pi (\dot{n}\dot{M} + \dot{m}\dot{N}) &= \frac{d\rho}{dx} + \frac{d \cdot \sigma 1 \rho}{dy}, \\ (\pi-1) (\dot{n}\dot{N} + \dot{m}\dot{P}) &= \frac{d \cdot \sigma 1 \rho}{dx} + \frac{d \cdot \tau 1 \rho}{dy}, \\ (\pi-2) (\dot{n}\dot{P} + \dot{m}\dot{Q}) &= \frac{d \cdot \tau 1 \rho}{dx} + \frac{d \cdot \upsilon 1 \rho}{dy}, \\ (\pi-3) (\dot{n}\dot{Q} + \dot{m}\dot{R}) &= \frac{d \cdot \upsilon 1 \rho}{dx} + \frac{d \cdot \phi 1 \rho}{dy}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$3 (\dot{n}'\dot{Q} + \dot{m}'\dot{P}) = \frac{d.\tau_1 p}{dx} + \frac{d.\sigma_1 p}{dy},$$

$$2 (\dot{n}'\dot{P} + \dot{m}'\dot{N}) = \frac{d.\sigma_1 p}{dx} + \frac{d.\rho_1 p}{dy},$$

$$\dot{n}'\dot{N} + \dot{m}'\dot{M} = \frac{d.\rho_1 p}{dx};$$

& faisant pour abréger,

$$\pi (\zeta_1 + a\sigma_1) = \zeta_2, (\pi - 1) (\gamma_1 + \zeta_1\sigma_1 + a\tau_1) = \gamma_2, \&c.$$

$$\frac{dp}{dx} + \frac{d.\sigma_1 p}{dy} = \zeta_2 p, \quad \frac{d.\sigma_1 p}{dx} + \frac{d.\tau_1 p}{dy} = \gamma_2 p,$$

$$\frac{d.\tau_1 p}{dx} + \frac{d.v_1 p}{dy} = \delta_2 p, \quad \frac{d.v_1 p}{dx} + \frac{d.\theta_1 p}{dy} = \epsilon_2 p,$$

$$\dots\dots\dots \frac{d.\tau_1 p}{dx} + \frac{d.\sigma_1 p}{dy} = \gamma_2 p,$$

$$\frac{d.\sigma_1 p}{dx} + \frac{d.\rho_1 p}{dy} = \gamma_2 p, \quad \frac{d.\rho_1 p}{dx} = \zeta_2 p.$$

(25.) De  $\frac{dM}{dy} = \pi a M$ , on tire

$$M = e^{\pi f a dy} f_{1:x} \& \frac{dM}{dx} = M \left( \pi f \frac{da}{dx} dy + \frac{f'_{1:x}}{f_{1:x}} \right);$$

donc

$$p = - \pi e^{(\pi+1) f a dy} \varphi'_{1:x} (f_{1:x})^{\frac{\pi+1}{\pi}},$$

$$\frac{dp}{dy} = (\pi+1) a p,$$

$$\frac{dp}{dx} = p \left[ (\pi+1) \cdot f \frac{da}{dx} dy + \frac{\varphi''_{1:x}}{\varphi'_{1:x}} + \frac{\pi+1}{\pi} \frac{f'_{1:x}}{f_{1:x}} \right].$$

Cela posé, la première des équations précédentes pourra être changée en celle-ci,

$$\frac{\varphi''_{1:x}}{\varphi'_{1:x}} + \frac{\pi+1}{\pi} \frac{f'_{1:x}}{f_{1:x}} = (X_1) \dots\dots$$

$$\dots\dots \zeta_2 - \frac{d\sigma_1}{dy} - (\pi+1) (a\sigma_1 + f \frac{da}{dx} dy),$$

qui donne pour première condition d'intégrabilité que  $X_1$  ne doit renfermer de variable que  $x$ , & au moyen de laquelle

il sera facile de déterminer l'une de ces deux quantités  $\varphi_{1:x}$  &  $f_{1:x}$ , lorsqu'on connoîtra l'autre. Donc

$$\frac{d\rho}{ds} = \rho \left[ \zeta_2 - \frac{d\sigma_1}{dy} - (\pi + 1) \alpha \sigma_1 \right];$$

en substituant cette valeur dans les équations que suivent celle dont nous venons de nous occuper, nous trouverons  $\pi - 1$  conditions que voici :

$$\frac{d\sigma_1}{ds} - \sigma_1 \frac{d\sigma_1}{dy} + \frac{d\tau_1}{dy} - \gamma_2 + \zeta_2 \sigma_1 + (\pi + 1) [\tau_1 - (\sigma_1)^2] \alpha = 0;$$

$$\frac{d\tau_1}{ds} - \tau_1 \frac{d\sigma_1}{dy} + \frac{d\nu_1}{dy} - \delta_2 + \zeta_2 \tau_1 + (\pi + 1) (\nu_1 - \sigma_1 \tau_1) \alpha = 0,$$

$$\frac{d\nu_1}{ds} - \nu_1 \frac{d\sigma_1}{dy} + \frac{d\varphi_1}{dy} - \epsilon_2 + \zeta_2 \nu_1 + (\pi + 1) (\varphi_1 - \sigma_1 \nu_1) \alpha = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{d'\tau_1}{ds} - \tau_1 \frac{d\sigma_1}{dy} + \frac{d'\sigma_1}{dy} - \delta_2 + \zeta_2 \tau_1 + (\pi + 1) (\sigma_1 - \sigma_1 \tau_1) \alpha = 0,$$

$$\frac{d'\sigma_1}{ds} - \sigma_1 \frac{d\sigma_1}{dy} + \frac{d'\rho_1}{dy} - \gamma_2 + \zeta_2 \sigma_1 + (\pi + 1) (\rho_1 - \sigma_1 \sigma_1) \alpha = 0,$$

$$\frac{d'\rho_1}{ds} - \rho_1 \frac{d\sigma_1}{dy} - \zeta_2 + \zeta_2 \rho_1 + (\pi + 1) \alpha \sigma_1 \rho_1 = 0.$$

(26.) A cause de

$$m = e^{\int \alpha dy} \varphi_{1:x} (f_{1:x})^{\frac{1}{\pi}}, \quad \frac{dm}{dy} = \alpha m,$$

$$\frac{dm}{ds} = m \left( \int \frac{d\alpha}{ds} dy + \frac{\varphi'_{1:x}}{\varphi_{1:x}} + \frac{f'_{1:x}}{\pi f_{1:x}} \right),$$

$$\pi n = N e^{(1-\pi) \int \alpha dy} \varphi_{1:x} (f_{1:x})^{\frac{1-\pi}{\pi}} + A,$$

$$\pi \frac{dn}{dy} = e^{(1-\pi) \int \alpha dy} \varphi_{1:x} (f_{1:x})^{\frac{1-\pi}{\pi}} \left[ \frac{dN}{dy} + (1-\pi) \cdot \alpha N \right] + \frac{dA}{dy},$$

$$\pi \frac{dn}{ds} = e^{(1-\pi) \int \alpha dy} \varphi_{1:x} (f_{1:x})^{\frac{1-\pi}{\pi}} \left\{ \frac{dN}{ds} + N \left[ (1-\pi) \cdot \int \frac{d\alpha}{ds} dy + \frac{\varphi'_{1:x}}{\varphi_{1:x}} + \frac{1-\pi}{\pi} \frac{f'_{1:x}}{f_{1:x}} \right] \right\} + \frac{dA}{ds}.$$

Ooo ij

476 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

les équations du n.<sup>o</sup> 24 seront susceptibles d'autres changemens que nous analyserons successivement. On verra d'abord que de la première, on peut tirer

$$\frac{dA}{dx} = \pi e^{\int a dy} (f_1 : x)^{\frac{1}{\pi}} \varphi_1 : x \left( \sigma_1 - \frac{N}{f_1 : x} e^{-\pi \int a dy} \right);$$

que si l'on met cette valeur dans l'équation du n.<sup>o</sup> 23, qui doit donner  $N$ , on la réduit à

$$\frac{dN}{dy} - (\pi - 1) a N = \pi e^{\pi \int a dy} f_1 : x \left( \sigma_1 - \int \frac{da}{dx} dy - \frac{f'_1 : x}{\pi f_1 : x} \right),$$

d'où il sera facile de tirer

$$N = e^{(\pi-1) \int a dy} \left[ f_2 : x + \pi f_1 : x \int e^{\int a dy} \left( \sigma_1 - \int \frac{da}{dx} dy \right) dy - f'_1 : x \int e^{\int a dy} dy \right];$$

après quoi on substituera pour  $N$  &  $A$  leurs valeurs dans la même équation, & on aura

$$\frac{\varphi_2 : x}{\pi \varphi_1 : x (f_1 : x)^{\frac{1}{\pi}}} + \frac{f_2 : x}{f_1 : x} = \sigma_1 e^{\int a dy} - \int e^{\int a dy} \left( \frac{da}{dy} + a \sigma_1 \right) dy,$$

dont le second membre est évidemment une fonction de  $x$  seul; ainsi lorsqu'on connoîtra  $f_1 : x$ ,  $\varphi_1 : x$  &  $f_2 : x$ , celle-ci nous donnera  $\varphi_2 : x$ .

(27.) Les autres équations du n.<sup>o</sup> 23 deviendront intégrables, en les divisant successivement par  $m^{\pi-1}$ ,  $m^{\pi-2}$ ,  $m^{\pi-3}$ , &c. & on en tirera

$$P = m^{\pi-2} \left[ f_3 : x + \int \frac{(\pi-1) \cdot N \frac{dx}{dy} - \sigma_1 P}{m^{\pi-2}} dy \right],$$

$$Q = m^{\pi-3} \left[ f_4 : x + \int \frac{(\pi-2) \cdot P \frac{dx}{dy} - \tau_1 P}{m^{\pi-2}} dy \right],$$

$$R = m^{\pi-4} \left[ f_5 : x + \int \frac{(\pi-3) \cdot Q \frac{dn}{dy} - 01p}{m^{\pi-3}} dy \right],$$

$$P = m^3 \left[ f_{\pi-1} : x + \int \frac{3'Q \frac{dn}{dy} - '71p}{m^3} dy \right],$$

$$'N = m \left[ f_{\pi} : x + \int \frac{2'P \frac{dn}{dy} - '61p}{m^2} dy \right],$$

$$'M = f_{\pi} + 1 : x + \int \frac{'N \frac{dn}{dy} - '91p}{m} dy.$$

Il faudra substituer ces valeurs dans les équations du n.<sup>o</sup> 24, ce qui donnera

$$f'_3 : x = \frac{(\pi-1) \cdot N \frac{dn}{dx} + 71p}{m^{\pi-1}} - \int \frac{d \left\{ [(\pi-1) \cdot N \frac{dn}{dy} - 61p] : m^{\pi-1} \right\}}{dx} dy,$$

$$f'_4 : x = \frac{(\pi-2) \cdot P \frac{dn}{dx} + 01p}{m^{\pi-2}} - \int \frac{d \left\{ [(\pi-2) \cdot P \frac{dn}{dy} - 71p] : m^{\pi-2} \right\}}{dx} dy,$$

$$f'_5 : x = \frac{(\pi-3) \cdot Q \frac{dn}{dx} + 01p}{m^{\pi-3}} - \int \frac{d \left\{ [(\pi-3) \cdot Q \frac{dn}{dy} - 01p] : m^{\pi-3} \right\}}{dx} dy,$$

$$f'_{\pi-1} : x = \frac{3'Q \frac{dn}{dx} + '61p}{m^3} - \int \frac{d \left[ (3'Q \frac{dn}{dy} - '71p) : m^3 \right]}{dx} dy,$$

$$f'_{\pi} : x = \frac{2'P \frac{dn}{dx} + '91p}{m^2} - \int \frac{d \left[ (2'P \frac{dn}{dy} - '61p) : m^2 \right]}{dx} dy,$$

$$f'_{\pi+1} : x = \frac{'N \frac{dn}{dx}}{m} - \int \frac{d \left[ ('N \frac{dn}{dy} - '91p) : m \right]}{dx} dy.$$

& comme les seconds membres de celles-ci ne doivent pas renfermer  $y$ , on en tirera ces  $\pi - 1$  équations,

$$\begin{aligned} 1-1) & \left( \dot{n} \dot{N} + \frac{\tau_{1p}}{m} \frac{dm}{dy} + \frac{\sigma_{1p}}{m} \frac{dm}{dx} \right) - (\pi-1)^2 \frac{N}{m} \dot{n} \dot{m} - \frac{d \cdot \tau_{1p}}{dy} - \frac{d \cdot \sigma_{1p}}{dx} = 0, \\ 1-2) & \left( \dot{n} \dot{P} + \frac{v_{1p}}{m} \frac{dm}{dy} + \frac{\tau_{1p}}{m} \frac{dm}{dx} \right) - (\pi-2)^2 \frac{P}{m} \dot{n} \dot{m} - \frac{d \cdot v_{1p}}{dy} - \frac{d \cdot \tau_{1p}}{dx} = 0, \\ 1-3) & \left( \dot{n} \dot{Q} + \frac{\varphi_{1p}}{m} \frac{dm}{dy} + \frac{v_{1p}}{m} \frac{dm}{dx} \right) - (\pi-3)^2 \frac{Q}{m} \dot{n} \dot{m} - \frac{d \cdot \varphi_{1p}}{dy} - \frac{d \cdot v_{1p}}{dx} = 0, \\ & \dots\dots\dots \\ 3) & \left( \dot{n} \dot{Q} + \frac{\sigma'_{1p}}{m} \frac{dm}{dy} + \frac{\tau'_{1p}}{m} \frac{dm}{dx} \right) - 9 \frac{Q}{m} \dot{n} \dot{m} - \frac{d \cdot \sigma'_{1p}}{dy} - \frac{d \cdot \tau'_{1p}}{dx} = 0, \\ 2) & \left( \dot{n} \dot{P} + \frac{\rho'_{1p}}{m} \frac{dm}{dy} + \frac{\sigma'_{1p}}{m} \frac{dm}{dx} \right) - 4 \frac{P}{m} \dot{n} \dot{m} - \frac{d \cdot \rho'_{1p}}{dy} - \frac{d \cdot \sigma'_{1p}}{dx} = 0, \\ & \dot{n} \dot{N} + \frac{\rho'_{1p}}{m} \frac{dm}{dx} - \frac{N}{m} \dot{n} \dot{m} - \frac{d \cdot \rho'_{1p}}{dx} = 0. \end{aligned}$$

En substituant pour

$$(\pi-1) \cdot \dot{n} \dot{N} - \frac{d \cdot \tau_{1p}}{dy} - \frac{d \cdot \sigma_{1p}}{dx}, (\pi-2) \cdot \dot{n} \dot{P} - \frac{d \cdot v_{1p}}{dy} - \frac{d \cdot \tau_{1p}}{dx}, \&c,$$

leurs valeurs (n.<sup>o</sup> 24) —  $(\pi-1) \dot{m} \dot{P}$ , —  $(\pi-2) \dot{m} \dot{Q}$ , &c.

on les réduit à

$$\begin{aligned} \frac{m}{y} [(\pi-1) \cdot N \frac{dn}{dx} - m \frac{dP}{dx} + \tau_{1p}] - \frac{dm}{dx} [(\pi-1) \cdot N \frac{dn}{dy} - m \frac{dP}{dy} - \sigma_{1p}] &= 0, \\ \frac{m}{y} [(\pi-2) \cdot P \frac{dn}{dx} - m \frac{dQ}{dx} + v_{1p}] - \frac{dm}{dx} [(\pi-2) \cdot P \frac{dn}{dy} - m \frac{dQ}{dy} - \tau_{1p}] &= 0, \\ \frac{n}{y} [(\pi-3) \cdot Q \frac{dn}{dx} - m \frac{dR}{dx} + \varphi_{1p}] - \frac{dm}{dx} [(\pi-3) \cdot Q \frac{dn}{dy} - m \frac{dR}{dy} - v_{1p}] &= 0, \\ & \dots\dots\dots \\ \frac{m}{y} (3'Q \frac{dn}{dx} - m \frac{d'P}{dx} + \sigma'_{1p}) - \frac{dm}{dx} (3'Q \frac{dn}{dy} - m \frac{d'P}{dy} - \tau'_{1p}) &= 0, \\ \frac{m}{y} (2'P \frac{dn}{dx} - m \frac{d'N}{dx} - \rho'_{1p}) - \frac{dm}{dx} (2'P \frac{dn}{dy} - m \frac{d'N}{dy} - \sigma'_{1p}) &= 0, \\ \frac{m}{y} ('N \frac{dn}{dx} - m \frac{d'M}{dx}) - \frac{dm}{dx} ('N \frac{dn}{dy} - m \frac{d'M}{dy} - \rho'_{1p}) &= 0. \end{aligned}$$

auxquelles si on ajoute celles du n.<sup>o</sup> 23, après les avoir multipliées par  $\frac{dm}{dx}$ , on aura les équations du n.<sup>o</sup> 24, dont nous sommes partis.

(28.) Il reste encore l'équation  $\dot{n}'M = 'a_2 \varphi$  qui devient, en faisant pour simplifier  $\frac{'a_2}{\rho_1} = a_3$ ,  $\frac{dn}{dx} = ma_3$ , ou

$$\frac{dN}{dx} = (\pi - 1) \left( \int \frac{da}{dx} dy + \frac{\varphi'_{1:x}}{\varphi_{1:x}} + \frac{f'_{1:x}}{\pi f_{1:x}} \right) N = \pi e^{\int a dy} \left( 23 - \sigma_1 \frac{\varphi'_{1:x}}{\varphi_{1:x}} \right) f_{1:x}.$$

On mettra dans celle-ci pour  $N$  la valeur, & on aura

$$\begin{aligned} \frac{f'_{1:x}}{\pi f_{1:x}} &= \frac{\pi-1}{\pi} \frac{f_{1:x}}{f_{1:x}} \left( \frac{\varphi'_{1:x}}{\varphi_{1:x}} + \frac{f'_{1:x}}{\pi f_{1:x}} \right) = \left[ \frac{f'_{1:x}}{\pi f_{1:x}} \right. \\ &+ \left. \frac{\pi-1}{\pi} \frac{f_{1:x}}{f_{1:x}} \left( \frac{\varphi'_{1:x}}{\varphi_{1:x}} + \frac{f'_{1:x}}{\pi f_{1:x}} \right) \right] \int e^{\int a dy} dy \\ &= \frac{f_{1:x}}{\pi f_{1:x}} \int e^{\int a dy} \left( \mathcal{C}_1 - 2 \int \frac{da}{dx} dy \right) dy \\ &+ \frac{\varphi'_{1:x}}{\varphi_{1:x}} \left[ (\pi-1) \int e^{\int a dy} \left( \mathcal{C}_1 - \int \frac{da}{dx} dy \right) dy \right. \\ &- \left. \sigma_1 e^{\int a dy} \right] + a_3 e^{\int a dy} = \int e^{\int a dy} \left[ \frac{d\mathcal{C}_1}{dx} \right. \\ &- \left. \int \frac{d^2 a}{dx^2} dy + \left( \mathcal{C}_1 - \int \frac{da}{dx} dy \right) \frac{da}{dx} dy \right] dy, \end{aligned}$$

dont le second membre étant différencié par rapport à  $y$ , doit être nul; on a donc

$$\begin{aligned} \frac{f'_{1:x}}{\pi f_{1:x}} + \frac{\pi-1}{\pi} \frac{f_{1:x}}{f_{1:x}} \left( \frac{\varphi'_{1:x}}{\varphi_{1:x}} + \frac{f'_{1:x}}{\pi f_{1:x}} \right) &= \frac{f_{1:x}}{\pi f_{1:x}} \left( \mathcal{C}_1 - 2 \int \frac{da}{dx} dy \right) \\ &+ \frac{\varphi'_{1:x}}{\varphi_{1:x}} \left[ (\pi-1) \left( \mathcal{C}_1 - \int \frac{da}{dx} dy \right) - \frac{d\sigma_1}{dy} - a\sigma_1 \right] = (X_2) \dots \\ \dots \frac{d\mathcal{C}_1}{dx} - \int \frac{d^2 a}{dx^2} dy + \left( \mathcal{C}_1 - \int \frac{da}{dx} dy \right) \frac{da}{dx} dy &= \frac{da_3}{dy} - aa_3, \end{aligned}$$

(29.) Avant de satisfaire à cette équation, nous remarquerons, qu'en mettant dans celles de l'avant-dernier numéro,

pour  $\frac{d\pi}{dx}$  la valeur  $-\pi a_3$ , on en tirera

$$\gamma_1 = a_3, \delta_1 = 0, \epsilon_1 = 0 \dots \gamma_1 = 0, \epsilon_1 = 0;$$

celles-ci indiquent que le numérateur de  $\mu(n^\circ 21)$  doit être exactement divisible par le dénominateur, ce qui donnera pour quotient  $a_3 z^2 + \epsilon_1 z + \gamma_1$ . Alors, les valeurs de  $\sigma_1, \tau_1$ , &c. trouvées  $n^\circ 22$ , se présenteront sous la forme de  $\frac{0}{0}$ ; mais on pourra toujours les déterminer au moyen des  $\pi - 1$  équations du  $n^\circ 25$ .

(30.) Si pour satisfaire à l'équation du  $n^\circ 28$ , on suppose  $\epsilon_1 = 2 \int \frac{da}{dx} dy = x_1$ ,  $x_1$  étant une fonction de  $x$ , on aura

$$(\pi - 1)(\epsilon_1 - \int \frac{da}{dx} dy) - \frac{d\sigma_1}{dy} - a\sigma_1 = X_1 - x_1$$

& l'équation dont il s'agissoit tout-à-l'heure, deviendra

$$\begin{aligned} \frac{f''_{1:x}}{\pi f_{1:x}} + \frac{\pi-1}{\pi} \frac{f'_{1:x}}{f_{1:x}} \left( \frac{\phi'_{1:x}}{\phi_{1:x}} + \frac{f'_{1:x}}{\pi f_{1:x}} \right) - x_1 \frac{f'_{1:x}}{\pi f_{1:x}} \\ + \frac{\phi'_{1:x}}{\phi_{1:x}} (X_1 - x_1) = X_2, \end{aligned}$$

où  $X_2$  ne doit renfermer de variable que  $x$ . Ces deux conditions donnent pour équation intégrable celle dont nous sommes occupés  $n^\circ 5$  &  $8$ ; alors on fera  $\pi = 1$ ,  $\sigma_1 = 0$ , &c. d'où l'on tirera  $X_1 = x_1$ , & le reste comme dans les numéros cités. Mais si pour satisfaire à la même équation, on fait

$$\frac{\phi'_{1:x}}{\phi_{1:x}} + \frac{f'_{1:x}}{\pi f_{1:x}} = 0,$$

on la réduit à

$$f''_{1:x} - X_1 f'_{1:x} = \pi X_2 f_{1:x};$$

& comme



& comme, à cause de

$$\frac{f''_{1:x}}{f'_{1:x}} + \frac{\pi+1}{x} \frac{f'_{1:x}}{f_{1:x}} = X_1,$$

on a aussi

$$f''_{1:x} = X_1 f'_{1:x};$$

on trouve pour condition d'intégrabilité, que  $X_2$  doit être nul. Cela posé, l'équation

$$\frac{d\sigma_1}{dy} + a\sigma_1 = \pi C_1 - (\pi+1) \int \frac{da}{dx} dy - X_1,$$

donnera

$$\sigma_1 = e^{-\int a dy} \left\{ \Delta_{1:x} + \int e^{\int a dy} \left[ \pi C_1 - (\pi+1) \int \frac{da}{dx} dy - X_1 \right] dy \right\};$$

après quoi on aura de suite

$$\tau_1 = e^{-\int a dy} \left\{ \Delta_{2:x} + \int e^{\int a dy} \left[ (\pi-1) \gamma_1 \sigma_1 + (a\sigma_1 - C_1) \cdot \sigma_1 + \sigma_1 \frac{d\sigma_1}{dy} - \frac{d\sigma_1}{dx} \right] dy \right\},$$

$$v_1 = e^{-\int a dy} \left\{ \Delta_{3:x} + \int e^{\int a dy} \left[ (\pi-2) \gamma_1 \tau_1 + (a\sigma_1 - 2C_1) \cdot \tau_1 + \tau_1 \frac{d\sigma_1}{dy} - \frac{d\tau_1}{dx} \right] dy \right\},$$

$$\varphi_1 = e^{-\int a dy} \left\{ \Delta_{4:x} + \int e^{\int a dy} \left[ (\pi-3) \gamma_1 \tau_1 + (a\sigma_1 - 3C_1) \cdot v_1 + v_1 \frac{d\sigma_1}{dy} - \frac{dv_1}{dx} \right] dy \right\},$$

$$\dots \dots \dots \rho_1 = e^{-\int a dy} \left\{ \Delta_{(\pi-1):x} + \int e^{\int a dy} \left[ 2 \gamma_1 \tau_1 + (a\sigma_1 - (\pi-2)C_1) \cdot \sigma_1 + \sigma_1 \frac{d\sigma_1}{dy} - \frac{d\sigma_1}{dx} \right] dy \right\};$$

& pour équation de condition

$$\frac{d'\rho_1}{dx} - \rho_1 \frac{da}{dy} - \gamma_1 \sigma_1 + [(\pi-1)C_1 - a\sigma_1] \rho_1 = 0.$$

(31.) Soit  $\pi = 2, \tau_1 = 0$ , &c. on aura

$$\sigma_1 = e^{-\int^a dy} [\Delta_1 : x + \int e^{\int^a dy} (2\mathcal{C}_1 - 3\int \frac{da}{dx} dy - X_1) dy];$$

& pour équations de condition,

$$\frac{d\sigma_1}{dx} - \sigma_1 \frac{d\sigma_1}{dy} - a(\sigma_1)^2 + \mathcal{C}_1 \sigma_1 - \gamma_1 = 0,$$

$$\frac{d\mathcal{C}_1}{dx} - \int \frac{d^2 a}{dx^2} dy + (\mathcal{C}_1 - \int \frac{da}{dx} dy) \cdot \int \frac{da}{dx} dy - \frac{d\gamma_1}{dy} - a\gamma_1 = 0.$$

Or, comme on peut tirer de la dernière

$$\gamma_1 e^{\int^a dy} = x^2 + \int e^{\int^a dy} \left[ \frac{d\mathcal{C}_1}{dx} - \int \frac{d^2 a}{dx^2} dy + (\mathcal{C}_1 - \int \frac{da}{dx} dy) \cdot \int \frac{da}{dx} dy \right] dy,$$

& qu'on a aussi

$$e^{\int^a dy} \left( \frac{d\sigma_1}{dx} + \sigma_1 \int \frac{da}{dx} dy \right) - \Delta'_1 : x + \int e^{\int^a dy} \left[ \int \frac{d^2 a}{dx^2} dy + X'_1 + \left( \int \frac{da}{dx} dy + X_1 \right) \int \frac{da}{dx} dy \right] dy = 2 \int e^{\int^a dy} \left[ \frac{d\mathcal{C}_1}{dx} - \int \frac{d^2 a}{dx^2} dy + (\mathcal{C}_1 - \int \frac{da}{dx} dy) \cdot \int \frac{da}{dx} dy \right] dy,$$

il est clair que

$$2\gamma_1 = e^{-\int^a dy} \{ 2x^2 - \Delta'_1 : x + \int e^{\int^a dy} \left[ \int \frac{d^2 a}{dx^2} dy + X'_1 + \left( \int \frac{da}{dx} dy + X_1 \right) \int \frac{da}{dx} dy \right] dy \} + \frac{d\sigma_1}{dx} + \sigma_1 \int \frac{da}{dx} dy,$$

$$\text{Mais } 2\mathcal{C}_1 = \frac{d\sigma_1}{dy} + a\sigma_1 + 3\int \frac{da}{dx} dy + X_1;$$

en substituant ces deux valeurs de  $\mathcal{C}_1$  &  $\gamma_1$  dans la première équation de condition, elle deviendra

$$\begin{aligned} & \frac{d\sigma_1}{dx} - \sigma_1 \frac{d\sigma_1}{dy} - a(\sigma_1)^2 + \sigma_1 \left( 2\int \frac{da}{dx} dy + X_1 \right) = (q) \dots \\ & \dots e^{-\int^a dy} \{ 2x^2 - \Delta'_1 : x + \int e^{\int^a dy} \left[ X'_1 + \int \frac{d^2 a}{dx^2} dy + \left( \int \frac{da}{dx} dy + X_1 \right) \cdot \int \frac{da}{dx} dy \right] dy \} \end{aligned}$$

Pour intégrer celle-ci, nommons  $\Gamma_1 : x, \Gamma_2 : x, \Gamma_3 : x$ , des fonctions de  $x$ , telles que

$$\frac{\Gamma_1 : x}{\Gamma_1 : x} + 2 \frac{f_1 : x}{f_1 : x} = X_1, \Gamma_2 : x + \Gamma_1 : x \Gamma_3 : x = 0,$$

$$\frac{\Gamma_3 : x}{f_1 : x} = q e^{\int a dy} - \int e^{\int a dy} \left( \frac{dq}{dy} + a q \right) dy = 2x2 - \Delta_1 : x;$$

on aura pour intégrale complète,

$$s - r \sigma_1 + \Theta : (S - R \sigma_1) = 0, \text{ où } r = R \Gamma_1 : x,$$

$$s = S \Gamma_1 : x + \Gamma_2 : x - \Gamma_1 : x \int R dy, R = e^{\int a dy} f_1 : x,$$

$$S = \Gamma_3 : x + f_1 : x \int e^{\int a dy} \left( X_1 + \int \frac{da}{dx} dy \right) dy - f_1 : x \int e^{\int a dy} dy.$$

Ainsi toutes les valeurs de  $\mathcal{C}_1$ , qu'on pourra tirer de l'équation précédente, étant substituées dans

$$\frac{dz}{dx} + z \frac{dz}{dy} + az^2 + \mathcal{C}_1 z + e^{-\int a dy} \left\{ x2 + \int e^{\int a dy} \left[ \frac{d\mathcal{C}_1}{dx} - \int \frac{da}{dx} dy + (\mathcal{C}_1 - \int \frac{da}{dx} dy) \cdot \int \frac{da}{dx} dy \right] dy \right\} = 0,$$

donneront autant d'équations, qui auront pour intégrale complète.

$$mz + n + F : (Mz^2 + Nz + P) = 0, \text{ où } m = M^{\frac{1}{2}} \varphi_1 : x,$$

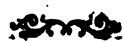
$$n = \frac{N}{2} M^{-\frac{1}{2}} \varphi_1 : x + \frac{\varphi_2 : x}{2} - \varphi_1 : x \int M^{\frac{1}{2}} dy, M = e^{2 \int a dy} f_1 : x,$$

$$N = e^{\int a dy} \left[ f_2 : x + 2 f_1 : x \int e^{\int a dy} \left( \mathcal{C}_1 - \int \frac{da}{dx} dy \right) dy - f_1 : x \int e^{\int a dy} dy \right],$$

$$P = f_3 : x + \int \left( \frac{N}{m} \frac{dx}{dy} + 2 \sigma_1 e^{2 \int a dy} f_1 : x \frac{\varphi_1 : x}{\varphi_1 : x} \right) dy,$$

$$\frac{\varphi_2 : x}{2 \varphi_1 : x (f_1 : x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{f_2 : x}{f_1 : x} = \Delta_1 : x, \frac{f_2 : x}{2 f_1 : x} = x2, \&c.$$

Mais, quoi qu'il en soit des nouveaux cas d'intégrabilité qu'on pourra tirer de cette supposition plus générale, quoi qu'encore très-limitée, les formules précédentes offrent une méthode d'approximation assez étendue, que nous détaillerons dans un Mémoire particulier.



## M É M O I R E

• S U R

## L'OBLIQUITÉ DE L'ÉCLIPTIQUE,

*Déterminée par les Observations faites à l'Observatoire royal de Paris, depuis 1739 jusqu'en 1778.*

Par M. CASSINI le Fils.

Lu  
le 29 Août  
1778.

L'OBLIQUITÉ de l'Écliptique est un des élémens de l'Astronomie sur lesquels on a le plus écrit & publié un plus grand nombre d'Observations : il n'y a presque point d'Observateur qui ne se soit occupé de cette recherche ; néanmoins nous ne sommes pas encore entièrement d'accord sur la grandeur absolue de cet angle, ni sur les variations qu'il peut éprouver.

Tant qu'il n'a été question que de déterminer cette obliquité à la minute, rien n'étoit plus facile ; mais depuis que nos instrumens & notre manière d'observer se sont perfectionnés, au point de nous permettre d'aspirer à la précision des secondes, il n'en a plus été de même : en s'approchant de la vérité, on a vu naître les difficultés & augmenter l'incertitude ; c'est ce qui aura toujours lieu en Astronomie : plus nous approcherons des bornes, plus nous trouverons d'obstacles pour les atteindre, plus nous nous apercevrons de leur distance ; & si quelque jour nous nous flattons d'y être arrivés, nous ne devons sans doute ce prétendu succès qu'au manque de moyens d'apercevoir ce qui nous reste encore à parcourir, & ce que les siècles à venir rendront un jour plus sensible.

Ce n'est sans doute à dater que depuis une quarantaine d'années que l'on peut regarder comme susceptibles d'une certaine exactitude les Observations faites pour déterminer l'obliquité absolue de l'écliptique. En effet, ce n'est guère que vers cette époque, qu'on a apporté à la construction des

instrumens & à leur division un soin, une adresse & un scrupule capables de leur donner toute la précision requise : c'est donc de préférence aux Observations faites dans ces derniers temps qu'il faut s'en tenir pour déterminer l'élément dont il est question.

Quant à la variation qui paroît avoir lieu dans la grandeur de cette obliquité, c'est une quantité si petite, que non-seulement il faut un grand nombre d'années pour qu'elle devienne sensible, mais encore pour être exactement déterminée, il faut que les Observations que l'on compare entre elles aient un même degré de précision ; ce qui fait que pour cette détermination, nous ne pouvons pas tirer un grand avantage de la comparaison des Observations anciennes avec les nôtres, & qu'il faut s'en tenir encore à ces dernières : or nous ne dissimulerons pas que quelque bien faites qu'on les suppose, elles sont encore trop peu nombreuses, & ne peuvent donner qu'un à peu-près dans la présente recherche. Quoi qu'il en soit, j'ai pensé qu'il seroit toujours intéressant de connoître ce qui résulte de ces quarante années d'Observations, faites avec le plus grand soin, dans un même lieu, par les mêmes instrumens, presque toutes par le même Observateur, ou par d'autres qui avoient la même manière d'observer : cette identité dans tous les points doit certainement donner une grande présomption de l'exactitude des résultats.

Mon père a déjà rapporté dans plusieurs Mémoires de l'Académie, & M. le Gentil dans le Volume de 1757, les hauteurs solsticiales du Soleil, observées à l'Observatoire royal en diverses années, avec leurs résultats. J'ai entrepris de rassembler toutes ces Observations, de les recalculer, d'y ajouter toutes celles que j'ai trouvées dans les registres originaux & qui n'ont pas été publiées, de les comparer toutes ensemble, & de former de leurs résultats différens tableaux qui ne pourront manquer d'être intéressans pour les Savans, en les mettant à portée de prendre connoissance d'un seul coup-d'œil des travaux faits sur cette matière, & de fixer leur opinion.

Pour rendre l'inspection de ces Tables plus instructive, j'ai pensé qu'il ne suffisoit pas de présenter les résultats isolés, & de marquer, par exemple, qu'en telle année l'obliquité de l'écliptique a été trouvée de telle quantité. Les circonstances n'étant pas toujours les mêmes, ni également favorables, la connoissance de ces circonstances devient aussi importante que les résultats même : on trouvera donc à côté de chaque résultat tout ce qui peut concourir à faire juger si le résultat est exact ou douteux.

J'ai divisé ce Mémoire en quatre articles.

## S. I.

*De l'obliquité de l'Écliptique, déduite de l'Observation des hauteurs méridiennes du Soleil vers le Solstice d'été.*

LES hauteurs méridiennes du Soleil, prises au mois de Juin, plusieurs jours avant & plusieurs jours après celui du solstice, sont les plus favorables lorsqu'elles sont faites avec l'attention requise & avec de grands instrumens, pour déterminer l'obliquité absolue de l'écliptique. Le Soleil, sous la latitude de Paris, ayant alors près de 65 degrés de hauteur, n'est point sujet à l'irrégularité de la réfraction qui a lieu plus proche de l'horizon ; & cette réfraction, à la hauteur de 65 degrés, est bien déterminée.

Depuis l'année 1739 jusqu'en l'année 1748, on a employé à l'Observatoire pour l'Observation des hauteurs solsticiales, un secteur de 6 pieds de rayon, fait par Langlois à l'occasion de la vérification de la méridienne : la bonté de cet instrument a été reconnue dans toutes les opérations nombreuses auxquelles on l'a employé.

En 1743, on commença à faire usage plus particulièrement d'un excellent quart-de-cercle de 6 pieds, armé de deux lunettes, fixées l'une à l'extrémité du limbe, & l'autre vers le 49.<sup>e</sup> : c'est de cet instrument, fait avec toute l'habileté & le soin dont étoit capable le sieur Langlois, dont on s'est servi sans discontinuité jusqu'à ce jour, employant tantôt

une lunette & tantôt l'autre, la face du limbe étant tournée tantôt vers l'Orient & tantôt vers l'Occident, ce qui procure les vérifications les plus complètes pour la correction des hauteurs. J'ai eu soin de marquer dans la Table suivante de quelle lunette on s'est servi dans chaque Observation, & l'angle de cette lunette tel qu'on l'a vérifié ou supposé, & de plus le sens dans lequel l'instrument étoit tourné, afin que si l'on exige une parfaite identité dans les Observations que l'on voudra comparer, on puisse ne choisir que celles qui ont été faites à la même lunette, avec le même micro-mètre, & l'instrument tourné dans le même sens.

Les élémens que j'ai employés dans le calcul de l'obliquité de l'écliptique, rapportés dans la Table suivante, sont ceux-ci.

Réfraction.....	—	0 <sup>d</sup>	0'	27",0.
Parallaxe.....	+	0.	0.	3.4.
Demi-diamètre.....	—	0.	15.	47,2.
Hauteur de l'Équateur.....		41.	9.	48.

De sorte que la somme de ces élémens est de 41<sup>d</sup> 25' 58",8; quantité constante qu'il faut retrancher de la hauteur solsticielle du bord supérieur du Soleil, pour avoir l'obliquité de l'écliptique apparente.

Les années marquées par une étoile, sont celles où le temps n'a pas été favorable, ou bien dans lesquelles les observations ont été peu d'accord entr'elles.

La Lettre *H* indique la Lunette qui est fixée à l'extrémité du limbe.

La Lettre *M* indique celle qui est fixée vers le 49.<sup>e</sup> degré.

488 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
TABLE I.

ANNÉES.	NOMBRE des OBSERVATIONS.	DIFFÉRENCE du plus petit au plus grand RÉSULTAT.	LUNETTE avec laquelle on a observé le LIMBE de l'instrument, faisant face à l'ORIENT ou à l'OCCIDENT.	ANGLE de la LUNETTE vérifié ou supposé.	HAUTEUR solaire du bord supérieur du SOLEIL.	OBLIQUITÉ de L'ÉCLIPTIQUE		
						APPARENTE.	NOTATION	VÉR.
						Deg. Min. Sec.	Second.	Deg. M.
1739 <sup>a</sup>	5	2,9		26. 23. 2,2 vér.	66. 39. 27,8	23. 28. 20,0	+ 5,0	23. 28
1740	2	5,8		26. 23. 9,0 vér.	64. 54. 25,9	23. 28. 26,6	+ 2,2	23. 28
1741 <sup>a</sup>	9	17,0		26. 23. 5,9 vér.	64. 54. 31,7	23. 28. 32,9	— 0,6	23. 28
1742	7	6,3		26. 23. 9,2 vér.	64. 54. 24,8	23. 28. 26,0	— 3,6	23. 28
1743 <sup>a</sup>	4	4,8		26. 23. 18,6 vér.	64. 54. 35,9	23. 28. 37,1	— 6,2	23. 28
1748 <sup>a</sup>	12	18,2		26. 23. 6,6 vér.	64. 54. 28,4	23. 28. 29,6	— 5,7	23. 28
1743	7	5,7	M. occid.	49. 25. 36,6 vér.	64. 54. 29,4	23. 28. 30,6	— 6,1	23. 28
1744	3	6,5	M. occid.	49. 25. 37,8 vér.	64. 54. 34,7	23. 28. 29,8	— 7,9	23. 28
	9	10,8	M. orient.		64. 54. 22,6	23. 28. 29,8	— 7,9	23. 28
1745 <sup>a</sup>	6	7,1	H. orient.	90. 0. 59,4 sup.	64. 54. 14,8	23. 28. 16,0	— 8,9	23. 28
1746	5	2,6	H. orient.	90. 1. 0, vér.	64. 54. 17,8	23. 28. 19,0	— 8,8	23. 28
1747	7	4,6	H. orient.	90. 1. 2,5 sup.	64. 54. 22,0	23. 28. 23,2	— 7,7	23. 28
1748	3	4,3	H. orient.	90. 1. 2,5 vér.	64. 54. 12,0	23. 28. 16,3	— 5,7	23. 28
	3	4,4	M. orient.	49. 25. 45,8 sup.	64. 54. 14,5	23. 28. 16,3	— 5,7	23. 28
	4	3,8	H. occid.	90. 1. 2,5 vér.	64. 54. 21,1	23. 28. 16,3	— 5,7	23. 28
1749 <sup>a</sup>	5	10,3	H. orient.	90. 0. 54 sup.	64. 54. 4,8	23. 28. 6,0	— 3,8	23. 28
1750	6	3,5	H. orient.	99. 00. 54,6 vér.	64. 54. 10,5	23. 28. 12,4	— 0,1	23. 28
	2	1,9	M. orient.	49. 25. 37,6 vér.	64. 54. 12,0	23. 28. 12,4	— 0,1	23. 28
1751	9	6,7	M. orient.	49. 25. 40,4 sup.	64. 54. 8,0	23. 28. 9,2	+ 2,8	23. 28
1752 <sup>a</sup>	11	13,1	M. orient.	49. 25. 42,9 vér.	64. 53. 57,2	23. 27. 58,4	+ 5,4	23. 28
1753	10	7,0	M. orient.	49. 25. 43,5 vér.	64. 53. 52,5	23. 27. 53,7	+ 7,5	23. 28
1754	7	7,1	M. orient.	49. 25. 40,5 sup.	64. 53. 53,1	23. 27. 54,3	+ 8,7	23. 28
1755	7	2,6	M. orient.	49. 25. 37,5 vér.	64. 53. 56,8	23. 27. 58,0	+ 8,9	23. 28
1756	11	5,8	M. orient.	49. 25. 37,5 sup.	64. 53. 59,5	23. 28. 0,7	+ 8,1	23. 28
1758 <sup>a</sup>	7	8,6	H. orient.	90. 1. 0,0 sup.	64. 54. 9,6	23. 28. 10,8	+ 3,9	23. 28
1763	2	0,1	H. orient.	90. 1. 0,0 sup.	64. 54. 25,0	23. 28. 26,2	— 8,4	23. 28
1764 <sup>a</sup>	8	12,0	H. orient.	90. 1. 1,0 sup.	64. 54. 22,0	23. 28. 23,2	— 9,0	23. 28
1765	4	1,3	H. orient.	90. 1. 1,0 sup.	64. 54. 25,0	23. 28. 26,2	— 8,5	23. 28
1766	3	3,2	H. orient.	90. 1. 1,0 sup.	64. 54. 13,0	23. 28. 14,2	— 7,0	23. 28
1767	5	6,5	H. orient.	90. 1. 1,0 sup.	64. 54. 14,0	23. 28. 15,2	+ 4,8	23. 28
1770 <sup>a</sup>	3	4,0	H. orient.	90. 1. 1,0 sup.	64. 53. 59,0	23. 28. 0,2	+ 3,9	23. 28
1771 <sup>a</sup>	3	5,0	H. orient.	90. 1. 1,0 sup.	64. 54. 3,2	23. 28. 4,4	+ 6,3	23. 28
1772	4	4,1	H. orient.	90. 1. 2,0 sup.	64. 53. 46,7	23. 27. 47,9	+ 8,1	23. 27
1773	3	2,5	H. orient.	90. 1. 2,0 sup.	64. 53. 46,9	23. 27. 48,1	+ 8,9	23. 27
1774 <sup>a</sup>	7	7,4	H. orient.	90. 1. 2,0 vér.	64. 53. 46,5	23. 27. 47,7	+ 8,7	23. 27
1775	5	9,4	H. orient.	90. 1. 2,0 sup.	64. 53. 40,8	23. 27. 42,0	+ 7,6	23. 27
1776	5	3,0	H. orient.	90. 1. 2,0 sup.	64. 53. 51,1	23. 27. 52,3	+ 5,6	23. 27
1777	8	4,6	H. orient.	90 <sup>b</sup> 1. 20,0 vér.	64. 53. 49,0	23. 27. 50,2	+ 2,9	23. 27
1778	8	4,2	M. orient.	49. 25. 46,5 vér.	64. 53. 54,0	23. 27. 55,2	+ 0,0	23. 27

<sup>a</sup> A Bourges.

<sup>b</sup> L'angle des Lunettes a été altéré cette année-ci par le transport de l'instrument qu'il a fallu dépla-  
cer à l'occasion de la reconstruction des Cabinets.

Auparav



Auparavant de comparer entr'eux les résultats de la Table précédente, il faut nécessairement faire un choix, n'admettre que ceux qui peuvent avoir le degré d'exactitude requise pour une recherche si délicate, & rejeter tous les autres; c'est ce qu'il est très-facile de faire, d'après l'inspection même de la Table. En effet, j'ai eu soin de rapporter dans une colonne particulière le nombre des Observations qui ont concouru à donner chaque résultat moyen, & il est très-certain que plus le nombre des Observations a été grand, plus le résultat doit être exact: toute année où il y a eu moins de quatre Observations, ne me semble pas devoir concourir à la détermination précise de l'élément cherché; car le grand nombre d'Observations que ce travail m'a mis dans le cas de comparer, m'a fait reconnoître qu'il est très-possible que trois Observations, même d'accord ensemble, donnent un résultat éloigné du véritable de 4 & 5 secondes.

De plus, le nombre des Observations ne suffit pas à connoître pour faire juger de l'exactitude du résultat; tout dépend de leur accord: c'est aussi ce qui m'a engagé à marquer à côté du nombre des Observations la différence entre les deux plus éloignées; ce qui fait connoître tout de suite si les Observations ont été d'accord entr'elles. Il m'a paru que l'on pouvoit adopter ici cette règle; que pour constituer un bon résultat, il faut que les deux extrêmes, ou la quantité de secondes dont le plus petit diffère du plus grand, soit moindre que le nombre des Observations. D'après ces principes, la Table générale se trouve réduite à celle-ci, qui ne renferme que les résultats les plus exempts d'incertitude, c'est-à-dire qui nous paroissent déduits des Observations faites dans les circonstances les plus favorables & les plus propres à mériter la confiance.

T A B L E I I.

ANNÉES.	OBLIQUITÉ vraie DE L'ÉCLIPTIQUE.					
	Deg.	Min.	Second.	Deg.	Min.	Sec.
1739.	23.	28.	25,6	}	23.	28. 26.
1740.	23.	28.	28,0			
1742.	23.	28.	22,4			
1743.	23.	28.	24,5			
1744.	23.	28.	21,9			
1750.	23.	28.	12,3	}	23.	28. 8.
1751.	23.	28.	12,0			
1755.	23.	28.	6,9			
1756.	23.	28.	8,8			
1772.	23.	27.	56,0			
1773.	23.	27.	57,0	}	23.	27. 54.
1774.	23.	27.	56,4			
1776.	23.	27.	57,9.			
1777.	23.	27.	53,1			
1778.	23.	27.	55,2			

S. I I.

*De l'obliquité de l'Écliptique , déduite des Observations  
des hauteurs méridiennes du Soleil vers le Solstice d'hiver.*

On ne doit point s'attendre à trouver la même précision  
dans le résultat des Observations faites au solstice d'été & au

solstice d'hiver. La hauteur méridienne du Soleil vers le 21 Décembre, n'est, sous la latitude de Paris, que de 18 degrés; & à cette hauteur & dans cette saison, la réfraction éprouve souvent de grandes variations d'un moment à l'autre : la quantité de cette réfraction ne peut donc être bien déterminée, & l'incertitude de cet élément peut influencer sensiblement sur l'obliquité de l'écliptique qu'on déduit des hauteurs solsticiales d'hiver; d'ailleurs le mauvais temps qui règne ordinairement vers la fin de Décembre, ne permet d'avoir qu'un petit nombre d'Observations; j'ai trouvé néanmoins un plus grand accord dans les résultats que je n'aurois osé l'espérer.

Toutes les Observations rapportées dans la Table suivante ont été faites au même quart-de-cercle mobile de 6 pieds & avec la même lunette, celle qui est fixée à l'extrémité du limbe. A l'obliquité de l'écliptique, déduite des hauteurs solsticiales observées en hiver, j'ai joint celle qui résulte de la comparaison des hauteurs observées dans les deux solstices d'hiver & d'été.

J'ai supposé dans le calcul,

La réfraction de.....	— 0 <sup>d</sup> 2' 53",5.
La parallaxe.....	+ 0. 0. 8,1.
Le demi-diamètre.....	— 0. 16. 19,3.

Ainsi l'on aura 0<sup>d</sup> 19' 4",7 pour quantité constante à retrancher de toutes les hauteurs solsticiales du bord supérieur du Soleil : le reste étant retranché de la hauteur de l'Équateur, donnera l'obliquité apparente.

## TABLE III. Au solstice d'Hiver.

ANNÉES.	NOMBRE des OBSERVATIONS.	DIFFÉRENCE du plus petit au plus grand RÉSULTAT.	ANGLE de la LUNETTE vérifié ou supposé.	HAUTEUR solfstiale du bord supérieur du SOLEIL.	OBLIQUITÉ de L'ÉCLIPTIQUE			OBLIQUITÉ vraie, déduite de la comparaison des solstices d'hiver & d'été.
					APPARENTE.	NUTATION.	VRAIE.	
		Second.	Deg. Min. Sec.	Deg. Min. Sec.	Deg. Min. Sec.	Sec.	Deg. Min. Sec.	Deg. Min. Sec.
1743	5	1,8	90. 0. 58,5 <i>vér.</i>	18. 0. 18,9	23. 28. 33,5	— 7,1	23. 28. 26,7	23. 28. 25,6
1744	6	8,6	90. 1. 0, <i>sup.</i>	18. 0. 17,7	23. 28. 35,0	— 8,5	23. 28. 26,5	23. 28. 24,7
1745*	3	6,1	90. 1. 0, <i>sup.</i>	18. 0. 17,7	23. 28. 35,0	— 8,9	23. 28. 26,1	23. 28. 16,3
1746	4	4,6	90. 1. 0, <i>vér.</i>	18. 0. 17,8	23. 28. 35,0	— 8,3	23. 28. 26,6	23. 28. 18,4
1748	5	7,4	90. 1. 8, <i>vér.</i>	18. 0. 17,8	23. 28. 34,9	— 4,5	23. 28. 30,4	23. 28. 26,5
1749	5	5,2	90. 1. 8, <i>sup.</i>	18. 0. 21,0	23. 28. 31,7	— 1,6	23. 28. 30,1	23. 28. 16,5
1750	4	2,4	90. 0. 52, <i>vér.</i>	18. 0. 34,3	23. 28. 18,4	+ 1,3	23. 28. 19,7	23. 28. 16,5
1752	4	4,8	90. 0. 53, <i>vér.</i>	18. 0. 35,9	23. 28. 16,8	+ 6,6	23. 28. 23,4	23. 28. 13,6
1753	7	3,1	90. 0. 53, <i>sup.</i>	18. 0. 42,7	23. 28. 10,0	+ 8,2	23. 28. 18,2	23. 28. 9,5
1754*	7	10,1	90. 1. 1, <i>sup.</i>	18. 0. 42,0	23. 28. 10,7	+ 8,9	23. 28. 19,6	23. 28. 11,3
1763*	5	11,3	90. 1. 1, <i>sup.</i>	18. 0. 38,6	23. 28. 14,1	— 8,8	23. 28. 5,3	23. 28. 11,5
1764*	3	5,8	90. 1. 1, <i>sup.</i>	18. 0. 37,9	23. 28. 14,8	— 8,7	23. 28. 6,1	23. 28. 10,1
1765	1	0,0	90. 1. 1, <i>sup.</i>	18. 0. 42,0	23. 28. 10,7	— 7,9	23. 28. 2,8	23. 28. 10,2
1766	5	5,5	90. 1. 1, <i>sup.</i>	18. 0. 39,5	23. 28. 13,2	— 6,0	23. 28. 7,0	23. 28. 7,1
1767*	5	10,8	90. 1. 1, <i>sup.</i>	18. 0. 46,6	23. 28. 6,1	— 3,4	23. 28. 2,7	23. 28. 6,5
1768	1	0,0	90. 1. 1, <i>sup.</i>	18. 0. 49,4	23. 28. 3,3	— 0,5	23. 28. 2,8	
1770	1	0,0	90. 1. 1, <i>sup.</i>	18. 0. 49,8	23. 28. 2,9	+ 5,2	23. 28. 8,1	23. 28. 6,2
1772*	4	7,9	90. 1. 2, <i>sup.</i>	18. 0. 50,7	23. 28. 2,0	+ 8,6	23. 28. 10,6	23. 28. 0,3
1773	3	4,4	90. 1. 2, <i>sup.</i>	18. 0. 46,4	23. 28. 6,3	+ 8,9	23. 28. 15,2	23. 28. 6,1
1774*	6	11,9	90. 1. 2, <i>vér.</i>	18. 0. 48,0	23. 28. 4,7	— 8,3	23. 28. 11,0	23. 28. 3,5
1775	4	6,5	90. 1. 2, <i>sup.</i>	18. 1. 7,0	23. 27. 45,7	+ 8,6	23. 27. 52,3	

Le choix entre les résultats que renferme la Table précédente est d'autant plus difficile à faire, qu'il y a presque toujours eu un très-petit nombre d'Observations, & que la différence des résultats extrêmes a presque toujours égalé & même surpassé ce nombre des Observations; mais ce qui doit le plus décider en faveur de l'exactitude de l'obliquité de

l'écliptique ci-dessus rapportée, c'est lorsqu'elle se trouve conforme ou à peu-près la même que celle qui a été conclue des Observations faites au solstice d'été : or on rencontre plus d'une fois cette conformité, comme le prouve l'inspection de la petite Table suivante.

TABLE IV.

ANNÉES.	OBLIQUITÉ DE L'ÉCLIPTIQUE VRAIE.					
	PAR LE SOLSTICE D'ÉTÉ.			PAR LE SOLSTICE D'HIVER.		
	Deg.	Min.	Sec.	Deg.	Min.	Sec.
1743.	23.	28.	24,5	23.	28.	26,7
1744.	23.	28.	21,9	23.	28.	26,5
1766.	23.	28.	7,2	23.	28.	7,0
1770.	23.	28.	4,1	23.	28.	8,1
1771.	23.	28.	10,7			
1772.	.....			23.	28.	10,6
1775.	23.	28.	49,6	23.	28.	52,3

## S. III.

*Des variations de l'obliquité de l'Écliptique, déterminées à différentes époques.*

Tous les résultats précédens concourent à faire reconnoître une diminution réelle & sensible dans l'obliquité de l'écliptique depuis 1739 jusqu'à ce jour : en vain objecteroit-on l'erreur des Observations, elle ne peut être aussi considérable ; on s'est toujours servi du même instrument : d'ailleurs, seroit-il possible que les erreurs fussent toujours dans le même sens &

donnassent toujours une obliquité décroissante aussi uniformément que le présente la Table II & la dernière colonne de la Table III?

Je me crois fondé, d'après le grand nombre des Observations, leur accord & toutes les circonstances faites pour inspirer la confiance, de regarder comme déterminée aussi exactement qu'on puisse le faire l'obliquité de l'écliptique vers 1739, de  $23^{\text{d}} 28' 26''$ , & vers ces dernières années-ci, de  $23^{\text{d}} 27' 54''$  : cette obliquité auroit donc diminué, dans un intervalle de trente-neuf ans, d'environ une demi-minute ou 32 secondes.

Dans les années 1755 & 1756, les Observations furent très-nombreuses, eurent le plus grand accord, & dûrent par conséquent donner un résultat très-exact. Si donc je compare ce résultat avec ceux de 1739 & 1778, je trouve que

de 1739 à 1755, c'est-à-dire en 16 ans, la diminution a été de  $18''$ , & de 1755 à 1778, c'est-à-dire en 23 ans, elle n'a été que de  $14''$ .

ce qui sembloit indiquer que cette diminution de l'obliquité n'a pas une marche égale, comme mon père l'avoit déjà remarqué.

Il seroit inutile de comparer des Observations moins éloignées, puisque plus les intervalles seront petits, moins la variation sera sensible, & plus alors elle sera dans le cas d'être affectée des erreurs de l'Observation. J'ai pris les trois époques de 1739, 1755 & 1778, parce qu'il me semble qu'il n'est pas possible de donner une plus grande exactitude & un plus grand accord qu'il y en a eu dans les Observations faites en ces trois années.

M. le Chevalier de Louville, dans le Volume de nos Mémoires, année 1721, page 167, rapporte trois Observations de hauteurs méridiennes du Soleil, prises le 20, le 22 & le 23 Juin de la même année : ces trois Observations donnent, par un milieu, l'obliquité de l'écliptique apparente de  $23^{\text{d}} 28' 12'',6$ , & la vraie  $23^{\text{d}} 28' 9'',3$ . (On se doute bien que j'ai recalculé ces Observations avec les mêmes élémens que ceux dont je me suis servi ci-dessus.) Or si l'on

compare cette obliquité de l'écliptique, trouvée par les Observations de M. le Chevalier de Louville, avec celle qui résulte des Observations faites à l'Observatoire royal, on trouvera que

de 1721 à 1739, c'est-à-dire au bout de 18 ans, l'obliquité s'est trouvé augmentée de 16 secondes,

de 1721 à 1755, c'est-à-dire au bout de 34 ans, l'obliquité n'auroit eu aucune variation, ou du moins retrouvé la même;

de 1721 à 1778, c'est-à-dire au bout de 57 ans, l'obliquité a diminué de 15 secondes.

L'inégalité de pareils résultats qui ne peuvent être raisonnablement admis, ne me sert ici qu'à prouver combien il est essentiel dans la présente recherche de ne comparer que les Observations susceptibles d'un même degré d'exactitude: M. le Chevalier de Louville observoit avec un quart-de-cercle probablement de 2 ou 3 pieds; la lunette à la vérité étoit armée d'un micromètre, mais ce quart-de-cercle n'étoit sûrement pas aussi bien divisé que le sont aujourd'hui les nôtres; son micromètre n'étoit sans doute pas aussi bien exécuté: d'ailleurs sur les trois seules Observations qu'il rapporte, il y a 8 secondes de différence entre les résultats extrêmes. Il n'y a donc aucune exactitude à attendre de la comparaison de pareilles Observations avec les nôtres, faites pendant un intervalle de trente-neuf ans, pour la plupart en très-grand nombre & avec beaucoup d'accord entr'elles, toujours avec le même instrument de six pieds de rayon, le mieux exécuté qui soit sorti des mains du célèbre Langlois. Nous nous épargnerons donc de faire un plus grand nombre de comparaisons qui ne pourroient nous mener à des résultats suffisamment exacts; nous ne donnerons même à ceux que nous avons tirés de nos propres Observations que le degré de confiance dont ils sont susceptibles, en attendant du temps leur confirmation ou leur rectification.

## S. I V.

*Des variations de l'obliquité de l'Écliptique, déterminées par la comparaison du Soleil dans le Solstice, à des Étoiles voisines du Tropique.*

Une des meilleures méthodes sans doute pour déterminer les variations de l'obliquité de l'écliptique, est de comparer la distance du Soleil dans le Tropique à quelque point fixe pris dans le ciel, & ce point est une Étoile dont on prend exactement la hauteur, ainsi que celle du Soleil.

Ce moyen a cet avantage, que nous pouvons comparer avec un peu plus de confiance nos Observations actuelles avec les Observations plus anciennes, parce que la différence de la perfection des instrumens influe moins sur cette détermination que sur les autres.

Dans cette vue, on avoit toujours eu soin à l'Observatoire de comparer le Soleil dans le solstice d'été à la belle étoile *Arcturus*, qui ne se trouve éloignée du Tropique que d'environ 3 degrés  $\frac{1}{3}$ ; mais lorsqu'on se fut aperçu qu'*Arcturus* avoit un mouvement particulier, & ne pouvoit plus par conséquent être regardé comme un point fixe dans le ciel, il fallut chercher une autre étoile, & mon père choisit celle de  $\beta$  d'Hercule, qui est de la troisième grandeur, qui ne paroît avoir aucun mouvement particulier, & qui se trouve même plus proche du Tropique qu'*Arcturus*. Il n'y a que quelques années que l'on s'est adonné à observer cette étoile; je m'y suis particulièrement appliqué au dernier solstice; & par un milieu entre sept Observations parfaitement d'accord, j'ai trouvé

La hauteur apparente de  $\beta$  d'Hercule..... 63<sup>d</sup> 9' 29",5.

La hauteur du bord supérieur du Soleil..... 64 53. 54,7.

Donc la distance apparente du bord supérieur  
du Soleil dans le solstice, à l'étoile en 1778.. 1. 44. 25,2.

Or



Or j'ai trouvé dans les Registres originaux de l'Observatoire, une pareille comparaison du Soleil & de  $\beta$  d'Hercule, faite au temps du solstice en 1689.

Par un milieu entre six observations très-d'accord entr'elles, hauteur solsticielle du bord supérieur du Soleil.....	64 <sup>d</sup> 56' 13 <sup>''</sup> .7.
Hauteur apparente de $\beta$ d'Hercule.....	63. 23. 30. 9
Donc distance du bord supérieur du Soleil à l'Étoile en 1689.....	1. 32. 43.7.
Nous l'avons trouvée en 1778.....	1. 44. 25.2.
La différence est de.....	0. 11. 41.5.
Qui, ayant égard à la différence des effets de la nutation dans les deux années, se réduit à..	0. 11. 43.9.
Mais par son mouvement de précession, que pour plus d'exactitude j'ai calculé de vingt ans en vingt ans, la déclinaison ou la hauteur de $\beta$ d'Hercule a dû diminuer en quatre-vingt-neuf ans, de.....	0. 12. 40.4.
Reste donc pour la quantité dont le bord supérieur du Soleil s'est rapproché de l'Étoile en quatre-vingt-neuf ans.....	0. 0. 56.5.

En 1681, M. Picard (*voy. Hist. Céleste de M. le Monnier*) observa le 19 & le 21 Juin, la hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil; d'où l'on conclut, en donnant la préférence à l'observation du 19, qui est marquée *bonne*,

La hauteur solsticielle.....	64 <sup>d</sup> 55' 12 <sup>''</sup> .
La hauteur de $\beta$ d'Hercule, observée le 14 Juillet, fut trouvée de.....	63. 24. 0.
Donc distance du bord supérieur du Soleil à l'Étoile en 1681.....	1. 31. 12.
Nous l'avons trouvée en 1778.....	1. 44. 25.2.
La différence est.....	0. 13. 13.2.
Qui, ayant égard à la différence des effets de la nutation dans les deux époques, se réduit à..	0. 13. 15.5.
Mém. 1778.	R r r

# 498 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Mais par son mouvement de précession, l'Étoile a dû se rapprocher de l'Équateur en quatre-vingt-dix-sept ans..... 0<sup>d</sup> 13' 50<sup>''</sup>,5.

Reste donc pour la quantité dont le bord du Soleil s'est rapproché de l'Étoile en quatre-vingt-dix-sept ans..... 0. 0. 35,0.

Enfin on trouve une comparaison encore plus ancienne du Soleil & de  $\beta$  d'Hercule, faite par M. Picard en 1669: cet Astronome observa les 19, 20 & 21 Juin, les hauteurs méridiennes du Soleil, qui donnent par un milieu,

La hauteur solsticiale du bord supérieur du Soleil..	64 <sup>d</sup> 52' 57 <sup>''</sup> 6.
Hauteur méridienne de $\beta$ d'Hercule.....	63. 23. 0.
Distance du bord du Soleil à l'Étoile en 1669.	1. 29. 57,6.
Nous l'avons trouvée en 1778.....	1. 44. 25,2.
La différence est de.....	0. 14. 27,6.

Il n'est pas nécessaire de corriger la différence des effets de la nutation, qui ont été les mêmes quant à leur somme dans les deux époques.

Or par son mouvement de précession, l'Étoile a dû se rapprocher de l'Équateur, en cent neuf ans, de.. 15' 34<sup>''</sup>

Reste donc pour la quantité dont le Soleil s'est rapproché de l'Étoile en cent neuf ans..... 1. 6,4.

L'observation de 1689, indiqueroit donc une diminution de l'obliquité de l'Écliptique en cent ans, de.. 63<sup>''</sup>.

celle de 1681\*..... 36.

celle de 1669..... 61.

J'aurois désiré pouvoir trouver des Observations plus nombreuses, & même plus anciennes, pour en faire la comparaison

\* J'ai tout lieu de regarder comme douteux le résultat de cette année; outre qu'il s'éloigne considérablement des deux autres, il est à remarquer 1.<sup>o</sup> qu'il n'y a eu qu'une seule Observation du Soleil qui ait

été jugée bonne par l'Observateur; 2.<sup>o</sup> la hauteur de  $\beta$  d'Hercule n'a été prise que vingt jours après le solstice, & à ce qu'il paroît sans intention directe de la comparer au Soleil,

avec les nôtres de ces dernières années, mais je n'en ai point trouvé.

Il est à remarquer que la détermination que j'ai fait cette année de l'obliquité de l'Écliptique, comparée à celle de 1755, donne la diminution de l'obliquité en vingt-trois ans, de 14",

Et par conséquent par siècle, de..... 60".

Il paroît donc que si la supposition que nous avons faite, que l'étoile  $\beta$  d'Hercule n'a aucun mouvement particulier, est véritable, le Soleil s'est rapproché de cette étoile, ou l'obliquité de l'Écliptique a diminué d'environ une minute dans un siècle. Pour confirmer ou rectifier ce résultat, j'ai entrepris de faire usage des Observations d'*Arcturus*, & de chercher ce que nous donneroit la comparaison de cette Étoile au Soleil, en supposant qu'*Arcturus* eût un mouvement particulier, mais connu & déterminé.

Par la comparaison des Observations de Flamsteed & de M. l'Abbé de la Caille, *Arcturus*, de 1690 à 1750, a eu outre son mouvement de précession en déclinaison de 17' 7",2, un mouvement particulier de 2' 13",8, à raison de 22",3 pour dix ans. J'ai rassemblé toutes les Observations de cette Étoile, faites depuis trente-cinq ans à l'Observatoire avec le même instrument ou quart-de-cercle mobile de 6 pieds, à deux lunettes, & j'ai calculé toutes ces Observations, au nombre de deux cents cinquante, que j'ai toutes réduites au 20 Juin de chaque année: il seroit trop long de rapporter ici une suite d'Observations aussi considérable; on la trouvera dans un autre Ouvrage: il me suffira de dire que j'ai trouvé

en 1743, la distance d'*Arcturus* au zénith de

l'Observatoire le 20 Juin..... 28<sup>d</sup> 17' 50".

(vraie mais non corrigée de la réfraction)

Par mes Observations en 1778..... 28. 29. 1,3.

Différence..... 0. 11, 11,3.

Les loix de la précession ne la donnent que de.. 0. 10. 2,1.

Le mouvement propre d'*Arcturus* a donc été en

trente-cinq ans..... 0. 1. 9,2.

Rrr ij

500 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

C'est à raison de 19",8 pour dix ans. L'intervalle de nos Observations à la vérité n'est pas aussi considérable que celui des Observations de Flamsteed & de la Caille; mais les nôtres ont sur celles-ci l'avantage d'avoir été faites dans le même lieu, avec le même instrument, la même lunette & le même micromètre: au reste, je supposerai, par un milieu entre les Observations de Flamsteed, de la Caille & les nôtres, le mouvement particulier d'*Arcturus* en déclinaison de 21 secondes pour dix ans. Cela posé, j'ai pensé qu'on verroit ici avec plaisir une Table de toutes les distances observées d'*Arcturus* au Soleil dans le solstice depuis 1743 jusqu'en 1778; j'y ai joint en même temps les semblables résultats de la comparaison de  $\beta$  de la Baleine au Soleil dans le solstice d'hiver depuis 1748 jusqu'en 1776.

ANNÉES	DISTANCE D'ARCTURUS au bord supér. du SOLEIL.	DISTANCE de $\beta$ de la Baleine au bord supér. du SOLEIL.	ANNÉES	DISTANCE D'ARCTURUS au bord supér. du SOLEIL.	DISTANCE de $\beta$ de la Baleine au bord supér. du SOLEIL.
1743.	3 <sup>d</sup> 12' 12",3		1758.	3 <sup>d</sup> 16' 38",1	
1744.	3. 12. 39,5		1764.	3. 18. 50,0	
1745.	3. 13. 1,2		1765.	3. 19. 19,3	
1746.	3. 13. 15,1		1766.	3. 19. 30,4	3 <sup>d</sup> 55' 32",6
1747.	3. 13. 41,0		1767.	3. 19. 51,3	3. 55. 25,9
1748.	3. 13. 53,0	3 <sup>d</sup> 49' 29",9	1770.	3. 20. 27,6	
1749.	3. 14. 10,8	3. 48. 54,3	1771.	3. 20. 46,6	
1750.	3. 14. 26,3	3. 48. 9,9	1772.	3. 20. 56,2	3. 56. 51,7
1751.	3. 14. 31,4		1773.	3. 20. 57,9	
1752.	3. 14. 47,9	3. 50. 30,8	1774.	3. 21. 37,4	3. 57. 28,0
1753.	3. 14. 52,0		1775.	3. 21. 39,9	
1754.	3. 15. 17,9		1776.	3. 22. 7,9	
1755.	3. 15. 33,0		1778.	3. 22. 45,8	
1756.	3. 15. 49,5				

D'après les résultats que renferme cette Table, si l'on compare les distances d'*Arcturus* au Soleil, déterminées dans les deux années les plus éloignées, on trouve

En 1778..... 3<sup>d</sup> 22' 45",8.

En 1743..... 3. 12. 12,3.

Différence..... 0. 10. 33,5.

Qui, ayant égard à la différence des effets de la nutation sur les hauteurs apparentes du Soleil & de l'Étoile dans les deux époques, se réduit à..... 0. 10. 44,6.

Le mouvement de précession d'*Arcturus* dans l'intervalle des deux années... 10' 2",1 } 0. 11. 15,6.

Le mouvement particulier, à raison de 21 secondes pour dix ans..... 1. 13,5 }

Reste donc pour la quantité dont le Soleil s'est rapproché d'*Arcturus* en trente-cinq ans, ou diminution de l'obliquité..... 0. 0. 31,0.

Par les hauteurs solsticiales, rapportées ci-dessus *Table I.* on trouve cette diminution dans le même intervalle, de..... 0. 0. 29,3.

Pareillement en 1755, la distance d'*Arcturus* au bord solsticial du Soleil..... 3. 15. 33.

Je l'ai trouvée en 1778..... 3. 22. 45,8.

Différence..... 0. 7. 12,8.

Qui, ayant égard à la différence des effets de la nutation, se réduit à..... 0. 7. 9,5.

Le mouvement de précession d'*Arcturus* en vingt-trois années..... 6' 36",0 } 0. 7. 21.

Le mouvement particulier..... 0. 48,3 }

Reste donc pour la quantité dont le Soleil s'est rapproché d'*Arcturus*..... 0. 0. 14,8.

Or j'ai trouvé ci-dessus, par les hauteurs solsticiales absolues, la diminution de l'obliquité de l'Écliptique dans l'intervalle des deux mêmes années, de..... 0. 0. 14.

Cet accord singulier dans le résultat de nos Observations, soit qu'on n'emploie que les hauteurs solsticiales absolues,

soit que l'on ne se serve que de la comparaison du Soleil à une Étoile, mérite d'être remarqué & doit inspirer la plus grande confiance dans les résultats renfermés dans la Table II.

Ayant réussi à faire usage des comparaisons d'*Arcturus* au Soleil, faites depuis trente-cinq ans à l'Observatoire, j'ai voulu employer des Observations du siècle passé, mais j'ai trouvé des résultats si contradictoires, que j'ai été obligé de rejeter les Observations comme faites avec trop peu de précision pour une pareille recherche: d'ailleurs il faut convenir que plus l'intervalle entre les Observations sera considérable, plus l'erreur commise sur la détermination du mouvement d'*Arcturus*, déduits d'un plus petit nombre d'années, sera multipliée.

Quant à la comparaison de  $\beta$  de la Baleine avec le Soleil au solstice d'hiver, on se doute bien que les résultats doivent être très-susceptibles d'erreurs, d'autant que les Observations de l'Étoile ont été très-peu nombreuses & rarement d'accord, surtout dans ces dernières années, où les mois de Décembre ont toujours été défavorables aux Observations. J'attendrai donc que d'ici à quelques années les saisons plus favorables me permettent de faire des Observations plus exactes, & sur lesquelles je puisse établir un résultat digne de confiance.

L'Astronomie n'attend son entière perfection que du temps: tout ce que nous avons rapporté dans ce Mémoire ne fait que prouver davantage combien dans les recherches délicates de cette Science, il est nécessaire d'accumuler les Observations exactes, nombreuses & éloignées les unes des autres d'un nombre d'années fort considérable. Quarante années d'Observations, faites pour la plupart avec toutes les circonstances que l'on peut désirer, ne sont pas encore suffisantes pour décider la question; mais les résultats qu'elles m'ont offert, & que j'ai exposés ici, en variant les comparaisons de toutes les manières, me semblent devoir être les plus rapprochés du vrai que l'on puisse obtenir pour le moment actuel; car je crois avoir suffisamment démontré que nous ne pouvons rien conclure de bien certain dans la recherche présente de la comparaison des Observations anciennes avec les nôtres.

D'ailleurs je n'ai point crainc dans ce travail de multiplier les calculs , en employant le plus grand nombre d'Observations que j'ai pu trouver ; cela m'a donné des résultats bien plus exacts , & m'a fait distinguer les Observations bonnes d'avec les douteuses. Pour pouvoir bien établir l'état de l'instrument qui a servi à ces Observations , j'ai été obligé de faire un relevé général de toutes les Observations faites à ce quart-de-cercle depuis trente-cinq ans , je les ai toutes réduites & calculées ; ce qui m'a procuré une collection des Observations les plus exactes qui aient été faites à l'Observatoire , parce qu'il faut convenir que l'instrument dont il est ici question est le meilleur que nous ayons jamais possédé. Quoique ce travail considérable n'ait été entrepris que pour faire partie de l'Histoire céleste à laquelle je travaille , comme cet Ouvrage ne pourra être publié d'ici à plusieurs années , je me propose de communiquer de temps en temps à l'Académie un Précis succinct des résultats les plus intéressans , afin que les Savans puissent jouir plutôt de mon travail , & pour prouver à l'Académie que le projet dont je lui ai fait part en 1774 n'est point une vaine annonce , & que je m'occupe sérieusement à remplir mes engagemens vis-à-vis d'elle à cet égard.

Voici le résumé des résultats rapportés ci-dessus , & qui semblent concourir tous à prouver que la diminution de l'obliquité de l'Écliptique est au moins d'une minute par siècle , avec des augmentations inégales : mais il faut se rappeler ce que j'ai dit au commencement de ce Mémoire , sur la nécessité d'attendre un plus grand nombre d'Observations , pour se flatter de pouvoir décider une question aussi délicate & sur laquelle je n'ai eu d'autre dessein que de faire connoître à quel point nous en sommes à cette époque , & ce que les Observations antérieures peuvent nous donner.

ANNÉES.	INTERVALLE	Par les OBSERVATIONS du	DIMINUTION DE L'OBLIQUITÉ	
			OBSERVÉE.	PAR SIÈCLE.
depuis 1739 — jusqu'à 1778	En 39 ans,	solstice d'été..	32"	82'
1755 — 1778	En 23...	solstice d'été..	14	60
		<i>Arcturus</i> .....	14	60
1689 — 1778	En 89...	$\beta$ d'Hercule..	56,5	63
1669 — 1778	En 109...	$\beta$ d'Hercule..	66,4	61
1743 — 1778	En 35...	solstice d'été..	29,3	83
		<i>Arcturus</i> .....	31	88
1743 — 1778	En 31...	solstice d'hiver & d'été.	22	71





## M É M O I R E

*Sur un moyen nouveau de faire avec exactitude, le départ d'un grand nombre d'Essais d'Or à différens titres, & d'appliquer dans le même temps cette opération à tous ces Essais réunis dans un seul matras.*

Par M. T I L L E T.

QUELQU'APPLICATION qu'on donnât à l'étude d'un Art, 21 Novemb. 1778.  
il seroit difficile de le conduire, par la théorie seule, à toute la perfection dont il est susceptible. Les principes généraux tirés des Sciences exactes, & les connoissances puisées dans la saine Physique, étoient nécessaires sans doute pour guider d'abord les Artistes dans la route qu'ils se proposoient de suivre, pour leur épargner des recherches pénibles, les garantir de celles qui seroient infructueuses, & leur mettre, pour ainsi dire, dans la main tout ce qui devoit concourir à l'exécution prompte de leurs travaux. Mais il y a des lumières en ce genre, qui semblent ne sortir que de l'Art même exercé avec une attention suivie, & dans lequel on est plus occupé de l'exactitude, qui en fait le mérite essentiel, que des soins qu'il exige pour que cette exactitude ait lieu.

Les procédés ordinaires qu'on y emploie, d'après une théorie éclairée & une longue pratique, suffisent bien en général pour donner au travail un certain degré de perfection; mais dès qu'on veut n'y laisser rien à désirer, il est rare qu'on y réussisse, en se bornant aux procédés ordinaires; il faut que le point même de précision auquel on s'efforce d'atteindre, fournisse l'idée de nouveaux moyens capables de conduire à ce degré de précision; & c'est par l'emploi de ces moyens, nés pour ainsi dire, d'un travail réfléchi, assortis aux opérations qui en dépendent, réduits à leur plus grande simplicité

Mém. 1778.

SSS

& reconnus certains par des épreuves multipliées, qu'on faisoit enfin le but qu'on s'étoit proposé, & que par une méthode sûre on y revient sans cesse avec un succès égal.

S'il y a un Art, qui par les difficultés qu'il présente, quoique très-simple en apparence, & par l'importance de son objet, mérite l'attention des Physiciens, & des recherches de leur part capables de le perfectionner, c'est sans doute celui des Essais d'or & d'argent. Les différentes opérations en effet qui constituent cet Art intéressant, ne sont jamais appliquées qu'à de très-petites portions de l'un ou de l'autre de ces métaux; elles sont encore subdivisées, à la faveur d'un poids fictif, & pour la base d'un calcul particulier, en une quantité considérable de parties qui échappent aux yeux, & qui, autant par leur extrême ténuité, que par les épreuves violentes qu'on leur fait subir, donnent lieu souvent à des erreurs, dont un Essayeur exact n'est pas toujours sûr de le garantir.

C'est cependant d'après des opérations si délicates, & livrées quelquefois à des Artistes peu intelligens, que toutes les Nations s'accordent à reconnoître la valeur intrinsèque des matières d'or & d'argent; que la quantité immense de ces deux métaux qui est répandue dans le commerce, y a un prix déterminé; & que les monnoies des Souverains, fixées par des loix à un titre plus ou moins haut, doivent représenter dans la main de leurs peuples toute la valeur réelle que ces Princes y ont annoncée.

Les difficultés attachées aux Essais d'or & d'argent, & les variations qui en sont les suites assez ordinaires, ont toujours engagé les Souverains à modifier les loix qu'ils ont données, tant pour la fabrication de leurs monnoies, que pour les ouvrages d'orfèvrerie, & à ne pas exiger à la rigueur, que le titre des matières d'or & d'argent, relatif à ces deux sortes de travaux, y fût maintenu dans toute l'étendue que leurs loix présentoient: ils ont permis aux Directeurs des Monnoies de tenir les espèces un peu au-dessous du titre auquel elles étoient réputées; & ce léger affoiblissement avoit un terme

limité. La même permission s'est étendue de tout temps au titre des ouvrages en tout genre, qui sortoient des mains des Orfèvres; & cet affoiblissement fixe sur le titre, a été désigné sous le nom de *remède de loi*, pour le distinguer, quant aux monnoies seulement, de celui qui regardoit le poids prescrit pour chaque espèce d'or & d'argent, & qu'on nommoit par cette raison, *remède de poids*.

Mais ce qui avoit été établi par de justes motifs, & dans la vue de laisser aux Essayeurs assez d'étendue sur le titre, entre le point fixé par la loi & le dernier terme de l'affoiblissement, pour qu'ils ne sortissent pas de ces limites, malgré les variations qui-auroient pu se trouver dans leurs essais; ces précautions sages des Législateurs sont devenues aujourd'hui presque inutiles; la plus grande partie du *remède de loi*, sur les espèces d'or & d'argent, & la totalité sur certaines d'entre elles, a été absorbée insensiblement par des causes qu'il seroit superflu de développer ici. D'un autre côté, il reste si peu de traces de ce remède de loi sur tous les ouvrages d'orfèvrerie, qu'il semble aujourd'hui que le dernier terme de l'affoiblissement de leur titre, autorisé par la loi, soit le titre plein fixé pour ces ouvrages, & établi de tout temps pour y être maintenu en entier.

Dès-lors il aisé de sentir que l'opération des Essayeurs ne porte plus que sur un point très-délicat; qu'ils peuvent, par le plus léger écart, assigner à des matières déjà mises en œuvre, ou même entièrement finies, un titre inférieur au remède de loi, & rendre par-là inutiles tous les frais d'un travail de ce genre, qui ne doit subsister qu'avec les marques authentiques du titre exact des matières d'or ou d'argent auxquelles il a été appliqué.

Si la marche de l'art des Essais eût été aussi rapide, pour l'exactitude des opérations, que celle de l'emploi abusif du remède de loi dans le titre des matières, il ne seroit pas résulté de cet abus de la loi, des inconvéniens aussi sensibles que ceux dont je suis témoin tous les jours; & tandis que l'esprit d'intérêt auroit été attentif à profiter de tout ce remède, il y auroit eu

peu de risque à le faire par l'intelligence des Essayeurs ; mais cette ressource ménagée utilement pour une opération d'où il peut naître des erreurs importantes, ne subsiste presque plus aujourd'hui, comme je l'ai fait observer, pendant que l'art des Essais n'a fait que des progrès très-lents, que les causes d'erreurs ne sont pas totalement écartées, & que les essais d'or sur-tout, fondés sur des principes assez certains, tiennent encore à des manipulations, qui, quoique bonnes en elles-mêmes, ne conduisent pas à la précision d'une manière constante, sans que les Essayeurs puissent toujours s'apercevoir des causes d'incertitude attachées à leurs procédés.

Ces réflexions, & le désir de leur être utile, m'ont engagé à faire de nouvelles recherches sur ce sujet, aussi piquant par lui-même, qu'il est intéressant pour le commerce. Mon dessein n'est point ici de parler des essais d'argent, dont il a été question dans plusieurs Mémoires que j'ai soumis aux lumières de l'Académie, & qui font partie de son Recueil : je me m'attacherai qu'à ce qui concerne les essais d'or, & principalement à l'opération de leur départ, qui est l'article essentiel, & d'où il naît plus souvent des incertitudes, que de l'opération de la coupelle, parce que celle-ci n'est destinée proprement qu'au mélange des matières, & à la combinaison intime qu'elles exigent pour être départies.

Quoique la méthode ordinaire d'essayer les matières d'or, soit connue de tous les Chimistes, je crois cependant devoir la rappeler ici en peu de mots, afin qu'on juge mieux, & des inconvéniens dont elle n'est pas toujours à l'abri, & des avantages que m'a paru avoir celle que je propose.

Lorsqu'on a tiré de la matière d'or, dont on veut faire l'essai, une petite portion parfaitement égale en pesanteur au poids principal de la semelle d'or, on y joint une quantité d'argent fin, réglée sur le titre auquel on présume qu'est la matière d'or, & qui décroît graduellement, à mesure que ce titre est plus bas : cet argent doit être absolument dépouillé d'or ; ou s'il en contient quelques parties, elles doivent être bien connues : cet or & cet argent, enveloppés dans du

papier, sont portés à la coupelle, où il se fait par l'intermède d'une quantité de plomb proportionnée aussi au titre de la matière d'or, un premier affinage de cette matière, & surtout le mélange complet de l'or & de l'argent qu'on a pour but d'opérer. On pourroit se dispenser de cet affinage préliminaire, en fondant ces deux métaux dans un petit creuset ou dans une coupelle, sans addition de plomb, à la faveur d'un fourneau d'essais qui, construit sur les principes de celui dont je me sers, donneroit à volonté une très-grande chaleur (a). On obtiendrait encore cette fusion, au feu de lampe des Emailleurs, dirigé sur le bassin d'une coupelle neuve, ou sur un charbon plat, à la surface duquel on auroit creusé un petit bassin (b). Le dissolvant, en effet, qui doit enlever à l'or tout l'argent qu'on y a joint, a la même action sur le cuivre, & doit laisser ce premier métal dans toute sa pureté, soit qu'on l'ait d'abord dépouillé du cuivre, soit que tout son alliage lui soit resté. Cependant le mélange de l'or & de l'argent par la voie de la coupelle dans le fourneau d'essais, a des avantages qui doivent le faire préférer à celui qu'on obtiendrait au feu de lampe des Émailleurs : mais il n'entre pas dans mon dessein de donner ici les raisons de cette préférence; il suffit que j'y expose à cet égard les deux procédés que l'usage a introduits.

Après que l'or & l'argent réunis dans la coupelle, ont subi l'action du plomb, & que celui-ci, réduit en litharge, s'est imbibé dans la coupelle, il reste dans le milieu du bassin un bouton composé des deux métaux précieux, & portés, à peu de chose près, dans le mélange exact qui s'en est fait, à leur pureté respective. Ce bouton devant être attaqué de toutes parts, criblé, pour ainsi dire, par l'esprit de nitre, & ne pouvant l'être qu'autant qu'il présente une très-grande surface, est aplati sous le marteau, recuit à plu-

---

(a) La description de ce fourneau, & les planches gravées qui en présentent tous les détails, se trouvent dans un Mémoire qui fait partie du

Recueil de l'Académie des Sciences, pour l'année 1776.

(b) C'est le procédé qui est en usage au Bureau des Orfèvres de Paris.

sieurs reprises, & réduit enfin en une lame mince d'une égale épaisseur; on obtient parfaitement & avec facilité, cet avantage par le moyen d'un laminoin: cette lame, à laquelle on donne la plus grande souplesse par un dernier recuit, est roulée ensuite sur elle-même autour d'un petit cylindre d'une ou deux lignes de diamètre, & prend en cet état le nom de *cornet*, dont il faut faire le départ.

Lorsqu'on a mis ce cornet dans un petit matras, on y verse d'abord de l'eau-forte un peu affoiblie, afin qu'elle n'attaque le cornet que modérément, & le laisse subsister entier: on place le matras sur des charbons rouges, mais un peu éteints; & quand on remarque que l'eau-forte, après avoir bouilli pendant quelque temps, est devenue claire, ne jette plus que de grosses bulles, & paroît ne plus agir sur le cornet, on ôte le matras de dessus le feu, on décante l'eau-forte qui a produit son effet, on y en verse de nouvelle, mais qui a toute sa force; on remet le matras sur le feu, & on porte à cette seconde opération les mêmes attentions qu'on a données à la première: l'effet de cette eau-forte pure paroissant fini, on la décante aussitôt; on laisse un peu refroidir le matras, on y verse ensuite à plusieurs reprises de l'eau de rivière, pour laver parfaitement le cornet d'or, & lorsque cette eau y a toute sa transparence, on présente un petit creuset à l'embouchure du matras, & on renverse le matras même sur le fond de ce petit creuset, en l'y soutenant légèrement & en ligne perpendiculaire; une partie de l'eau contenue dans le matras se répand dans le creuset; le cornet d'or y descend doucement avec elle, & s'y repose sans avoir éprouvé de choc, qui quelque foible qu'il fût, seroit capable de le briser, parce qu'il a perdu toute sa consistance, en perdant l'argent qui faisoit corps avec lui; le cornet une fois sorti du matras sans accident, il faut dégager avec dextérité le bout du col de ce même matras de l'intérieur du creuset, en évitant avec soin que la grande quantité d'eau qu'il contient encore ne tombe avec force sur le cornet, qui pourroit être brisé par cette chute, & perdre quelques-unes

de ses parties par l'eau surabondante qui se seroit précipitée dans le creuset. Le cornet d'or se trouvant bien conservé dans la petite quantité d'eau qui est restée au fond du creuset, il ne s'agit plus que de la faire écouler lentement, en inclinant un peu le creuset, & en facilitant avec le doigt l'écoulement de l'eau, avec la précaution sur-tout de ne pas toucher au cornet qui s'applique de lui-même, par son état de mollesse, aux parois intérieures du creuset, & qui n'exige plus qu'un recuit pour que l'opération soit terminée : on le lui donne bientôt en mettant le creuset qui le contient, & qu'on a recouvert entre des charbons ardens, où il ne tarde pas à rougir. Le creuset retiré du feu & découvert, présente le cornet d'or dans toute sa beauté, rétréci dans tous les sens de près d'un tiers, & quoiqu'un peu sonore, n'ayant qu'une consistance médiocre : s'il s'est détaché quelques parties de ce cornet qu'on n'ait pas aperçues avant qu'il fût recuit, elles deviennent sensibles dans le creuset par leur couleur, & réunies avec soin au cornet d'or, elles concourent à l'établissement de son poids.

Les détails dans lesquels on verra qu'il étoit nécessaire que j'entrasse sur la méthode ordinaire d'essayer les matières d'or, & principalement sur la partie de cette opération qui concerne le départ du cornet ; ces détails commencent à donner une idée des précautions qu'exige ce point particulier des essais d'or, des difficultés qu'il offre pour la précision, & des risques que les Essayeurs y courent de tomber dans quelque erreur. Il convenoit d'autant mieux de présenter ici les détails relatifs au départ du cornet, qu'en adoptant la méthode nouvelle que je vais proposer, il y aura beaucoup moins de précautions à prendre, moins de difficultés à vaincre, & qu'on obtiendra dans ce travail toute la certitude qu'il est possible d'y espérer : on aura lieu encore de remarquer dans ce procédé nouveau, des avantages qui s'y trouvent comme attachés naturellement, & dont les Essayeurs, très-occupés, sentiront tout le prix.

L'Académie peut se rappeler que dans les dernières expé-

riences dont je lui ai rendu compte sur un sujet lié par bien des endroits, à celui que je traite dans ce moment, je me suis fait un devoir de n'établir aucun résultat que d'après des matières d'or & d'argent portées à leur dernier point de pureté, mélangées dans des proportions connues, & devant reparoitre après les épreuves auxquelles je les avois soumises dans la quantité juste des unes & des autres que j'avois d'abord employée. Avec cette méthode décisive, j'ai pu compter sur les conséquences que j'ai tirées; & c'est à la lumière constante, fournie par le même principe, que j'ai fait des recherches sur la manière la plus certaine de procéder aux essais d'or, en m'appliquant aussi à simplifier cette opération.

Je m'occupois depuis long-temps du moyen qu'il y auroit, dans le départ, de joindre à des cornets d'or appartenans à des matières dont on ignoreroit le titre, d'autres cornets qui contiennent une quantité d'or fin bien déterminée, & qui fussent associés aux premiers pour toutes les épreuves qu'ils auroient à subir. J'avois réfléchi inutilement à la forme qu'il auroit été nécessaire de donner au matras, pour que l'action d'une même quantité d'esprit de nitre se portât dans le même instant, avec une égale force & pendant la même durée de temps, sur les cornets dont la partie en or seroit connue d'un Essayeur, & sur ceux où il ne la connoitroit pas. Si les cornets, après que l'esprit de nitre a produit sur eux tout son effet, n'étoient pas réduits à un état de mollesse & d'affaïssement, qui quelquefois les tient fortement appliqués au fond du matras, & les expose à être brisés par le seul bouillonnement de l'esprit de nitre, on auroit pu, avant que d'en faire le départ, y imprimer quelque marque propre à les désigner, & qui, quoiqu'un peu altérée au sortir du recuit, auroit suffi cependant pour qu'on les eût distingués: mais deux cornets dans le même matras, après l'effet réitéré de l'esprit de nitre, se colleroient infailliblement l'un à l'autre, & ne pourroient plus être défunis, sur-tout après le recuit qu'on seroit contraint de leur donner dans l'état même d'adhésion où ils se seroient trouvés au sortir du matras; d'ailleurs si quelques parcelles de  
l'un



l'un ou de l'autre de ces cornets, ou même de tous les deux, s'en étoient séparées, il en résulteroit une incertitude, pour juger duquel des deux cornets elles dépendroient; à moins qu'en pesant la totalité, & défalquant la quantité d'or connue d'un des cornets, on ne jugeât de celle que doit contenir le cornet qui étoit d'abord inconnu; & encore, avec cette dernière ressource, resteroit-il de l'incertitude, puisqu'on ne sauroit pas si le départ auroit été complet: une connoissance bien positive sur ce point essentiel, & dont j'étois spécialement occupé, ne pouvant être procurée que par un cornet d'or isolé, qui, après le départ, représente la quantité précise d'or fin qu'on y a fait entrer.

Je n'avois donc encore rien imaginé dont j'attendisse du succès, soit pour la construction particulière du vase où les cornets auroient pu être départis en commun, mais isolés les uns des autres, & sortir aussi du vase séparément, soit pour empêcher l'adhérence de ces mêmes cornets, en employant les matras ordinaires, lorsqu'il se présenta à mon esprit un moyen simple qui naissoit de la chose même, & que j'avois sans cesse sous la main.

L'acide nitreux pur ne dissout point l'or; ce métal précieux garantit même, jusqu'à un certain point, de l'action de cet acide les autres métaux avec lesquels il est allié, & que l'esprit de nitre attaque le plus violemment. L'or, dès ce moment peut devenir comme l'enveloppe naturelle des corps qu'on a dessein de soustraire à l'action de cet acide, ou qu'on veut tenir isolés les uns des autres en les y laissant exposés. Je sentis en conséquence que je pourrois réussir dans mon projet, en renfermant chaque cornet d'essai dans une espèce de petit étui d'or, où il y eût quelques ouvertures par lesquelles l'esprit de nitre eût un accès facile, & qui cependant ne fussent pas assez grandes pour que les cornets pussent sortir.

Avant que de donner à ces étuis toute la perfection dont ils sont devenus susceptibles, je me hâtai de les former de la manière la plus simple, & propre à me faire juger sur le champ de l'avantage que j'en pourrois retirer. Je réduisis un

morceau d'or fin en une lame très-mince , & à laquelle j'évitai de donner un recuit , afin qu'elle conservât un peu de ressort ; j'en tirai une petite plaque à peu-près quarrée , & large de neuf à dix lignes ; je ménageai à chacun de deux des côtés opposés de cette plaque , & dans le milieu de ces côtés une petite lame de la largeur d'une ligne & de trois de longueur ; je roulai le corps de la plaque sur un cylindre de trois lignes ou à peu-près de diamètre ; je relevai une des lames , qui n'étoit qu'un prolongement de la plaque , sur l'ouverture du petit tuyau qui en résulta , & à laquelle cette lame répondoit ; je mis dans ce tuyau un cornet d'essai , dont le titre m'étoit connu ; & ayant relevé ensuite la seconde lame sur l'ouverture par laquelle je l'avois introduit , j'eus un étui assez bien fermé pour que le cornet n'en sortît pas , & assez ouvert pour que l'esprit de nitre pût attaquer de toutes parts ce cornet ; je le mis ainsi enveloppé dans un matras , & je procédai au départ ordinaire , en le faisant subir en même temps à un autre cornet d'essai mis à nu dans un second matras , & d'un titre égal à celui que l'étui renfermoit. Lorsque l'esprit de nitre eut produit tout son effet , & que je l'eus décanté des deux matras , j'y versai , à plusieurs reprises , de l'eau de rivière , & je lavai avec soin les cornets , en laissant dans son matras celui que l'étui contenoit , comme il étoit nécessaire d'y laisser celui dont le départ avoit été fait à nu : lorsqu'ils eurent été lavés suffisamment , je fis descendre l'étui dans ma main ; je baissai une de ses petites lames ; je le plongeai ensuite , en l'inclinant un peu , dans un petit creuset rempli d'eau ; le cornet sortit de l'étui ; & n'ayant pu éprouver par-là le moindre choc , il se reposa bien entier dans le fond du creuset. Je donnai à l'autre cornet d'essai toute l'attention ordinaire pour le faire tomber , sans accident , dans un creuset ; & l'un & l'autre , qui me parurent de la même beauté après le recuit , ayant été portés à la balance , se trouvèrent d'un poids égal.

Le succès de cette expérience ne me laissa aucun doute sur l'avantage que je pouvois tirer de l'emploi de pareils étuis pour acquérir la certitude d'un départ complet , & juger

sûrement du titre d'une matière d'or qu'on ne connoîtroit pas, en associant les essais qu'on en feroit avec celui d'une matière qu'on auroit composée soi-même, ou dont le titre seroit devenu constant par des épreuves multipliées. Desirant de répéter cette expérience, en employant plusieurs étuis dans un matras seul, je commençai par les rendre un peu plus solides que n'étoit celui dont je viens de parler : au lieu de deux lames dépendantes de l'étui même dont il falloit qu'une fût tantôt baissée, pour que le cornet fût introduit, tantôt relevée pour qu'il fût maintenu dans l'étui, & ensuite baissée une seconde fois, afin que le cornet en sortît, je ne fis dépendre du corps de l'étui qu'une seule lame qui restoit toujours relevée sur l'ouverture à laquelle elle répondoit, & j'adaptai sur l'ouverture opposée une virole d'or qui portoit elle-même une lame toujours relevée, qui embrassoit étroitement le bout de l'étui, qu'on pouvoit cependant ôter ou remettre à volonté, & qui par conséquent, lorsqu'elle étoit en place, ne laissoit point d'issue au cornet.

Ce fut en faisant usage de ces étuis, dont je ne courois plus le risque de rompre une des lames, par les plis & replis qu'elle auroit éprouvés souvent, si je ne les eusse pas évités par le secours d'une virole ; ce fut, dis-je, en les employant pour plusieurs cornets, mis tout-à-la-fois dans un même matras, & exposés ensemble à l'action du même esprit de nitre, que je répétai l'expérience dont j'ai rendu compte plus haut, pour reconnoître les différens titres des matières d'or que j'avois moi-même alliées, & qui, par cette précaution décisive pour les résultats, devoient m'avertir infailliblement de l'exactitude ou de l'imperfection du départ. Mais ces nouvelles expériences confirmèrent la première ; & chacun des cornets, au sortir de son étui, contenoit précisément la quantité d'or fin que j'y avois employée. A mesure que l'on tire de l'utilité d'un moyen, on sent mieux jusqu'où elle doit s'étendre, parce que l'objet auquel on l'applique est considéré alors avec plus d'attention, sous des faces différentes, & avertit de toute la perfection dont il est susceptible.

Quoique j'eusse réussi, dans mes premières expériences, en employant les étuis d'or tels que je les ai décrits, je sentis cependant qu'il y avoit des changemens avantageux à y faire pour les cas, rares il est vrai, où il se détacheroit quelques parcelles des cornets contenus dans ces étuis, & où l'exactitude demanderoit qu'elles n'en sortissent pas, afin que réunies au cornet après le recuit, elles concourussent à l'établissement juste de son poids. Si en effet ces parcelles s'étoient une fois échappées de l'étui, à la faveur de l'ouverture trop facile de ses deux extrémités, & s'étoient répandues, soit sur les autres étuis, soit dans le fond du matras, on ne sauroit point auquel des cornets elles appartiendroient, à moins qu'on ne fût instruit auparavant de la quantité d'or fin que chacun d'eux devoit contenir, & qu'on n'eût déterminé leur poids respectif; mais en supposant qu'on opérât sur des matières inconnues, l'attribution juste de ces parcelles à l'un ou l'autre de ces cornets, deviendrait presque impossible, & jetteroit une incertitude bien fondée sur le véritable titre des matières auxquelles plusieurs cornets départis dans un même matras seroient relatifs.

Je donnai donc à ces étuis une forme nouvelle, qui en même temps qu'elle laissoit un accès suffisant à l'esprit de nitre pour y attaquer les cornets, mettoit une petite barrière à l'extrémité de ces étuis, que des parcelles détachées de ces cornets ne pouvoient pas franchir. Je ne réservai plus de lame à un des côtés de la plaque qui devoit former le corps de l'étui : roulé sur le cylindre, il n'étoit plus qu'un tuyau simple, dont les deux extrémités étoient entièrement ouvertes, & où il y avoit un peu de jour dans toute la longueur du tuyau, entre les bords des deux côtés de la plaque qui se joignoient, à cause du ressort que je lui avois conservé; mais ce jour disparoissoit pour peu qu'on pressât ce tuyau avec les doigts, & il ne subsistoit qu'en partie lorsque ce même tuyau étoit maintenu par les deux viroles amovibles dont il me reste à parler : au lieu d'y réserver une lame comme dans celles des étuis précédens, & de profiter simplement de leur

ressort pour leur faire embrasser étroitement l'extrémité des étuis, je fis souder ces viroles d'or fin avec de l'or à 20 karats; je les couvris d'un côté par une petite plaque d'or qu'on y souda également, & dans le milieu de laquelle on perça un trou de trois quarts de ligne ou environ de diamètre; en comprimant un peu le corps de l'étui, j'en faisois entrer sans peine les extrémités dans les viroles; & celles-ci les resserroient étroitement à la faveur du ressort dont le corps de l'étui jouissoit: on voit alors que par cette dernière forme que je donnai à ces étuis, il n'y avoit d'entrée pour l'esprit de nitre, que celle du petit trou pratiqué à chacune des viroles, & celle que lui laissoit encore le très-petit jour dont je viens de parler, lequel subsistoit sur la longueur de l'étui & dans toute la partie que les viroles ne recouvroient pas: on remarque en outre, qu'au moyen de la petite plaque soudée à chacune des viroles, & appliquée à chaque ouverture principale de l'étui, il s'y trouvoit intérieurement une bordure de plus d'une ligne de hauteur, propre à empêcher que de petites portions d'un cornet qui s'en seroient détachées, ne sortissent de l'étui, & à y conserver par conséquent toute la partie d'or pur, dépendante de la matière de l'Essai.

Il sembleroit d'abord que le peu d'ouverture que j'ai laissée à ces derniers étuis, ne seroit pas suffisante pour que l'esprit de nitre y attaquât les cornets de toutes parts, & y produisît aussi-bien son effet que sur les cornets qu'on départit à nu: mais l'expérience m'a prouvé que ce peu d'ouverture ne mettoit aucun obstacle à toute l'action de l'esprit de nitre, puisque je le voyois, pendant son ébullition, traverser les étuis librement, former des jets continuels par les petits trous pratiqués à leurs extrémités, & que, dans les épreuves pour lesquelles j'ai employé plusieurs de ces étuis dans un seul matras, j'ai obtenu les résultats que j'attendois. Si en faisant usage de ces étuis, on attend que les cornets qu'on en a tirés soient recuits pour juger, en les mettant dans la balance, de l'exactitude de l'opération, on courra risque quelquefois de trouver les cornets un peu plus pesans qu'ils ne devroient.

être, soit parce que l'eau-forte dont on s'est servi n'avoit pas assez d'activité, soit parce qu'on ne l'a pas laissé bouillir assez long-temps; cet inconvénient ne tient en rien à l'usage des étuis, & a lieu tous les jours dans la méthode ordinaire; mais un avantage que ne peut pas avoir cette méthode, & qui est attaché à l'emploi des étuis, c'est qu'on n'a pas besoin de tirer du matras tous les étuis qu'il contient, pour connoître si le départ est complet; il suffit d'en ôter un seul, en laissant tous les autres dans l'esprit de nitre, jusqu'à ce que le cornet de celui-là, après avoir été lavé & recuit, ait averti du point auquel a été porté le départ; & voici la manière simple, dont je profite de cet avantage qui conduit l'opération à un point d'exactitude, dont la méthode ordinaire n'est pas susceptible. Un de mes étuis a un petit anneau d'or auquel tient aussi un fil d'or, au moyen duquel je plonge l'étui dans l'esprit de nitre contenu dans le matras, au milieu des autres étuis destinés pour le départ; ce fil d'or, qui excède d'un pouce ou deux le col du matras, me rend toujours le maître d'en faire sortir l'étui auquel il aboutit; ce guide sûr de mon opération, contient toujours un cornet, dont la partie en or fin m'est connue: sorti une fois du matras, il m'instruit fidèlement de l'état où sont tous les autres cornets qu'il vient de quitter, & me sert de règle certaine, soit pour regarder le départ comme fini, soit pour le rendre complet, s'il n'est pas absolument terminé. Il seroit prudent même, d'après ce que je viens d'exposer, dans des occasions où l'on auroit à départir une grande quantité de cornets, d'avoir un double guide, dont l'un donneroit le premier avertissement sur le point où en seroit l'opération; & l'autre, si elle n'étoit pas finie, instruiroit en second lieu de l'effet du moyen qu'on auroit employé pour la rendre complète. On seroit bien dédommagé de ce léger surcroît de travail par la certitude du titre de plusieurs matières qu'on auroit essayées, & pour lesquelles, en suivant la méthode ordinaire, on auroit employé plus de temps, fait plus de frais, pris plus de peine, avec le risque souvent de revenir

à de nouveaux Essais des mêmes matières, & toujours avec une sorte d'incertitude d'en avoir déterminé le véritable titre.

J'ai dit que les cornets d'essais, après le départ, & renfermés encore dans leur étui, étoient plongés dans un petit creuset rempli d'eau; que par-là ils se dégageoient facilement de l'étui, & se reposoient sur le fond du creuset où ils étoient ensuite recuits, sans avoir éprouvé d'accidens. Quoique la méthode ordinaire ne présente pas autant d'avantage pour conserver les cornets en entier, puisqu'on est obligé, en la suivant, de faire précipiter ces cornets du fond du matras, dont le col est assez long, dans un creuset où il peut être entamé par le moindre choc; j'ai senti cependant qu'il seroit utile pour la facilité du travail, pour éviter sur-tout la confusion dans un grand nombre de cornets auxquels il faudroit donner le recuit, & qui demanderoient chacun leur creuset particulier, de procéder à cette dernière opération, sans déranger les cornets, & en faisant subir le recuit aux étuis même qui les contiendroient. Mes premières expériences à cet égard, eurent lieu sur des étuis d'or fin: je m'aperçus d'un inconvénient qui tenoit à l'emploi des étuis de cette espèce: les cornets qui, comme je l'ai dit, sont d'une grande mollesse, après le départ, & qu'on a humectés par des lotions répétées, s'appliquent sur la surface intérieure des étuis; quoiqu'ils tendent à se resserrer sur eux-mêmes, à mesure qu'ils se recuisent, cependant il y a des endroits par lesquels ils portent nécessairement sur l'étui, & y sont très-adhérens; lorsque celui-ci commence à rougir, le cornet qu'il renferme éprouve le même effet; & comme je leur donnois un recuit assez fort qui ouvroit leurs pores réciproques, ils se soudoient, pour ainsi dire, l'un à l'autre, au point de contact, & ne pouvoient être séparés qu'aux dépens de quelques parties du cornet, qui restoit unies à l'étui, & que je ne pouvois plus en détacher.

Ainsi j'abandonnai les étuis d'or fin pour être exposés au recuit avec les cornets qui auroient subi le départ dans ces mêmes étuis; je fis de nouvelles épreuves à ce sujet avec des

étuis d'or rouge, qui, comme on fait, est allié sur le pied de cinq sixièmes d'or fin, & d'un sixième de cuivre de rosette; j'éprouvai le même inconvénient : je ne réussis pas mieux en employant des étuis d'or vert, dans la composition duquel j'avois fait entrer trois quarts d'or pur & un quart d'argent fin. Ce défaut de succès ne me rebuta point : je ne me dissimulois pas que le procédé nouveau que j'avois imaginé, perdrait quelque chose de l'utilité que j'y voyois attachée, de l'agrément même qu'il y auroit à l'employer, si je ne parvenois pas au point particulier dont il s'agit ici, & que je cherchois avec une sorte d'obstination. Je réfléchis enfin que l'or gris dans lequel il entre un sixième de fer & cinq sixièmes d'or pur, pourroit être favorable à mon dessein, parce que la portion de fer qui s'y trouve mêlée, présente un obstacle naturel à l'effet que j'avois intérêt d'éviter. Je m'empressai donc de faire des étuis d'or gris; de les employer dans le départ de plusieurs cornets, & de les exposer à un fort recuit avec les cornets même qui y avoient été départis. Lorsque l'opération fut finie, j'eus le plaisir d'entendre, en agitant un peu ces étuis avant de les ouvrir, que les cornets s'y remuoient, comme le fait une amande sèche dans la coque; & le poids des cornets, tel précisément que je l'attendois, me rendit certain qu'aucune partie ne s'en étoit détachée.

Outre la grande utilité que j'ai tirée des étuis d'or gris, pour l'accélération & la simplicité du travail, j'ai reconnu dans ce métal composé, un avantage relatif aux étuis même, & à la consistance dont ils ont besoin pour bien conserver leur forme, après des recuits multipliés. L'or gris est très-dur, & a beaucoup de ressort; on vient à bout cependant de le bien laminier au sortir de la fonte, & de le réduire à très-peu d'épaisseur, sans qu'il soit nécessaire de le recuire à mesure qu'il s'écrouit: il paroît même, d'après l'expérience que j'en ai faite plusieurs fois, qu'un recuit poussé jusqu'au blanc, ne produit sur lui que peu d'effet, puisqu'une épreuve aussi forte ne lui ôte presque rien de son ressort. Dès-lors on voit que l'or gris est très-propre à devenir la matière des étuis, indépendamment



indépendamment de l'avantage précieux qu'il leur donne d'un autre côté, & que l'or, soit pur, soit allié avec d'autres métaux que le fer, ne pourroit pas leur procurer. En supposant en effet que les cornets d'Essais ne fussent pas restés adhérens aux parois intérieures des étuis d'or, que la matière de ceux-ci fût pure ou non, & quel que fût le métal qu'on y eût employé comme alliage, il est certain que les étuis d'or fin, qui d'abord auroient eu un peu de ressort, le perdroient totalement, après un recuit, & reviendroient à un état de souplesse, dont les suites nécessaires seroient une trop grande aisance dans les viroles pour serrer les extrémités de l'étui, & s'y maintenir elles-mêmes, lorsqu'on les feroit servir de nouveau, & à l'opération du départ, & à celle du recuit. Le même inconvénient auroit lieu à l'égard des étuis composés d'or & d'argent fins; & si l'or rouge ne perdoit pas absolument, par le recuit, une certaine roideur qu'il tient de sa composition, au moins seroit-elle sensiblement diminuée, & résulteroit-il un peu de relâchement dans les étuis, dont cet or allié au cuivre auroit été la matière; au lieu que la dureté particulière à l'or gris maintient, malgré le recuit, un étui formé de ce métal dans tout le ressort qui lui est propre, empêche le relâchement, au moins sensible, des viroles qui en dépendent, & rend cet étui, aussi capable de résister à une longue suite d'épreuves qu'il a été propre à la première pour laquelle on l'a employé.

Après tous les détails dans lesquels je viens d'entrer, afin que l'Académie, instruite de mes recherches, dans l'ordre où je les ai faites, juge mieux du degré de confiance que mes expériences peuvent mériter, & adopte les conséquences que j'en tire, si elles lui paroissent bien fondées, il ne me reste plus qu'à rapprocher la méthode ordinaire d'essayer les matières d'or de celle que je propose; les avantages de la dernière n'en seront que plus frappans, s'ils sont tels aux yeux de l'Académie que je les ai considérés moi-même dans le succès de mes opérations; ou bien, par la comparaison de ces deux méthodes, on verra, au contraire, dans celle que

522 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

toutes les Nations suivent aujourd'hui , des raisons de la conserver , sur lesquelles j'ai pu être distrait , comme occupé trop fortement de celle que je désirerois d'y substituer.

La quantité d'argent nécessaire pour le départ des Essais d'or , le mélange de ces métaux dans la coupelle , par le moyen d'une quantité convenable de plomb , la réduction du bouton d'Essai qui en résulte , en une lame mince dont on forme enfin un cornet ; tous ces procédés sont communs à l'une & à l'autre méthode , & leur différence n'a lieu que lorsqu'il s'agit du départ. Comme celle qui a été l'objet de mes expériences , pourra devenir très-utile à ceux principalement qui auront un grand nombre d'Essais d'or à faire à la fois , aux Gardes-orfèvres de Paris , par exemple , dont le travail est journalier & assez considérable , je supposerai qu'il sera question d'essayer quinze ou vingt matières d'or différentes , dont on ignorera le titre , & de départir tout-à-la-fois un nombre pareil de cornets.

L'usage de ces Gardes-orfèvres , dont je vais représenter le travail , est , comme on sent bien , d'employer autant de matras qu'il y a de cornets dont il faut faire le départ ; ces matras n'ont aucune marque distinctive qui établisse une relation entre les cornets qui s'y trouvent contenus & les matières d'or auxquelles ils appartiennent ; mais ces Gardes-orfèvres évitent le danger de confondre ces matras par une précaution que voici , & qui demande une explication. Les pièces ébauchées de bijouterie que les Orfèvres envoient à leur Bureau pour y être essayées , & recevoir la marque , si elles se trouvent au titre prescrit , sont contenues dans des sacs qui portent le nom de ceux à qui ils appartiennent : on tire un échantillon de chacune de ces pièces qu'on met dans un petit bassin de cuivre avec le nom du propriétaire du sac ; ces échantillons plus ou moins nombreux , suivant la quantité des pièces , deviennent la matière de l'essai ; & comme il est rare qu'ils soient tous employés , ceux qui ne l'ont pas été restent dans le bassin avec le nom du propriétaire , pour servir en cas de besoin , à des reprises d'Essais ; c'est ce petit bassin qui , placé sur le

fourneau où se fait le départ, & vis-à-vis du matras qui renferme le cornet correspondant aux échantillons contenus dans ce même bassin, c'est lui seul qui garantit de la confusion des matras, parce que l'ordre dans lequel il est, répond à celui dans lequel les matras sont placés sur le feu; il reste dans le rang où il a été mis d'abord, lorsqu'on ôte du matras la première eau-forte affoiblie qu'il contenoit, pour y en verser d'autre pure, & achever le départ; il y reste, parce qu'on a l'attention, en remettant le matras sur le feu, de lui donner la même place qu'il y occupoit; mais s'agit-il d'ôter une seconde fois le matras de dessus le feu, parce que le départ est fini, alors le bassin accompagne le matras; il est à côté de lui pendant qu'on y lave le cornet d'Essai; il est près du creuset où ce cornet est déposé, en attendant le recuit qui doit être donné en commun à tous les cornets dont on aura fait le départ; il est placé dans une première ou une seconde ligne, vis-à-vis de celui des creusets, rangés aussi sur deux lignes, qui lui est relatif, pendant que celui-ci est dans le feu; & enfin, après cette dernière opération, ce petit bassin reçoit le creuset même où est le cornet d'Essai dont il a fourni la matière.

On voit par le détail que je viens de donner, quelle attention exige cette opération particulière, & combien on court risque de tomber dans des erreurs de conséquence, si la moindre confusion a lieu dans l'attribution qui doit être faite de chacun des cornets d'Essais à la matière d'or dont il doit déterminer le titre: on s'expose en effet, par un dérangement dans l'ordre qu'on a d'abord suivi, à marquer des pièces de bijouterie comme trouvées au titre prescrit, pendant qu'elles étoient au-dessous, & à occasionner la refonte de celles qui étoient en règle, parce qu'on leur a attribué, par une transposition dont on ne s'est pas aperçu, un cornet qui ne leur appartenait pas.

Mais témoin par état, & assez fréquemment, des Essais en grand nombre qui se font tous les jours au Bureau des Orfèvres de Paris, par les Gardes en charge de ce corps,

je leur dois ici la justice d'assurer qu'ils donnent à ce travail la plus grande attention , qu'ils s'y portent avec un zèle toujours soutenu , & que de leur propre mouvement , ils font jusqu'à trois reprises d'Essais de la même matière , si aux deux premières épreuves , elle ne se trouve pas au titre fixé par la loi.

Je dois faire observer encore que parmi les inconvéniens qui sont les suites de la méthode ordinaire , & dont je désirerois de mettre les Essayeurs à l'abri , il en est un qui a lieu de temps en temps , & mérite une certaine attention : il rend inutile en effet une partie du travail de ces Essayeurs , & occasionne un retard , dans les rapports d'Essais qu'ils ont à donner , qui gêne ordinairement quelqu'un de ceux qui les attendent , soit pour des opérations momentanées de commerce , soit pour des ouvrages de bijouterie qu'il s'agit d'ébaucher ou de finir. Il arrive quelquefois qu'un matras se casse sur le feu , & que l'esprit de nitre , s'écoulant par les ouvertures qui s'y sont faites , laisse presque à sec , au fond de ce matras , le cornet qu'on y avoit mis : si , avant cet accident , l'esprit de nitre n'avoit pas encore agi vivement sur ce cornet ; si celui-ci conserve de la consistance , il est facile de le faire passer dans un autre matras , & d'y continuer l'opération ; si au contraire , le départ étoit à peu-près fini lorsque le matras s'est cassé , alors le défaut de consistance du cornet , l'état de mollesse où il est réduit , ne laisse presque aucun moyen de le prendre sans l'entamer , & de l'introduire sans accident dans un autre matras : on se détermine presque toujours à recommencer l'opération , & ce parti est le plus sage , parce qu'en voulant tirer avantage du cornet repris avec soin dans le matras cassé , on auroit la crainte assez bien fondée de ne l'avoir point recueilli tout entier.

On ne vient de remarquer encore dans la méthode ordinaire de faire le départ des cornets d'Essai , que la longueur de l'opération , lorsqu'il y en a un grand nombre à départir tout-à-la-fois , les risques qu'on y court de tomber dans quelque erreur , pour peu que trois des choses principales

qui y concourent, le bassin, le matras & le creuset ne restent pas dans l'ordre qu'on a d'abord établi, & enfin une double opération à laquelle les Essayeurs sont quelquefois contraints par la rupture des matras : mais cette méthode laisse toujours une sorte d'incertitude dans les résultats qui en naissent, quelqu'intelligent & scrupuleux que soit l'Essayeur qui la fait ; il ne sauroit répondre qu'il a porté l'esprit de nitre, soit affoibli, soit pur, au même degré d'ébullition dans douze ou quinze matras qu'il a employés : si dans le cours de son opération il est obligé de se servir d'un esprit de nitre, qui, quoique propre aux Essais, ne soit pas précisément le même que celui dont il a déjà reconnu la bonne qualité par une épreuve sûre, il n'est pas absolument certain que ce nouveau dissolvant ait produit tout l'effet qu'il en a attendu : des cornets conservés dans leur entier, sans la moindre altération à leur surface, & de la couleur riche qu'ils ont au sortir du recuit, ne sont pas constamment une preuve que le départ a été complet ; il arrive tous les jours, qu'en essayant de l'or fin, & en obtenant des cornets, qui ont toute la perfection apparente dont je viens de parler, on remarque, en les pesant, une légère augmentation de poids qui est dûe à une petite portion d'argent que l'esprit de nitre n'a pas dissoute ; & on ne sauroit se tromper sur cet excédant de poids, puisqu'il résulte de la comparaison du poids principal de la semelle d'or dont on s'est servi pour la matière de l'Essai, avec le cornet qui ne doit représenter tout au plus que la portion de cette matière qui est entrée dans l'opération. Si dans les cornets qui proviennent tous les jours des différentes matières d'or qu'on essaye, on ne s'aperçoit pas de cette surcharge légère, qui peut cependant y avoir lieu, comme dans ceux qui résultent quelquefois des épreuves faites sur l'or fin, c'est qu'on ignore le titre de ces matières, ou qu'au moins on n'en a pas une connoissance exacte : on voit des cornets d'or qui ont, en apparence, toute leur perfection, & on conclut avec assez de vraisemblance que ces cornets, annonçant à l'extérieur leur dernier point de pureté, ils doivent donner,

par le poids juste qu'ils ont, le titre bien réel de ces matières: mais un autre cornet, pour lequel on eût employé d'abord une quantité précise d'or fin, & qui eût été départi à côté de ceux-là dans un même matras, y auroit fait connoître un excédant de poids, le degré juste de cette augmentation, si réellement elle s'y fût trouvée; & pendant que l'imperfection du départ n'auroit pas même pu être soupçonnée, ce cornet auroit instruit, comme un témoin exact, de l'état bien positif des autres cornets, en donnant, par le sien même, une preuve évidente de cette imperfection du départ.

Il faut donc ajouter aux inconvéniens attachés à la méthode ordinaire, pour le départ des cornets, pour de simples manipulations, l'incertitude où sont les Essayeurs d'avoir saisi le point de précision dans l'objet essentiel, dans le titre des matières d'or, & de le retrouver constamment, en revenant aux mêmes matières par des épreuves multipliées.

Afin que l'Académie puisse juger nettement, & d'un coup-d'œil, de l'avantage du procédé nouveau pour le départ des Essais d'or, que je propose de substituer à la méthode ordinaire, quant à ce point particulier, il me paroît convenable que la marche que j'ai tenue dans l'exposé qu'on a vu des inconvéniens attachés à celle-ci, soit la même dans l'exposé du moyen propre à les écarter, & dans l'application naturelle de ce moyen seul à toutes les circonstances du départ.

Je commence par prier l'Académie de regarder, 1.<sup>o</sup> comme un fait constant, que le départ des cornets d'Essais a lieu d'une manière aussi parfaite, lorsqu'ils sont renfermés dans des étuis d'or, tels que je les ai décrits, que quand ils sont, suivant l'usage, entièrement à découvert dans un matras: 2.<sup>o</sup> que plusieurs cornets renfermés chacun dans leur étui, & réunis dans un seul matras, y sont départis aussi complètement qu'un seul cornet contenu dans un étui, ou mis à nu dans le matras: toutes mes expériences, & elles ont été en grand nombre, m'autorisent à assurer ces deux points essentiels, & d'où naît l'utilité de la méthode que je propose. J'ai

toujours pris pour base des épreuves que j'ai faites, des matières d'or qui m'étoient connues par des expériences précédentes, ou que j'avois alliées moi-même dans la coupelle, en employant une quantité déterminée d'or fin & de cuivre rouge: j'ai soumis souvent l'or fin au départ, sans y joindre le moindre alliage: non content d'avoir composé des matières à quatre ou cinq titres différens, je les ai suivis tous depuis un karat jusqu'à vingt-quatre: dans le cours de ces opérations, j'ai fait usage de six ou sept étuis à la fois dans un petit matras ordinaire, qui m'avoit toujours servi pour le départ à nu d'un cornet seul, & dans lequel je n'ai guère mis plus d'esprit de nitre, pour ces six ou sept cornets réunis, que pour un seul que j'y aurois voulu départir. J'ai toujours vu que la quantité précise d'or fin employée pour l'essai, & variée suivant les titres que j'avois eu dessein de représenter, se retrouvoit dans les cornets que je retirois: j'ai même remarqué un fait qui confirme la marche égale des cornets renfermés dans leur étui, soit pour l'exactitude du départ, soit pour l'imperfection légère qui peut s'y trouver. Ayant eu l'occasion de faire usage d'un esprit de nitre qui n'étoit pas précisément le même que celui dont je m'étois servi pour mes premières expériences, je l'employai au départ de six cornets renfermés dans leur étui, & contenus tous dans un seul matras: après le recuit, je m'aperçus en pesant le premier de ces cornets, que son poids étoit plus fort d'un trente-deuxième de karat, ou environ, qu'il n'auroit dû être, d'après la quantité déterminée d'or fin que j'avois mise dans la matière de l'essai, dont ce cornet étoit le résultat: je pesai les cinq autres qui avoient également un léger excédant de poids, & qui s'ils me firent connoître que l'esprit de nitre n'avoit pas produit sur eux tout l'effet que j'en attendois, me prouvèrent en même temps une chose très-essentielle pour mes opérations, l'égalité de cet effet sur plusieurs cornets réunis, & m'établirent dans la confiance de regarder un départ comme généralement complet, quand un étui, sorti d'un matras, où il auroit été exposé avec beaucoup d'autres, à l'action de l'esprit de nitre,

me fourniroit un cornet d'Essai, dont le poids seroit égal à celui de l'or fin que j'y aurois employé.

Lorsqu'on voudra faire usage de ces étuis, il conviendra d'établir un premier ordre, à l'égard des opérations antérieures au départ, qui s'étendra aux étuis même, & écartera toute erreur: on assignera d'abord un numéro à chacune des matières qu'on se proposera d'essayer; les petits bassins, dans lesquels on mettra les échantillons de ces matières & le nom de ceux à qui elles appartiendront, pour en tirer la portion qu'exigera l'Essai, porteront chacun un numéro pareil à celui de ces mêmes matières: à mesure que chaque pesée, tant de la matière d'or que de l'argent nécessaire au départ, sera faite, on la mettra dans le bassin auquel elle correspond; ou, pour la commodité du transport, sur un plateau quarré de cuivre dont les bords seront relevés, & qui, partagé intérieurement en plus ou moins de cases numérotées, recevra la matière des Essais dans l'ordre où elle aura été pesée. L'arrangement qui aura eu lieu d'abord pour ces préparatifs de l'opération, subsistera dans toutes ses suites; celui des coupelles dans la moufle, l'aplatissement des boutons d'Essais qu'on en retirera, les recuits qu'ils demanderont, leur réduction en lames très-flexibles, tout sera fait dans l'ordre primitivement établi, jusqu'à ce que ces boutons d'Essais parvenus à l'état de cornets, seront renfermés dans des étuis; ceux-ci qui porteront un *numéro*, recevront les cornets dont le *numero* sera le même que le leur, & dès-lors il n'y a plus de confusion à craindre, quoiqu'on perde ces cornets de vue jusqu'au moment, où sortis des étuis dans toute leur beauté, ils donneront, par leur poids, le résultat de l'opération. On met donc pêle-mêle tous les étuis dans un matras, & on y verse de l'esprit de nitre affoibli pour procéder au départ; mais avant de placer le matras sur le feu, on y introduit un autre étui dont j'ai déjà parlé, celui qui contient un cornet dont la partie en or est parfaitement connue, qu'on peut retirer seul du matras, quand on le veut, à la faveur du fil d'or auquel il est attaché, & qui par l'état du cornet qu'il renferme,



renferme, donne lieu de juger sûrement du point où en est le départ.

Lorsque l'esprit de nitre affoibli, & celui qu'on a employé pur en second lieu, paroissent avoir exercé toute leur action sur les cornets, on ôte le matras de dessus le feu; on retire l'étui dont le cornet doit servir de guide, & après l'avoir lavé dans plusieurs eaux, on le fait recuire: si le cornet qu'il restitue annonce par son poids que le départ n'est pas absolument complet, on remet le matras sur le feu pour y faire bouillir de nouveau l'esprit de nitre qu'il contient; ou si l'on soupçonne que ce dissolvant a perdu quelque chose de son activité, on y en verse d'autre d'une qualité éprouvée, qui, après une ébullition de peu de durée, achève l'opération.

Si, au contraire, on est averti par le rapport fidèle de ce même cornet, que le départ est terminé, on décante l'esprit de nitre, on lave dans le matras même, & à plusieurs reprises, les autres étuis; lorsque l'eau y a repris toute sa transparence, on la verse entièrement & seule, si l'on veut d'abord, pour faire glisser ensuite les étuis le long du col du matras, les recevoir l'un après l'autre dans la main, ou les faire tomber dans un vase plein d'eau, à la surface de laquelle nage une rondelle de liège, qui s'oppose à la chute trop précipitée de ces étuis. On range enfin ces étuis l'un à côté de l'autre, dans une petite boîte d'argent de deux pouces de largeur en tout sens, de quatre à cinq lignes de profondeur, à laquelle on a adapté un couvercle du même métal, mais qui en est indépendant; cette boîte est contenue elle-même dans une espèce d'autre boîte de tôle, qui a aussi son couvercle, mais qui n'est fermée que de trois côtés; la bordure d'un de ces côtés qu'on a tenue plus haute que celle des deux autres côtés fermés, est repliée horizontalement, & forme une saillie extérieure, qui donne la facilité de saisir avec une pince la boîte de tôle, & conséquemment d'enlever la boîte d'argent qu'elle contient, lorsqu'on veut retirer l'une & l'autre du feu.

C'est dans une boîte ainsi disposée, mise au milieu de quelques charbons allumés, & dans un très-petit espace, qu'on

peut donner un recuit prompt à douze étuis à la fois, à vingt-quatre, si l'on veut, en donnant à la boîte plus de profondeur, & suppléer par-là à l'usage beaucoup plus embarrassant d'un grand nombre de creusets : il suffit, après avoir retiré les deux boîtes du feu, & en tenant, au moyen de la pince, celle qui est de tôle, de la pencher, privée de son couvercle, du côté où elle n'est point fermée, pour que la boîte d'argent s'en dégage avec facilité, glisse sur la tablette du fourneau, & s'y-refroidisse en un moment.

Il est aisé de voir actuellement, que du procédé nouveau, pour l'opération du départ dont je viens d'exposer les détails, il résulte des avantages que n'a point la méthode ordinaire : cette opération devient & plus simple & plus courte par ce nouveau procédé ; on n'y court point les risques de confondre les cornets d'Essais ; les étuis, dans la rupture des matras, préservent ces cornets de tout accident, & passent avec eux, sans le moindre danger, dans d'autres matras ; ce procédé enfin paroît conduire à toute l'exactitude qu'il est possible d'espérer dans un travail si délicat.

Peut-être, en adoptant la méthode que je viens de présenter, & en suivant avec soin la marche que j'ai tracée, remarquera-t-on quelquefois de légères variations dans le cours des expériences qu'on sera curieux de répéter d'après celles que j'ai faites : mais les différences qu'on pourra observer, & qui ne seront jamais bien marquées, à moins qu'un défaut d'attention n'ait fait tomber dans quelque erreur notable, ces différences ne tiendront pas proprement à l'opération du départ ; elles auront leur cause dans les opérations antérieures à celle-ci : une balance qui n'a ni assez de sensibilité, ni une exactitude constante ; un mélange inégal des deux ou trois métaux dont peut être composé un lingot qu'on se propose d'essayer ; une distraction momentanée pendant qu'on pèse la matière des Essais ; quelque partie impalpable qui s'en écarte, lorsqu'on enveloppe cette matière avec l'argent nécessaire au départ ; un pétilllement passager de la matière en fusion dans la coupelle duquel on ne s'est pas aperçu ; la litharge qui, en

s'imbibant dans la coupelle, a entraîné plus d'argent aurifère qu'elle n'en dérobe ordinairement; quelques globules d'argent aurifère qui sont restés sur le bassin de la coupelle, & qui ont échappé à la vue, lorsqu'on en a détaché le bouton d'Essai; des parcelles légères qui se sont séparées du bouton, pendant qu'on l'aplatissoit, qu'on lui donnoit les recuits nécessaires, & qu'on le réduisoit en lame pour en former un cornet; toutes ces différentes manipulations peuvent occasionner une perte plus ou moins sensible sur la portion précise d'or qu'on a pour but de connoître. Mais comme il n'a été souvent rien observé dans tout ce qui a précédé le départ, qui ait pu faire remonter à la source de cette perte, & que le cornet d'Essai, au sortir du recuit, annonce, par son poids, qu'il n'a pas toute la matière d'or qu'il devoit représenter; l'attention se borne à ce qui concerne le cornet en cet état, & on ne voit la cause de la perte qu'il a éprouvée, que dans l'imperfection du départ.

Cependant, qu'on y fasse réflexion, & on verra que, si en employant la méthode que j'ai indiquée, on remarquoit des variations dans les différens Essais qu'on feroit, il seroit difficile de concevoir qu'elles eussent leur principe dans quelque vice du départ. La base des expériences seroit sans doute, comme je l'ai dit, de l'or fin porté au titre de 24 karats, ou au moins à celui de 23 karats  $\frac{21}{2}$ ; en alliant soimême les matières dans la coupelle, pour qu'il en résultât différens titres, on emploïroit des quantités d'or fin bien déterminées; on y ajouteroit l'argent fin qu'exige le départ; & la quantité de ce dernier métal qu'on auroit jugé convenable pour l'Essai destiné à devenir le guide de l'opération, serviroit de règle pour en joindre une quantité proportionnelle aux autres Essais à différens titres qu'on se seroit proposé de faire.

Comment, dans la supposition où toutes les opérations antérieures au départ, auroient été également bien suivies, & où il ne fût arrivé aucune perte qui eût pris son origine dans quelque une des causes dont j'ai parlé plus haut; comment,

X x x ij

dis-je, seroit-il possible que les cornets dépendans de ces différens Essais, ne représentassent pas respectivement la quantité précise d'or mise d'abord dans chacun de ces mêmes Essais? ils auroient éprouvé, dans leur étui, & pendant une durée de temps égale, la même action du même esprit de nitre; ils ne seroient sortis du matras, qu'autant que le cornet qu'on leur auroit associé, comme un guide sûr, en seroit sorti le premier, & auroit annoncé l'exactitude du départ; les lotions répétées leur auroient été communes; ils auroient subi le même degré de recuit; & sortant enfin de leur étui, ils auroient passé à la balance également bien conservés.

Il seroit difficile, je le répète, de faire retomber avec fondement, sur l'opération du départ, les inégalités qu'on auroit remarquées dans des Essais d'or réitérés; il seroit plus naturel d'en chercher la cause dans tout ce qui auroit précédé cette opération; & l'attention portée principalement de ce côté, produiroit un effet avantageux: Dans la juste confiance où seroient les Essayeurs, qu'une fois parvenus à l'opération du départ, ils n'auroient plus à craindre des inégalités, leur vigilance se tourneroit presque toute entière du côté de la partie du travail, qui est antérieure à cette opération; & ces soins bien soutenus de leur part, les conduiroient à une précision pour la totalité du travail, qu'ils ne sont pas toujours sûrs d'obtenir par la méthode ordinaire, malgré l'application qu'ils peuvent y donner, & les talens qu'ont quelques-uns d'entr'eux pour cet Art intéressant.

Je terminerai ce Mémoire par deux observations; l'une, sur la manière d'employer l'esprit de nitre dans l'opération du départ; l'autre, sur l'usage avantageux qu'on pourroit faire d'une composition différente de celle de l'or gris, pour former les étuis dans lesquels les cornets d'essais doivent être contenus.

Quoiqu'on réussisse ordinairement à faire le départ, en se servant d'un esprit de nitre bien concentré qu'on affoiblit d'abord par une égale quantité d'eau de rivière, afin qu'il n'attaque pas avec trop de violence les cornets d'essais, & qu'on emploie ensuite dans toute la force pour achever le

départ, j'ai cependant remarqué qu'on obtient un succès plus constant de l'emploi d'un pareil esprit de nitre, lorsqu'on s'en sert à trois reprises, & en graduant sa force; c'est-à-dire, en y mêlant une égale quantité d'eau pour commencer l'opération, en ne mettant ensuite qu'une partie d'eau sur trois parties d'esprit de nitre pour la continuer, & en le faisant servir enfin dans toute son activité, pendant quelques minutes, pour qu'il ne subsiste aucun doute sur l'exactitude du départ.

Je dois, en second lieu, prévenir les Essayeurs que les étuis d'or gris reprennent peu-à-peu, & jusqu'à un certain point, la couleur naturelle de l'or, après avoir servi pendant quelque temps, parce que l'action souvent répétée, de l'esprit de nitre & les recuits multipliés, enlèvent la petite portion de fer qui se trouve à la surface de ces étuis, & leur ôtent par-là une partie de la propriété qu'ils ont de ne pas s'attacher aux cornets d'essais. Il y a tout lieu de croire que la Platine pure, sur laquelle l'esprit de nitre n'a aucune action, fondue avec de l'or fin dans une certaine proportion, & peut-être seule, d'après les recherches curieuses de M. le Comte de Sickingen & la malléabilité qu'il est parvenu à donner à ce métal si rebelle par sa nature; il est à présumer, dis-je, que la Platine deviendra favorable pour la composition de la matière de ces sortes d'étuis, & les garantira de l'altération qu'un mélange d'or & de fer éprouve nécessairement à sa surface dans l'opération du départ.

*Nota.* J'avois lu ce Mémoire à l'Académie, lorsque M. le Comte de Milly, qui en est Membre, voulut bien me donner un morceau de la platine ductile, qu'il avoit obtenue de ses expériences sur ce métal, & dont il s'étoit servi avec succès pour différens ouvrages de Bijouterie. J'en ai formé des étuis dont le corps étoit de platine pure, & les viroles, composées de deux pièces, étoient soudées solidement avec de l'or fin. Ces étuis ont réussi, comme je l'espérois, pour l'emploi auquel ils m'avoient paru propres, dans l'opération du départ; ils n'y éprouvent, en effet, aucune altération; ils conservent toute leur consistance dans le recuit, ou au moins n'y perdent presque rien de leur ressort. Il est essentiel, à l'égard du recuit qu'on donne aux étuis, lequel se communique nécessairement tel qu'il est

534 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

aux cornets d'or qu'ils contiennent; il est essentiel, dis-je, que ce recuit ne soit pas porté jusqu'au *blanc*, c'est-à-dire à un point qui approche fort près de celui où commence la fusion. Ce n'est pas sans doute qu'il y eût quelque risque à courir pour les étuis de platine, ou au moins pour le corps de ces étuis; mais les cornets d'or qui s'y trouveroient renfermés, pourroient, par un recuit excessif, s'attacher aux parois intérieures des étuis, soit qu'ils fussent de platine, soit qu'ils fussent d'or uni au fer: au lieu que par un recuit modéré de l'une & l'autre sorte de ces étuis, on évite toujours cet inconvénient, sur-tout si on donne aux cornets d'or le temps de s'y dessécher peu - à - peu, de se resserrer de toutes parts, & de se rouler sur eux - mêmes, avant que de passer au rouge couleur de cerise, qu'il suffit de leur donner.



# CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

## SUR LA NATURE DES ACIDES,

*Et sur les Principes dont ils sont composés.*

Par M. LAVOISIER.

LORSQUE les anciens Chimistes avoient réduit un corps en huile, en sel, en terre & en eau, ils croyoient avoir atteint les bornes de l'analyse chimique ; & en conséquence ils avoient donné au sel & à l'huile le nom de *principes des corps*.

Présenté le  
5 Septemb.  
1777.  
Lu  
le 23 Nov.  
1779.

A mesure que l'art fit de nouveaux progrès, les Chimistes qui leur succédèrent, s'aperçurent que les substances qu'ils avoient regardées comme principes, étoient encore susceptibles de décomposition ; & ils reconnurent successivement que tous les sels neutres, par exemple, étoient formés par la réunion de deux substances, d'un acide quelconque & d'une base saline, terreuse ou métallique.

De-là toute la théorie des sels neutres, qui fixe l'attention des Chimistes depuis plus d'un siècle, & qui se trouve aujourd'hui tellement perfectionnée, qu'on peut la regarder comme la partie la plus certaine & la plus complète de la Chimie.

D'après cet état où la science chimique nous est transmise, il nous reste à faire sur les principes constituans des sels neutres ce que les Chimistes nos prédécesseurs ont fait sur les sels neutres eux-mêmes, à attaquer les acides & les bases, & à reculer encore d'un degré les bornes de l'analyse chimique en ce genre.

J'ai déjà fait part à l'Académie de mes premiers essais sur ce sujet : je lui ai démontré dans de précédens Mémoires, autant toutefois qu'il est possible de démontrer en Physique & en Chimie, que l'air le plus pur, celui auquel M. Priestley

a donné le nom d'*air déphlogistique*, entroit, comme partie, constituante, dans la composition de plusieurs acides, & notamment de l'acide phosphorique, de l'acide vitriolique & de l'acide nitreux.

Des expériences plus multipliées me mettent aujourd'hui dans le cas de généraliser ces conséquences, & d'avancer que l'air le plus pur, l'air éminemment respirable, est le principe constitutif de l'acidité; que ce principe est commun à tous les acides, & qu'il entre ensuite dans la composition de chacun d'eux, un ou plusieurs autres principes qui les différencie & qui les constitue plutôt tel acide que tel autre.

D'après ces vérités, que je regarde déjà comme très-solide-ment établies, je désignerai dorénavant l'air déphlogistique ou air éminemment respirable dans l'état de combinaison & de fixité, par le nom de *principe acidifiant*, ou, si l'on aime mieux la même signification sous un mot grec par celui de *principe oxygène*: cette dénomination sauvera les périphrases, mettra plus de rigueur dans ma manière de m'exprimer, & évitera les équivoques dans lesquelles on seroit exposé à tomber sans cesse, si je me servois du mot d'*air*; ce nom en effet, d'après les découvertes modernes, est devenu un mot générique, & qui s'applique d'ailleurs à des substances dans l'état d'élasticité, tandis qu'il est ici question de les considérer dans l'état de combinaison, & sous la forme liquide ou concrète,

Sans répéter des détails que j'ai donnés ailleurs, je rappellerai ici en peu de mots, en adoptant ce nouveau langage:

1.<sup>o</sup> Que le principe acidifiant ou oxygène, combiné avec la matière du feu, de la chaleur & de la lumière, forme l'air le plus pur, celui que M. Priestley a nommé *air déphlogistique*; cette première proposition, il est vrai, n'est pas rigoureusement démontrée, & peut-être même n'est-elle pas susceptible de l'être; aussi ne l'ai-je donnée que comme une idée que je regarde comme très-probable; & en cela, il ne faut pas la confondre avec les propositions qui vont suivre,  
& qui



& qui sont appuyées sur des expériences & sur des preuves rigoureuses :

2.<sup>o</sup> Que ce même principe acidifiant ou oxygène, combiné avec les substances charbonneuses ou le charbon, forme l'acide crayeux ou air fixe :

3.<sup>o</sup> Qu'avec le soufre, il forme l'acide vitriolique :

4.<sup>o</sup> Qu'avec l'air nitreux, il forme l'acide du nitre :

5.<sup>o</sup> Qu'avec le phosphore de Kunckel, il forme l'acide phosphorique :

6.<sup>o</sup> Qu'avec les substances métalliques en général, il forme des chaux métalliques, sauf les exceptions dont je parlerai dans ce Mémoire ou dans les suivans.

Voilà à peu-près à quoi se bornent dans ce moment les connoissances générales acquises sur la combinaison du principe oxygène avec les différentes substances de la Nature, & il n'est pas difficile de voir, qu'il reste à cet égard le champ le plus vaste à parcourir; qu'il existe une partie de la Chimie toute nouvelle & entièrement inconnue jusqu'à ce jour, & qui ne sera complète que lorsqu'on sera parvenu à déterminer le degré d'affinité de ce principe avec toutes les substances avec lesquelles il est susceptible de se combiner, & à connoître les différentes espèces de composés qui en résultent.

Tous les Chimistes savent que plus les corps sur lesquels on opère sont simples, que plus on approche de réduire les substances en leurs molécules élémentaires, plus aussi les moyens de décomposition & de recomposition deviennent difficiles; on conçoit donc que la décomposition & la recomposition des acides, doivent présenter des difficultés beaucoup plus grandes que l'analyse de sels neutres, dans la combinaison desquels ils entrent. J'espère cependant être en état de faire voir dans la suite qu'il n'est aucun acide, si ce n'est peut-être celui du sel marin, qu'on ne puisse décomposer & recomposer,

*Mém. 1778.*

Y y y

& auquel on ne puisse enlever ou rendre à volonté le principe de l'acidité.

Ce genre de travail demande une grande variété dans les moyens ; & les procédés nécessaires pour parvenir à la combinaison, varient suivant les différentes substances sur lesquelles on opère : pour les unes, on est obligé d'avoir recours à la combustion, soit dans l'air atmosphérique, soit dans l'air pur, & c'est ce qui a lieu à l'égard du soufre, du phosphore & du charbon : ces substances, pendant la combustion, absorbent le principe acidifiant ou oxygène, & par l'accession de ce principe, ils se convertissent en acide vitriolique, en acide phosphorique & en acide crayeux aëriiforme ou air fixe : pour d'autres substances, la simple exposition à l'air, aidée d'un degré de chaleur médiocre, suffit pour opérer la combinaison, & c'est ce qui arrive à toutes les substances végétales, susceptibles de passer à la fermentation acide : dans toutes les opérations de ce genre, il y a absorption de la partie la plus pure de l'air, & le principe acidifiant engagé dans la combinaison, forme autant d'acides particuliers qu'il y a de substances susceptibles de passer à la fermentation acide : enfin, dans le plus grand nombre des cas, on est obligé d'avoir recours à la science des affinités, & d'employer le principe acidifiant déjà engagé dans une autre combinaison.

L'exemple que je vais donner aujourd'hui est de ce dernier genre ; je le tirerai d'une expérience très-connue depuis quelques années, d'après les Mémoires de M. Bergman ; c'est la formation de l'acide du sucre : cet acide, d'après les expériences dont je vais rendre compte, ne me paroît être autre chose que le sucre en entier combiné avec le principe acidifiant ou oxygène ; & je me propose de faire voir successivement dans différens Mémoires, qu'on peut, par des procédés analogues, unir ce même principe à la corne des animaux, à la soie, à la limphe animale, à la cire, aux huiles essentielles, aux huiles par expression, à la manne, à l'amidon, à l'arsenic, au fer, & probablement à un grand nombre d'autres substances des trois règnes, & les convertir ainsi en de véritables acides.

Avant d'entrer en matière, je prie l'Académie de se rappeler que l'acide nitreux, d'après les expériences que je lui ai précédemment exposées, & que j'ai répétées sous les yeux, est le résultat de la combinaison de l'air nitreux avec l'air le plus pur ou principe acidifiant; que la proportion de ces deux principes varie dans les différentes espèces d'acide nitreux; & que celui qui est fumant, par exemple, contient une surabondance d'air nitreux; de sorte qu'on peut regarder l'esprit de nitre fumant comme un acide nitreux imprégné & surchargé d'air nitreux, tandis qu'au contraire celui qui ne répand que des vapeurs blanches est surchargé d'air déphlogistique. J'ajouterai à ces notions, que, par des expériences multipliées & faites depuis la publication du Mémoire que j'ai donné en 1776, je me suis assuré que l'acide nitreux que j'emploie dans mes expériences, & qui est toujours le même, contient par once environ 240 pouces cubiques de fluides aériformes; savoir, 120 pouces d'air nitreux & environ autant d'air le plus pur, ce qui équivaut en poids environ à 48 grains d'air nitreux & 60 grains de principe acidifiant ou oxygène également par once: tout le reste n'est que du flegme ou de l'eau.

D'après ces données, toutes les fois que j'aurai introduit dans une combinaison une once d'acide nitreux, & que par le résultat de l'opération, j'aurai obtenu 120 pouces cubiques d'air nitreux, il demeurera pour constant qu'il est resté dans la combinaison 120 pouces cubiques de l'air le plus pur, ou, ce qui revient au même, 60 grains de principe acidifiant. Appliquons maintenant ces connoissances à la combinaison de l'acide nitreux avec le sucre.

J'ai mis dans une petite cornue de verre 4 gros de sucre, & j'ai versé par-dessus un mélange de 2 onces d'eau & de 2 onces de l'acide nitreux que je viens de désigner: j'ai placé cette cornue à feu nu dans un petit fourneau de réverbère; j'ai adapté à son col, qui étoit fort alongé, une bouteille à deux gouleaux, dans laquelle j'avois introduit 8 onces 7 gros 24 grains d'eau distillée: du second gouleau de cette même

Y y ij

bouteille, partoît un tube de verre qui s'adaptoit à l'appareil chimico-pneumatique ordinaire à l'eau.

On voit que par ces dispositions, j'avois le double avantage, d'une part de retenir dans la bouteille intermédiaire tous les produits qui pouvoient passer dans la distillation, & qui étoient susceptibles de se condenser; & d'une autre, de recevoir sous des cloches les différens airs qui pouvoient se dégager; de sorte que rien ne me manquoit pour obtenir la totalité des produits de l'opération.

J'ai luté avec la plus grande exactitude toutes les jointures avec du lut gras recouvert avec des bandes de toile enduite de blanc d'œuf & de chaux: enfin lorsque le lut extérieur a eu pris toute la consistance nécessaire pour pouvoir contenir le lut gras, dans le cas où il seroit venu à se ramollir, j'ai mis quelques charbons allumés sous la cornue.

D'abord le sucre s'est dissout paisiblement; mais lorsque la liqueur a commencé à acquérir 40 ou 45 degrés de chaleur au thermomètre de M. de Reaumur, il a commencé à s'exciter un bouillonnement très-vif, ou plutôt une effervescence considérable, qui n'étoit autre chose qu'un dégagement très-rapide de l'air nitreux, le plus pur & le plus fort que j'aye jamais obtenu. Il est important d'aller extrêmement lentement dans cette opération, autrement on décompose l'acide du sucre lui-même; & au lieu d'obtenir de l'air nitreux pur, on l'obtient considérablement mélangé d'air inflammable & d'acide crayeux aériforme. Il faut en conséquence retirer tout le feu au moment où l'ébullition commence, & n'en remettre à mesure que ce qui est nécessaire pour l'entretenir: vers la moitié ou les deux tiers de l'opération, l'air nitreux ne passe plus aussi pur; il est accompagné d'abord d'une petite portion d'acide crayeux aériforme, qui va ensuite toujours en augmentant, & d'un peu d'air inflammable. Lorsqu'il ne passe plus que de l'acide crayeux aériforme & de l'air inflammable, on doit regarder l'opération comme finie.

J'ai fractionné en un grand nombre de portions les fluides aériformes qui se sont dégagés dans cette opération; après quoi

j'en ai examiné la nature par tous les moyens que fournit la Chimie moderne, & j'ai reconnu que les 2 onces d'acide nitreux & les 4 gros de sucre que j'avois employés, m'avoient donné

Air nitreux. ....	190 <sup>pouces</sup>
Air fixe ou acide crayeux aériforme. ....	90
Air inflammable. ....	25
<b>TOTAL. ....</b>	<b>305</b>

Ayant désassemblé les vaisseaux, j'ai trouvé d'une part dans la cornue 2 onces 6 gros 18 grains d'un acide transparent & sans couleur, & tel que l'a décrit M. Bergman, si ce n'est qu'il étoit en liqueur: l'eau de la bouteille intermédiaire étoit augmentée de 1 once 2 gros 12 grains; elle étoit médiocrement acide & avoit une légère odeur nitreuse.

On concevra bientôt que pour donner quelque exactitude aux résultats de cette expérience, il étoit nécessaire que je connusse exactement la qualité & la quantité d'acide qui s'étoit séparé par voie de distillation & qui s'étoit condensé dans la bouteille intermédiaire: il est évident en effet qu'elle n'étoit pour rien dans l'opération; & que pour pouvoir faire des calculs exacts, il étoit nécessaire de la déduire de la quantité totale d'acide employée. Pour remplir cet objet, j'ai versé goutte à goutte sur la liqueur acide de la bouteille intermédiaire une liqueur alcaline, composée de cinq parties d'eau & de quatre d'alkali fixe végétal concret très-pur: la quantité nécessaire pour arriver juste au point de saturation, s'est trouvée de 6 gros 12 grains. J'ai ensuite déterminé, par une seconde expérience, combien il falloit de l'acide primitivement employé pour saturer 6 gros 12 grains de la même liqueur alcaline; le résultat m'a donné 3 gros 56 grains  $\frac{1}{2}$ : d'où j'ai conclu, que des 2 onces d'acide nitreux que j'avois employés, 3 gros 56 grains avoient passé en nature dans la distillation, & que par conséquent il n'en étoit entré réellement dans l'expérience que 1 once 4 gros 15 grains  $\frac{1}{2}$ .

Mais une once d'acide nitreux est composée, ainsi que je

viens de le rappeler il n'y a qu'un moment, de 240 pouces cubiques de fluides aériformes, savoir, de 120 pouces cubiques d'air nitreux, & de 120 pouces cubiques de l'air le plus pur; ainsi, dans l'expérience dont il est ici question, j'ai réellement combiné avec le sucre 183 pouces cubiques d'air nitreux, & autant d'air le plus pur, ce qui revient en poids à un peu plus d'un gros d'air nitreux, & à près d'un gros & demi de principe acidifiant ou oxygène. On vient de voir qu'il s'étoit dégagé pendant la combinaison 190 pouces d'air nitreux, c'est-à-dire, la totalité de ce que j'y avois fait entrer; donc il est resté dans la combinaison 183 pouces d'air le plus pur; donc dans la composition des 2 onces 6 gros 18 grains d'acide du sucre en liqueur, qui me sont restés dans la cornue, il entroit 4 gros de sucre & 183 pouces d'air éminemment respirable, ou 1 gros 30 grains de principe acidifiant ou oxygène; sauf la portion d'acide crayeux aériforme qui s'étoit dégagée sur la fin de l'opération, & qui est dûe, comme on le verra bientôt, à la décomposition de l'acide du sucre lui-même.

M. Bergman, & tous ceux qui, depuis lui, ont écrit sur cette matière, ont donc été dans l'erreur, lorsqu'ils ont regardé l'acide, dont il est ici question, comme le résultat de la décomposition du sucre; il paroît constant, au contraire, que cet acide est formé par la combinaison du sucre, avec près du tiers de son poids de principe acidifiant.

Je ne m'en suis pas tenu à cette première expérience, & j'ai voulu connoître les changemens qu'apporteroient aux résultats que j'avois obtenus les différentes proportions de sucre & d'acide nitreux; en conséquence, j'ai répété l'expérience ci-dessus avec les mêmes circonstances, avec la même quantité d'acide nitreux & d'eau, & en employant seulement 3 gros de sucre au lieu de 4, j'ai procédé très-lentement comme la première fois, & j'ai obtenu

Air nitreux.....	176
Air fixe ou acide crayeux aériforme.....	127.
Air inflammable.....	17.
TOTAL.....	<u>320.</u>

Si j'ai eu dans cette opération un peu plus d'acide crayeux que dans la précédente, j'en attribue la cause à ce que le feu a été poussé un peu davantage sur la fin, & continué un peu plus long-temps.

L'opération étant finie, & les vaisseaux ayant été désappareillés, il s'est trouvé dans la cornue 1 once 7 gros 48 grains d'acide du sucre en liqueur; d'un autre côté, en opérant comme précédemment, j'ai reconnu qu'il avoit passé dans la bouteille intermédiaire par voie de distillation 4 gros 9 grains  $\frac{1}{2}$  de l'acide primitivement employé, de sorte que la quantité réelle d'acide nitreux entrée dans l'expérience, n'étoit que de 1 once 3 gros 62 grains  $\frac{1}{2}$ : cette quantité d'acide, d'après les proportions ci-dessus déterminées, devoit contenir 178 pouces d'air nitreux, & autant d'air pur; d'où l'on voit 1.<sup>o</sup> que la totalité de l'air nitreux introduit dans cette combinaison en a été chassée, & qu'il n'est resté que l'air pur ou le principe acidifiant: 2.<sup>o</sup> que les trois gros de sucre que j'avois employés se sont emparés pendant l'effervescence de 89 grains de principe acidifiant ou oxygène, & que ces deux substances réunies, combinées avec le flegme, ont formé la quantité de 1 once 7 gros 48 grains d'acide du sucre.

Indépendamment des lumières que répand ce genre d'expériences, sur la nature des acides, il fournit un nouveau moyen de procéder à l'analyse des substances animales & végétales, & quoique je n'aie rien d'absolument complet à présenter sur cet objet; je vais rendre compte du premier essai que j'en ai fait sur le sucre.

J'ai combiné dans le même appareil que ci-dessus, 2 onces d'acide nitreux; 2 onces d'eau, & 6 gros de sucre; j'ai suivi l'expérience de la même manière, en recevant dans une bouteille intermédiaire l'acide nitreux qui montoit dans la distillation: lorsqu'il a cessé de passer de l'air nitreux, & qu'il ne me restoit plus que de l'acide du sucre dans la cornue, j'ai désappareillé les vaisseaux; j'ai supprimé la bouteille intermédiaire; après quoi j'ai continué à entretenir sous l'acide du sucre un feu doux, en recevant directement dans

# 544 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

des cloches l'air qui se dégageoit, jusqu'à ce qu'enfm ayant haussé un peu le feu sur la fin, il ne m'est plus resté qu'un léger enduit charbonneux dans la cornue : j'ai partagé en dix portions le fluide élastique qui s'est dégagé pendant le cours de cette opération, & j'ai mis une attention très-particulière pour séparer exactement les différentes espèces que j'en ai obtenues. Le Tableau suivant présente le résultat total de l'expérience.

*DÉTAIL exprimé en pouces cubiques des espèces & quantités des différens airs ou fluides aériformes obtenus de la combinaison de 2 onces d'acide nitreux, & 6 gros de sucre poussés jusqu'à siccité.*

	AIR NITREUX.	ACIDE CRAYEUX aériforme.	AIR INFLAM- MABLE.	TOTAL
1. <sup>re</sup> Portion..	56 $\frac{1}{3}$	.....	.....	56 $\frac{1}{3}$
2. <sup>e</sup> Portion...	49 $\frac{6}{10}$	6	.....	55 $\frac{6}{10}$
3. <sup>e</sup> Portion...	23 $\frac{1}{2}$	22 $\frac{1}{2}$	4 $\frac{2}{3}$	50 $\frac{2}{3}$
4. <sup>e</sup> Portion...	21 $\frac{4}{10}$	30 $\frac{2}{3}$	4 $\frac{1}{3}$	56 $\frac{4}{10}$
5. <sup>e</sup> Portion...	14 $\frac{6}{10}$	45 $\frac{1}{2}$	2 $\frac{9}{10}$	63
6. <sup>e</sup> Portion...	15	39 $\frac{1}{4}$	7 $\frac{1}{2}$	61 $\frac{3}{4}$
7. <sup>e</sup> Portion...	.....	28 $\frac{1}{8}$	8 $\frac{1}{4}$	36 $\frac{1}{8}$
8. <sup>e</sup> Portion...	.....	48	11 $\frac{4}{10}$	59 $\frac{4}{10}$
9. <sup>e</sup> Portion...	.....	32 $\frac{4}{10}$	8	40 $\frac{4}{10}$
10. <sup>e</sup> Portion...	.....	25 $\frac{4}{10}$	17	42 $\frac{4}{10}$
TOTAUX...	180 $\frac{13}{30}$	277 $\frac{101}{120}$	74 $\frac{1}{20}$	522 $\frac{13}{40}$

Je n'avois pas mis d'eau cette fois dans la bouteille intermédiaire; l'opération finie, il s'y est trouvé 2 onces  $\frac{1}{2}$  d'un acide nitreux foible, qui, d'après la quantité de liqueur alkaline qu'il a été susceptible de saturer, s'est trouvé répondre à 4 gros 17 grains de l'acide primitivement employé: il n'y avoit eu d'après cela de décomposé dans cette expérience que

J. ONCE



1 once 3 gros 55 grains d'acide nitreux : or cette quantité d'acide, d'après les proportions ci-dessus, est composée de 177 pouces d'air nitreux environ, & d'autant d'air pur ou éminemment respirable.

Il est aisé de voir, en jetant un coup-d'œil sur le tableau ci-dessus, que l'air nitreux qui étoit entré dans la combinaison comme partie constituante de l'acide nitreux, en est ressorti sous la forme de gas, & dans l'état aériforme ; mais qu'est devenu l'air pur ou le principe acidifiant qui formoit le second principe de l'acide nitreux ? On a vu, par les expériences précédentes, qu'il commençoit par se combiner avec le sucre pour former avec lui un acide particulier, & l'expérience dont il est ici question, nous apprend, que si après que l'acide du sucre a été formé, on le pousse à un degré de feu modéré, il se résout presque en entier en air fixe ou acide crayeux aériforme & en air inflammable : or, qu'est-ce que l'acide crayeux ? J'ai fait voir ailleurs, qu'il étoit un résultat de la combinaison de la matière charbonneuse avec le principe acidifiant ou oxygène ; d'où il suit, que le sucre est composé d'un peu d'air inflammable & de beaucoup de matière charbonneuse ; cette dernière s'unit avec le principe acidifiant ou oxygène fourni par l'acide nitreux, & forme avec lui la grande quantité d'acide crayeux aériforme qu'on a obtenue sur la fin de l'opération. Je me propose d'éclaircir par de nouvelles expériences, ce que ce genre d'analyse peut encore présenter d'obscur.

Tout ce que je viens de donner pour le sucre, on peut, comme je l'ai déjà dit, l'appliquer à un grand nombre de substances animales & végétales : on obtient de presque toutes, par leur combinaison avec l'acide nitreux, ou, pour parler plus exactement, avec le principe acidifiant contenu dans l'acide nitreux, des acides particuliers, dont plusieurs il est vrai ont des propriétés communes, mais qui présentent des caractères distinctifs dans les résultats des combinaisons. Voilà donc encore une route toute nouvelle qui s'ouvre dans la Chimie, & la partie de cette science qui traite des sels, &

546 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

à laquelle quelques Chimistes allemands ont donné le nom de *halotechnie*, au lieu de cinq ou six acides qu'elle employoit, en aura plus du double, d'après les seules connoissances que j'ai acquises jusqu'à ce moment, & on ne peut pas douter que le nombre ne s'en accroisse encore considérablement dans la suite.

De toutes ces réflexions, & des expériences contenues tant dans ce Mémoire que dans quelques-uns de ceux qui l'ont précédé : il résulte,

1.<sup>o</sup> Qu'en général, lorsque le principe acidifiant ou oxygène se combine avec un corps quelconque, sans le décomposer (si on en excepte cependant le plus grand nombre des substances métalliques), il le convertit en un acide particulier, qui, indépendamment des caractères généraux, communs à tous les acides, en a qui lui sont propres :

2.<sup>o</sup> Qu'à l'égard des substances métalliques, il forme, avec la plupart, des composés connus sous le nom de *chaux métalliques* ; j'ajouterai cependant ici, que même dans cette classe de substance il en est quelques-unes, comme l'arsenic, le fer, & peut-être plusieurs autres, qui, combinées avec le principe acidifiant ou oxygène, jusqu'à un certain degré de surabondance, prennent non-seulement un caractère salin, mais encore acquièrent les propriétés communes aux acides, & deviennent comme eux de véritables dissolvans :

3.<sup>o</sup> Que le principe acidifiant a, comme tous les autres, ses différens degrés d'affinité, & qu'il a par exemple beaucoup plus d'affinité avec le sucre & avec la plupart des substances végétales & animales, qu'avec l'air nitreux, & que c'est par une suite de cette préférence qu'il quitte ce dernier pour former avec ces substances différentes espèces d'acides :

4.<sup>o</sup> Que le nombre des acides qu'on peut former est encore absolument indéterminé, puisqu'on ne connoît pas toutes les substances qui sont susceptibles de se combiner avec le principe acidifiant, & qu'on connoît encore moins les moyens qu'on peut employer pour parvenir à la combinaison :

5.<sup>o</sup> Que la nature de l'acide nitreux paroissant aujourd'hui mieux connue qu'elle ne l'étoit autrefois, & l'existence de deux principes, savoir, l'air nitreux & le principe acidifiant, paroissant à peu-près démontré dans cet acide, il devient un moyen d'analyse précieux pour la Chimie, & qu'il peut en résulter de grandes lumières dans l'analyse végétale :

6.<sup>o</sup> Qu'il ne seroit pas impossible, sur-tout d'après la dernière expérience rapportée dans ce Mémoire, que la matière charbonneuse fût toute formée dans les végétaux, & qu'elle ne fût point l'ouvrage du feu, comme les Chimistes l'ont pensé jusqu'ici.

Toutes ces conséquences se trouveront développées, & plus solidement établies, par les exemples que je me propose de donner successivement dans des Mémoires particuliers.



## RAPPORT

FAIT

À L'ACADÉMIE DES SCIENCES,  
PAR LA CLASSE DE CHIMIE.

Le 21 Août 1779.

**L**E 23 Mai de l'année 1778, M. Sage a lu un Mémoire intitulé: *Observations sur les différentes substances métalliques, & principalement sur l'or qu'on trouve dans les cendres des végétaux.*

L'Auteur dit dans ce Mémoire, qu'il a retiré de l'or des cendres de sarment, dans la proportion de 4 gros 12 grains par quintal de ces cendres; dans celle de 2 gros 36 grains par quintal de cendres de bois de hêtre non flotté; dans celle d'un gros 56 grains par quintal de cendres de terreau; & enfin, il ajoute qu'il a tiré jusqu'à 2 onces 44 grains d'un quintal de terre végétale de jardin calcinée. Comme l'or est un métal qui n'éprouve point de destruction par aucune opération connue de l'Art, ni même probablement par celles de la Nature, & qu'il est d'ailleurs susceptible d'une division prodigieuse, & presque infinie, comme il est par cette raison répandu en particules d'une petitesse extrême dans presque tous les corps, sur-tout dans ceux des lieux habités par les hommes, on conçoit qu'il peut en passer quelques atomes même jusque dans les plantes, comme cela arrive à plusieurs autres métaux.

Cette dispersion étonnante de l'or est un fait curieux qui méritoit l'attention des Chimistes: aussi la présence de ce métal dans une infinité de corps n'avoit-elle pas échappé aux recherches exactes de plusieurs Chimistes, & en particulier de Beccher, de Cramer, qui ont assuré qu'il n'y avoit point de sable, d'argile, ni d'aucune autre espèce de terre dans la Nature, dans lesquels on ne pût démontrer au moins quelques

atomes d'or, & d'Henckel, qui, dans son Ouvrage intitulé, *Flora saturnifera*, a dit que les plantes même pouvoient réellement & essentiellement contenir de l'or.

Un fait comme celui-là est assez important pour mériter qu'on le vérifie, & qu'on le constate à plusieurs reprises; c'est sans doute ce motif louable qui a engagé M. Sage à travailler sur cet objet: si les résultats des expériences dont il a rendu compte dans son Mémoire, n'eussent été que des quantités très-petites, comme celles des Chimistes qui viennent d'être cités, le travail de cet Académicien auroit obtenu facilement la confiance que mérite son zèle: mais dans la vérification des faits dont il s'agit, les produits que M. Sage dit avoir obtenus en or pur, se sont trouvés si considérables, qu'ils ont étonné tous les Chimistes; ils ont fait dans le Public une sensation d'autant plus forte, qu'il en résulteroit que les cendres de sarment, & sur-tout la terre végétale de jardin, étoient de vraies mines d'or qu'on pouvoit même exploiter avec un grand bénéfice.

M. le Comte de Lauraguais a été un des premiers qui ait voulu satisfaire sa curiosité sur un fait si merveilleux; il est du moins le premier qui ait fait connoître à l'Académie, & par son moyen au Public, les résultats des travaux qu'il a faits & qu'il a fait faire à ce sujet: il a informé cette Compagnie par une lettre en date du 8 Août 1778, adressée à M. le Marquis de Condorcet Secrétaire, qu'ayant répété les expériences de M. Sage, avec le plus grand soin, & d'après le Mémoire de cet Académicien, qui lui avoit été confié, le produit de ses expériences n'avoit eu rien de comparable à ceux qui étoient annoncés dans le Mémoire de M. Sage, & il a joint à sa lettre un extrait des mêmes expériences, répétées à sa prière, par M.<sup>rs</sup> Darcet & Rouelle.

Le résultat du travail de ces Chimistes qui ont opéré en doses quadruples de celles de M. Sage; sur des terres de jardin & des cendres de sarment provenant de différents endroits, s'étant trouvé conforme à ceux qu'avoit eus d'abord M. le Comte de Lauraguais, c'est-à-dire presque nuls en

comparaison de ceux de M. Sage, M. de Lauraguais a fini par représenter à l'Académie qu'il seroit convenable qu'elle décidât irrévocablement cette question, de la quantité d'or qu'on peut retirer des matières végétales, & qu'elle chargeât plusieurs de ses Membres de vérifier les faits avec toute l'exactitude & tout le soin convenables : quatre jours après cette lettre, le 12 Août, M. Sage entrant dans les mêmes vues, lut à l'Académie un Supplément à son Mémoire, dans lequel il la prioit aussi de vouloir bien répéter ses expériences pour constater si l'on pouvoit extraire de l'or des végétaux, comme il l'avoit annoncé.

En conséquence, l'Académie a chargé toute la classe de Chimie de faire cette vérification, ce qui a été exécuté en dix séances ou assemblées, dans le Laboratoire de M. Baumé, & en une dans celui de M. Sage, ces Chimistes opérant chacun dans leur Laboratoire, sous les yeux des Commissaires de l'Académie & de plusieurs autres Académiciens & Savans, & particulièrement de M.<sup>rs</sup> Tillet, Desmarest, le Comte de Milly, de Fontanieu, le Duc de Chaulnes, le Baron de Diétrik, Racle, Essayeur de la Monnoie, Rey de Morande, & autres.

Les premières expériences ont été faites le mercredi 26 Août, dans le Laboratoire de M. Baumé, lui opérant, & M. Sage qui y avoit été invité, étant du nombre des spectateurs.

M. Baumé avoit brûlé d'avance, comme on en étoit convenu avec M. Sage, 100 livres de sarment de vigne; celui-ci étoit de Belleville : ces 100 livres avoient rendu 3 livres 2 onces de cendre grise.

On a pesé 1 once 24 grains de cette cendre, c'est-à-dire 600 grains poids de marc, représentant 6 quintaux ; on les a mêlés avec 300 grains ou 3 quintaux docimastiques de minium, 2 onces de flux noir, fait en présence de l'Assemblée, & 6 grains de poudre de charbon : ce sont les doses de M. Sage.

D'une autre part, on a fait un autre mélange de 300 grains

ou 3 quintaux du même minium pur & sans cendres, avec 1 once de flux noir, & 6 grains de poudre de charbon, pour en réduire le plomb, le passer à la coupelle, & en obtenir le grain de fin qu'il contient ordinairement.

Chacun de ces mélanges a été fait double, ce qui a formé quatre essais, qui ont été fondus successivement à la forge, dans des creusets d'Allemagne.

Quoiqu'il y ait eu quelques différences dans les circonstances de ces quatre fontes, & que leur produit en culot de plomb réduit n'ait pas été exactement de même poids dans chacune, ces fontes ont été cependant en général assez bonnes, & leur produit en plomb réduit a été d'environ 3 gros  $\frac{1}{2}$  plus ou moins quelques grains.

On a procédé ensuite à la coupellation de ces quatre essais à la manière ordinaire; ces coupellations ont bien réussi; chaque plomb a laissé sur la coupelle un petit bouton de retour ou grain de fin, blanc comme de l'argent, & ne paroissant nullement doré; ces grains de fin étoient tous fort petits, & ceux qui provenoient du plomb d'œuvre (a), ne paroissoient point sensiblement plus gros que les témoins (b).

Les opérations ayant été amenées à ce point, tous ceux sous les yeux desquels elles avoient été faites, ont signé la feuille sur laquelle on les inscrivoit à mesure qu'elles se faisoient: on a pesé ensuite ces boutons de retour à une bonne balance d'essai; celui d'un des essais provenant d'un culot de 3 gros 49 grains du plomb-d'œuvre a pesé 15 grains du poids fictif de la balance de M. Baumé, ce qui revient à  $\frac{2}{356}$  de grain du poids réel ou du poids de marc; le bouton de retour du témoin provenant d'un culot de ce plomb,

(a) C'est le nom qu'on donne en Métallurgie, au plomb enrichi par sa fonte avec des matières contenant de l'or & de l'argent; nous le donnons au plomb fondu avec la cendre de sarment, pour le distinguer du plomb pur.

(b) On nomme ainsi les grains de fin que contiennent naturellement presque toutes les espèces de plomb; il est nécessaire d'en connoître la quantité, dans tous les essais, pour la soustraire de grain de fin que fournit le plomb-d'œuvre.

552 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

pesant 3 gros 44 grains, a été trouvé du poids de  $\frac{4}{358}$  de grain poids de marc, ce qui fait  $\frac{1}{258}$  de différence dans le plomb-d'œuvre, paroïssoit plus riche. Mais comme cette quantité étoit infiniment petite en comparaison de celles que M. Sage avoit obtenues en son particulier, & que d'ailleurs, le grain de fin du plomb-d'œuvre ne paroïssoit que de l'argent pur comme celui du témoin, & non pas jaune & doré comme ceux des expériences que M. Sage avoit faites en son particulier; cet Académicien a inscrit ce qui suit sur le plumeau:

*Les produits que j'ai vus chez M. Baumé n'ont nul rapport avec ce que j'ai fait, le grain ne me paroissant nullement doré.*  
Signé SAGE.

Le lendemain Jeudi, 27 Août, nous nous sommes rassemblés plusieurs d'entre nous, dans le Laboratoire de M. Baumé, pour examiner & repeser encore plus exactement les quatre boutons de fin ou boutons de retour, des opérations de la veille, ayant remarqué, par le secours d'un microscope, que ces grains de fin n'étoient pas parfaitement nets, & qu'il y avoit à leur surface quelques particules de litharge ou de la coupelle; on les a aplatis sur un tas d'acier poli avec un marteau d'acier poli, & frottés ensuite sur du papier, pour en détacher les petits corps étrangers, ce qui les a nettoyés parfaitement, comme on s'en est assuré, en les examinant ensuite au microscope, puis on les a repesés à une petite balance d'essai, appartenante à M. Baumé, faite par le sieur Gallonde, laquelle est infiniment fine, & trébuche sensiblement à  $\frac{1}{1024}$  de grain, poids de marc; leurs poids se sont trouvés comme il suit.

Le grain de fin du premier plomb-d'œuvre  $\frac{1}{64}$  —  $\frac{1}{1024}$  de grain, poids de marc. Le grain de fin du second plomb-d'œuvre  $\frac{1}{64}$  un peu fort. Le grain de fin du premier témoin  $\frac{1}{64}$  —  $\frac{1}{112}$ .

Le grain de fin du second témoin  $\frac{1}{128}$  +  $\frac{1}{4}$ . Ces quantités, réduites en 1024<sup>es</sup>, reviennent à celles qui suivent.

Grain



Grain de fin du premier plomb-d'œuvre.....	$\frac{11}{1024}$ <sup>es</sup>
Grain de fin du second plomb-d'œuvre.....	$\frac{16}{1024}$ fort.
Grain de fin, premier témoin.....	$\frac{14}{1024}$
Grain de fin, second témoin.....	$\frac{10}{1024}$

Ces différences étant très-peu considérables, & s'éloignant d'ailleurs infiniment des produits de M. Sage, nous n'entrons point pour le présent dans de plus grands détails à ce sujet.

Nous ajouterons seulement, qu'ayant dissout dans de l'esprit de nitre très-pur, les boutons provenans tant du plomb-d'œuvre que des témoins, il ne nous est resté dans les deux cas que des minicules noires, extrêmement petites, que nous avons jugées être de l'or; celles des boutons du plomb-d'œuvre étoient un peu plus considérables, mais elles étoient les unes & les autres infiniment trop petites pour produire le moindre effet sur la balance qui trébuche, comme nous l'avons dit, sensiblement à  $\frac{1}{1024}$  degré.

Le même jour nous reçumes de M. Sage une lettre très-honnête & très-judicieuse, adressée à l'un de nous, par laquelle après avoir exposé que la différence de la manière de travailler de M. Baumé & de la sienne, pouvoit être la cause de celle qui se trouvoit entre nos produits & les siens, il nous invitoit à venir dans son laboratoire, pour le voir opérer sur les mêmes matières qui avoient été employées chez M. Baumé, & finissoit en protestant avec candeur qu'il ne lui en coûteroit rien pour convenir qu'il s'étoit trompé, si cela étoit en effet.

En conséquence de cette invitation, le Mardi 1.<sup>er</sup> Septembre 1778, vers les neuf heures du matin, nous nous sommes rendus au laboratoire de M. Sage, maison de M. Randel, attenant le Jardin du Roi.

M. Sage, en présence de l'Assemblée, a réduit du minium avec de la poix résine dans un creuset; il s'est trouvé 2 onces 2 gros de plomb réduit d'environ 3 onces de minium qui avoit été employé dans cette opération.

Ce plomb étoit destiné à deux opérations de coupellation, où à deux essais devant fournir les témoins.

Mém. 1778.

A a a a

D'une autre part, M. Sage a mêlé 1 once 24 grains, c'est-à-dire 600 grains ou 6 quintaux docimaftiques de la cendre de farment, ci-devant préparée par M. Baumé, & que M. Sage avoit approuvée, avec une demi-once 12 grains ou 3 quintaux docimaftiques du même minium, 2 onces de flux noir, fait sur le champ par M. Sage, en présence de l'Assemblée, & 6 grains de poudre de charbon.

Ce mélange a été fondu par M. Sage à la forge, très-bien, très-promptement & très-facilement.

Il en a fondu un second tout pareil avec le même succès : le culot du premier plomb-d'œuvre s'est trouvé de 3 gros 24 grains ; & celui du second plomb-d'œuvre, du poids de 3 gros 37 grains.

Ces deux plombs-d'œuvre, avec la quantité convenable de plomb réduit du minium pur, pour fournir deux essais & deux témoins, ont été passés par M. Sage, l'un après l'autre à la coupelle, non dans un fourneau de coupelle à la manière usitée, mais en plaçant immédiatement sur les charbons d'un fourneau ordinaire la coupelle simplement recouverte d'une moufle très-petite, à peine suffisante pour la couvrir, & en accélérant considérablement l'opération par le vent d'un soufflet, dirigé alternativement sur le charbon & sur le plomb ; méthode expéditive qui n'est point inconnue dans l'art des Essais.

Ces quatre coupellations ont été faites de même que les fontes précédentes, avec beaucoup de facilité, de promptitude & de succès.

Il est resté sur chaque coupelle un petit bouton de retour ; les quatre boutons paroissent à l'œil différer fort peu les uns des autres, pour la grosseur & pour la couleur ; ils étoient tous les quatre blancs comme de l'argent pur.

Après avoir été soigneusement nettoyés, ils ont été pesés à la petite balance très-sensible de M. Baumé.

Le bouton de retour du premier témoin a pesé  $\frac{1}{128}$  +  $\frac{1}{512}$  +  $\frac{1}{1024}$  de grain, poids de marc.

Le bouton de retour du premier témoin a pesé  $\frac{1}{128}$  +  $\frac{1}{256}$

de grain, poids de marc : les deux boutons de retour des deux plombs - d'œuvre ont pesé chacun  $\frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024}$  de grain, poids de marc : en réduisant ces quantités en 1024<sup>es</sup> on trouve,

Bouton de retour du plomb du premier témoin  $\frac{17}{1024}$ .

Bouton de retour du plomb du second témoin  $\frac{13}{1024}$ .

Bouton de retour des deux plombs-d'œuvre, chacun  $\frac{13}{1024}$ .

Si l'on compare ces produits avec ceux qu'on avoit obtenus chez M. Baumé, on trouvera, qu'en général, ils diffèrent peu, mais que l'avantage pour la quantité du fin, à l'exception de celle du plomb du second témoin, est en faveur des expériences faites chez M. Baumé.

Il s'ensuit, tant des opérations faites chez M. Baumé que de celles qui ont été faites chez M. Sage, que les grains de fin obtenus dans ces opérations, donnent par quintal réel du minium seul, de 33 à 36 grains; par quintal du plomb réduit & coupellé pour fournir les témoins, de 37 à 40 grains; par quintal de minium employé pour le plomb-d'œuvre, 39 grains; & par quintal de ce même plomb-d'œuvre, de 46 à 48 grains.

Mais comme il ne faut compter comme produit des cendres, que l'excès des grains de fin du plomb-d'œuvre sur les grains de fin des témoins, il s'ensuit que le quintal de cendre n'a fourni que 8 à 9 grains de fin, quantité très-inférieure à celle de 4 gros 12 grains, & l'on doit observer que ces 8 ou 9 grains de fin, loin d'être de l'or, ne paroissent que de l'argent à peu-près pur : il y en avoit cependant un qui paroissoit doré; mais ce petit bouton ayant été aplati & nettoyé, a paru aussi blanc que les autres.

Pour connoître la quantité d'or que pouvoit receler cet argent, nous avons mis un des boutons de retour du plomb-d'œuvre dans de l'eau-forte très-pure; il a été dissous promptement, à la réserve d'une minicule noirâtre, sur laquelle l'eau-forte a refusé d'agir : cette minicule a été lavée avec de l'eau pure, séchée & pesée à la petite balance la plus sensible de

M. Baumé; son poids s'est trouvé au plus de  $\frac{1}{1024}$  de grain; ce qui revient exactement à un grain & demi par quintal réel de la cendre employée.

Pour constater que cette minicule étoit réellement de l'or, nous lui avons appliqué un peu d'eau régale, la dissolution s'en est faite promptement; enfin, une petite lame d'étain ayant été mise dans cette dissolution, affoiblie par de l'eau, la liqueur a pris peu-à-peu une teinte purpurine, mais infiniment foible.

Ces expériences & plusieurs autres que nous avons faites sur ce même objet, & dont nous ne rendons pas compte ici, parce qu'elles présentent des résultats à peu-près semblables, ramenoient nos connoissances sur l'existence de l'or dans les végétaux, précisément au même point où elles étoient avant les dernières recherches qui viennent d'être faites sur cet objet, & il en résultoit, comme l'ont avancé les anciens Chimistes, & comme M.<sup>rs</sup> de Lauraguais, Darcet, Rouelle & Bertholet, l'ont confirmé par des expériences très-exactes, qu'on retire quelques minicules d'or de presque toutes les substances minérales & végétales, traitées avec le minium; mais que ces minicules ne forment pas communément un objet de plus de deux ou trois grains par quintal réel.

Nous regardions d'après cela notre mission comme remplie, & nous étions au moment de faire notre rapport à l'Académie; lorsqu'en réfléchissant avec plus d'attention sur toutes les circonstances de nos opérations, nous nous sommes aperçus que dans toutes nos expériences, les quantités de fin, tant en or qu'en argent, étoient d'autant plus grandes, que le coup du feu que nous avions donné pour opérer la fusion & la réduction, étoit plus fort, & que les différences même étoient très-considérables: cette circonstance a commencé à nous faire soupçonner que les quantités infiniment petites d'or que nous avions obtenues, pouvoient bien ne pas venir de la cendre, mais du minium avec lequel nous les avions combinées, & voici à cet égard le raisonnement que nous avons fait.

L'or n'est point susceptible en général de se calciner; il

est donc probable, que s'il en existe dans le minium, il s'y trouve en particules très-fines, & divisées pour ainsi-dire à l'infini : on conçoit que si l'on revivifie de semblable minium par la seule addition de la poix résine, c'est-à-dire à un degré de chaleur très-médiocre, le plomb doit couler & se rassembler, mais que les minicules d'or qui sont beaucoup moins fusibles que le plomb, ou pour mieux dire, qui ne le sont point au degré de feu qu'on emploie pour réduire le minium par la poix résine, doivent rester dans les scories : la même chose ne doit point arriver lorsqu'on revivifie le minium avec du flux noir & avec des cendres ; alors, la nécessité où l'on est de donner un grand coup de feu pour faire fondre les cendres & le flux, ne permet plus à l'or de demeurer sans se fondre, le plomb s'en saisit & devient aussi riche qu'il le peut être.

Ces nouvelles considérations exigeoient de nous une nouvelle suite d'expériences, & voici le plan auquel nous avons cru devoir nous arrêter ; nous prévenons qu'il n'est aucune des expériences que nous allons énoncer que nous n'ayons répétée plusieurs fois, afin d'éviter de tirer des conséquences précipitées. Nous avons pris une certaine quantité du même minium que nous avons employé précédemment ; nous en avons opéré la réduction par la poix résine, dans un chaudron de fer, à un degré de feu très-médiocre, & nous avons mis à part le plomb qui en a résulté ; nous avons ensuite mêlé la portion de ce même minium qui étoit restée dans le chaudron, & qui avoit refusé de se réduire, tantôt avec du flux noir, tantôt avec de l'alkali fixe ordinaire, & nous l'avons poussé au feu jusqu'au point de mettre le flux ou l'alkali en fusion complète, & nous avons obtenu, par ce procédé, une nouvelle quantité de plomb que nous avons mis à part sans les confondre avec le premier.

Ayant passé séparément ces deux plombs à la coupelle, nous avons observé que le plomb de la première goutte, contenoit à peine 36 à 37 grains de fin par quintal, tandis que la dernière portion, celle qui avoit été obtenue par la

violence du feu, en contenoit jusqu'à soixante & plus; que ces boutons de fin différoient non-seulement par leur poids, mais encore par leur qualité; que celui du premier plomb ne contenoit point d'or en quantité sensible, tandis que celui du second plomb obtenu par la revivification à grand feu, nous a fourni des minicules d'or presque égales à celles que nous avions retirées dans les expériences avec la cendre; nous disons presque égales, parce qu'en effet, quoiqu'en opérant comme nous venons de le dire sur du minium seul & sans addition de cendre, nous ayons toujours retiré de l'or; la quantité cependant en étoit constamment un peu moindre qu'avec l'addition de la cendre, mais cette différence ne s'est trouvée que d'un demi-grain ou d'un grain tout au plus par quintal réel, quantité beaucoup trop petite pour qu'on en puisse rien conclure, & dont il ne nous auroit pas été même possible de nous apercevoir, si nous n'eussions été munis d'instrumens d'une exactitude rare.

Nous concluons donc définitivement de toutes les expériences ci-dessus :

1.<sup>o</sup> Que la quantité d'or qu'on retire par la combinaison du minium avec les cendres, est infiniment petite, & qu'elle n'exécède pas un ou deux grains par quintal réel de la cendre employée, ce qui est bien différent de 300 grains ou de 4 gros 12 grains par quintal que M. Sage a annoncés dans le Mémoire qu'il a lû à l'Académie :

2.<sup>o</sup> Qu'il paroît prouvé par nos expériences, qu'une partie de cet or existoit dans le minium, ce qui réduit à quelques fractions de grains par quintal réel, c'est-à-dire à des quantités qu'on peut regarder comme absolument insensibles, les minicules d'or qu'on peut attribuer aux cendres :

3.<sup>o</sup> Que nous ne faisons même aucune difficulté de conclure qu'il est très-probable que cette quantité infiniment petite sur laquelle il peut rester quelque incertitude, vient plutôt du minium que de la cendre :

4.<sup>o</sup> Que la cendre dont M. Sage a cru avoir extrait de l'or, n'est qu'un intermède à l'acide desquels il est parvenu à extraire ce qui existoit dans le minium, & que probablement par un effet du hasard, il aura employé dans ses expériences un minium plus riche en or, que n'est communément celui du Commerce :

5.<sup>o</sup> Enfin, qu'il est d'une grande importance dans les travaux docimastiques d'opérer sur le minium & sur le plomb destiné à servir de témoin exactement de la même manière & au même degré de feu que sur le plomb-d'œuvre, & que c'est faute d'avoir eu cette attention que M. Sage, & beaucoup de Chimistes avant lui, ont cru trouver dans un grand nombre de matières des parcelles d'or, qui existoient réellement dans le minium qui leur servoit d'intermède.

*Signé* MACQUER, CADET, LAVOISIER, BAUMÉ,  
BUCQUET & CORNETTE.



OBSERVATIONS  
BOTANICO-MÉTÉOROLOGIQUES,  
*Faites au château de Denainvilliers, proche Pithiviers  
en Gâtinois, pendant l'année 1777.*

Par M. DU HAMEL.

AVERTISSEMENT.

LES Observations météorologiques sont divisées en sept colonnes, de même que les années précédentes. On s'est toujours servi du thermomètre de M. de Reaumur, & on part du point zéro, ou du terme de la glace: la barre à côté du chiffre indique que le degré du thermomètre étoit au-dessous de zéro; quand les degrés sont au-dessus, il n'y a point de barre; o désigne que la température de l'air étoit précisément au terme de la congélation.

Il est bon d'être prévenu que dans l'Automne, quand il a fait chaud plusieurs jours de suite, il gèle, quoique le thermomètre, placé en dehors & à l'air libre, marque 3 & quelquefois 4 degrés au-dessus de zéro; ce qui vient de ce que le mur & la boîte du thermomètre ont conservé une certaine chaleur; c'est pourquoi on a mis dans la septième colonne, *Gelée*.

Les Observations ont été faites à huit heures du matin, à deux heures après midi, & à onze heures du soir.

*Nota.* Les Observations du baromètre, à commencer du 1.<sup>er</sup> du mois de Janvier, ont été faites sur un baromètre callé sur celui de l'Observatoire, qui est 3 lignes plus haut que celui dont nous nous servions les années précédentes.

JANVIER.



DES SCIENCES. 561  
JANVIER.

Jours du MOIS.	VENTS.	THERMOMÈTRE.			BAROM.		ÉTAT DU CIEL.
		Matin.	Midi.	Soir.			
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	ponces	lignes	
1.	S. O.	— 8.	2 $\frac{1}{2}$ .	3.	27.	7	neigeux.
2.	O.	5.	2 $\frac{1}{2}$ .	4.	27.	8	couvert.
3.	N.	4.	1.	2 $\frac{1}{2}$ .	27.	8	neigeux.
4.	N. O.	2.	$\frac{1}{2}$ .	2.	27.	8 $\frac{1}{2}$	couvert & neigeux.
5.	O.	3 $\frac{1}{2}$ .	0.	3 $\frac{1}{2}$ .	27.	7	couvert.
6.	S.	5 $\frac{1}{2}$ .	0.	3.	27.	6	couvert avec ventvoles de neige.
7.	O.	4.	3.	4.	27.	6	couvert; après midi brouillard.
8.	O.	6 $\frac{1}{2}$ .	4.	5.	27.	4	couvert; le soir neige.
9.	O.	7.	2.	2.	27.	9	couvert.
10.	S.	$\frac{1}{2}$ .	2.	1.	27.	5	bruine & couvert
11.	S.	1 $\frac{1}{2}$ .	3 $\frac{1}{2}$ .	3 $\frac{1}{2}$ .	27.	6	couvert & bruine.
12.	S.	8.	10.	9.	27.	7	couvert; le matin pluvieux.
13.	S.	7.	9 $\frac{1}{2}$ .	7 $\frac{1}{2}$ .	27.	8	beau avec nuages.
14.	S.	6 $\frac{1}{2}$ .	9 $\frac{1}{2}$ .	6.	27.	9	idem.
15.	S.	2.		4.	27.	10	beau.
16.	S.	1.	7.	2 $\frac{1}{2}$ .	27.	10	idem.
17.	S.	— $\frac{1}{2}$ .	2.	— $\frac{1}{2}$ .	27.	11	brouillard.
18.	S.	$\frac{1}{2}$ .	1.	0.	27.	10	idem.
19.	S.	0.	3 $\frac{1}{2}$ .	3 $\frac{1}{2}$ .	27.	10	bruine.
20.	S.	3.	5.	3.	27.	8 $\frac{1}{2}$	brouillard.
21.	S.	3 $\frac{1}{2}$ .	5.	4 $\frac{1}{2}$ .	27.	5	bruine ou pluvieux.
22.	S.	1 $\frac{1}{2}$ .	3.	2.	27.	5	couvert.
23.	S.	1.	2.	2.	27.	9	couvert; le soir venteux.
24.	S.	5 $\frac{1}{2}$ .	6.	4.	27.	6	pluvieux & venteux.
25.	O.	0.	1 $\frac{1}{2}$ .	0.	27.	11 $\frac{1}{2}$	couvert.
26.	N.	— 1.	1 $\frac{1}{2}$ .	0.	27.	11	idem.
27.	N.	$\frac{1}{2}$ .	1.	0.	27.	8	idem.
28.	S.	$\frac{1}{2}$ .	$\frac{1}{2}$ .	0.	27.	7	neigeux.
29.	N.	$\frac{1}{2}$ .	2.	0.	27.	7 $\frac{1}{2}$	couvert.
30.	N.	0.	1 $\frac{1}{2}$ .	— 3.	27.	9	matin neige; l'ap. m. beau avec nuag.
31.	N.	— 1.	1 $\frac{1}{2}$ .	2.	28.	$\frac{1}{2}$	beau avec nuages.

Mém. 1778.

Bbbb

562 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Le commencement de ce mois a été neigeux, il y a eu 5 à 6 pouces d'épais de neige dans la plaine. Le 10, elle a commencé à fondre, & le temps a été assez beau, mais il faisoit très-mauvais voiturier; on a vu quelques grosses grives, appelées *chachats*, mais peu; il y avoit cependant beaucoup de senelles: les rhumes ont été fort fréquens durant ce mois. Le 30, il est tombé de la neige environ 2 pouces d'épaisseur dans la campagne; les grains ont été un peu fatigués de l'hiver, sur-tout ceux qui ont été faits par la sécheresse.

## FÉVRIER.

Jours du MOIS.	VENTS.	THERMOMÈTRE.			BAROM.	ÉTAT DU CIEL.
		Matin.	Midi.	Soir.		
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	ponces lignes	
1.	S.	— 2.	2.	2 $\frac{1}{2}$ .	27. 6	couvert & nuageux.
2.	S.	0.	1 $\frac{1}{2}$ .	3.	27. 6	couvert; tombé de la neige le matin.
3.	S.	1.	1 $\frac{1}{2}$ .	1 $\frac{1}{2}$ .	27. 7	nuageux.
4.	S.	— 1.	3.	1 $\frac{1}{2}$ .	27. 8	couvert; il est tombé de la neige.
5.	O.	3.	1.	1 $\frac{1}{2}$ .	27. 8	beau avec nuages.
6.	N.	3.	0.	— 2 $\frac{1}{2}$ .	27. 8	couvert.
7.	E.	2 $\frac{1}{2}$ .	1 $\frac{1}{2}$ .	1 $\frac{1}{2}$ .	27. 8	<i>idem.</i>
8.	E.	3 $\frac{1}{2}$ .	0.	1.	27. 7	<i>idem.</i>
9.	E.	1 $\frac{1}{2}$ .	0.	1.	27. 8	couvert avec des ventvoiles de neige.
10.	S.	0.	1.	1.	27. 9	couvert & neigeux.
11.	S.	— 1.	1.	1 $\frac{1}{2}$ .	27. 6	couvert.
12.	S.	1.	1 $\frac{1}{2}$ .	2.	27. 6	<i>idem.</i>
13.	N.	1 $\frac{1}{2}$ .	2 $\frac{1}{2}$ .	0.	27. 6 $\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
14.	E.	0.	3 $\frac{1}{2}$ .	1 $\frac{1}{2}$ .	27. 7	beau.
15.	E.	— 1 $\frac{1}{2}$ .	2.	— 1 $\frac{1}{2}$ .	27. 3	couvert.
16.	N. O.	1 $\frac{1}{2}$ .	1.	2.	27. 3	beau avec nuages.
17.	E.	4 $\frac{1}{2}$ .	1 $\frac{1}{2}$ .	2 $\frac{1}{2}$ .	27. 1 $\frac{1}{2}$	<i>idem.</i>
18.	E.	4 $\frac{1}{2}$ .	1 $\frac{1}{2}$ .	2.	27. 2	<i>idem.</i>
19.	S.	3 $\frac{1}{2}$ .	1 $\frac{1}{2}$ .	1 $\frac{1}{2}$ .	27. 4	nuageux.
20.	S.	1 $\frac{1}{2}$ .	1 $\frac{1}{2}$ .	4.	27. 1 $\frac{1}{2}$	neige & pluvieux.
21.	S.	3 $\frac{1}{2}$ .	7 $\frac{1}{2}$ .	6 $\frac{1}{2}$ .	27. 2 $\frac{1}{2}$	pluvieux.
22.	S.	8 $\frac{1}{2}$ .	12.	7 $\frac{1}{2}$ .	27. 3	beau avec nuages.
23.	S.	7 $\frac{1}{2}$ .	11.	7 $\frac{1}{2}$ .	27. 5	<i>idem.</i>
24.	S.	7 $\frac{1}{2}$ .	11.	7.	27. 8 $\frac{1}{2}$	<i>idem.</i>
25.	S.	7.	12 $\frac{1}{2}$ .	7.	27. 11	beau.
26.	S.	3 $\frac{1}{2}$ .	13 $\frac{1}{2}$ .	7 $\frac{1}{2}$ .	27. 10	beau; le soir Aurore boréale.
27.	S.	3 $\frac{1}{2}$ .	14 $\frac{1}{2}$ .	8 $\frac{1}{2}$ .	27. 9 $\frac{1}{2}$	beau.
28.	N.	3.	14.	7 $\frac{1}{2}$ .	27. 10	beau avec nuages.

564 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Ce mois a été froid jusque vers le milieu , ensuite il a fait assez beau: il a encore paru de grosses grives, nommées *chachats*; il y en avoit beaucoup au commencement du mois: la rivière d'Essonne a été basse. Le 26, on a vu à 8 heures du soir une Aurore boréale très-considérable: on a commencé à labourer vers le milieu de ce mois pour faire les mars, & à tailler les vignes. Vers la fin il a fait un très-beau temps; les Laboureurs travailloient en chemise depuis 8 heures du matin jusqu'au Soleil couché; les vignes & les arbres commençoient déjà à travailler; il y avoit des abricotiers en fleurs.

## M A R S.

Jours du Mois.	VENTS.	THERMOMÈTRE.			BAROM.	ÉTAT DU CIEL.
		Matin.	Midi.	Soir.		
		Degrés.	Degrés.	Degrés.		
1.	S.	4 $\frac{1}{2}$ .	12.	8 $\frac{1}{2}$ .	27. 9	beau avec nuages.
2.	S.	6.	15.	11.	27. 7	<i>idem.</i>
3.	S.	8.	11.	8.	27. 10	nuageux.
4.	N.	4 $\frac{1}{2}$ .	13.	8 $\frac{1}{2}$ .	27. 8 $\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
5.	E.	7.	12.	7.	27. 4 $\frac{1}{2}$	beau avec gros nuages; le soir pluie.
6.	N.	4.	5.	4.	27. 8	couvert.
7.	N.	2.	5.	1.	27. 6	nuageux.
8.	E.	— 2 $\frac{1}{2}$ .	6.	1 $\frac{1}{2}$ .	27. 3	beau avec nuages & vent.
9.	N.	1 $\frac{1}{2}$ .	6.	3 $\frac{1}{2}$ .	27. 3	beau avec nuages.
10.	N.	1 $\frac{1}{2}$ .	5.	3.	27. 5	couvert & vent.
11.	N.	1 $\frac{1}{2}$ .	3 $\frac{1}{2}$ .	2.	27. 4	couvert; le soir pluvieux & vent.
12.	N.	1.	4.	2 $\frac{1}{2}$ .	27. 4 $\frac{1}{2}$	couvert, vent & pluie.
13.	N.	— 1 $\frac{1}{2}$ .	5.	— 1.	27. 7	beau.
14.	O.	1.	7.	5.	27. 9	couvert & pluie sur le soir.
15.	O.	5.	11.	6 $\frac{1}{2}$ .	27. 7	beau avec nuages.
16.	S. O.	5.	10.	6 $\frac{1}{2}$ .	27. 2	pl. v. a tonn. un fort coup à 2 <sup>h</sup> ap. m.
17.	S. O.	6.	10.	8.	27. 6 $\frac{1}{2}$	nuageux avec ventvoles de pluie.
18.	S.	9.	11.	10.	27. 8	couvert & bruine.
19.	S. O.	8.	14 $\frac{1}{2}$ .	8.	27. 6	mat. beau, nuages; l'ap. m. pl. & v.
20.	O.	6 $\frac{1}{2}$ .	11.	8 $\frac{1}{2}$ .	27. 8	couvert avec vent & ventv. de pluie.
21.	O.	6 $\frac{1}{2}$ .	10 $\frac{1}{2}$ .	6.	27. 10	beau nuag. vent, quelq. goutt. d'eau.
22.	S. O.	4 $\frac{1}{2}$ .	9.	7 $\frac{1}{2}$ .	27. 11	beau le matin; l'après midi pluvieux.
23.	O.	4.	10.	8.	28.	beau avec nuages.
24.	S. E.	6 $\frac{1}{2}$ .	17.	11.	27. 11	beau.
25.	S.	7.	20.	12 $\frac{1}{2}$ .	27. 10	<i>idem.</i>
26.	E.	8.	21.	12.	27. 10	<i>idem.</i>
27.	E.	7 $\frac{1}{2}$ .	21.	12.	27. 10	<i>idem.</i>
28.	E.	7 $\frac{1}{2}$ .	19.	12.	27. 9	<i>idem.</i>
29.	N.	8.	8.	4.	27. 9	couvert.
30.	N.	1 $\frac{1}{2}$ .	1 $\frac{1}{2}$ .	1 $\frac{1}{2}$ .	27. 8	neigeux & venteux.
31.	N.	1 $\frac{1}{2}$ .	4 $\frac{1}{2}$ .	1.	27. 7	couvert.

566 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Le commencement de ce mois a été fort beau & assez doux ; les hoyaux ont fleuri : on a continué à tailler la vigne ; elle avoit fort peu de bois : on attribue cela à la grande sécheresse qu'il a fait l'été de 1776 ; les blés se sont bien rétablis & ont eu très-bonne façon durant ce mois. Dans les premiers jours du mois on a travaillé à semer les avoines, & on a eu beaucoup de peine à cause du grand vent, qui étoit très-froid. Les 13 & 14, il a gelé à ne pouvoir labourer : la rivière d'Essonne a toujours été basse. Il a fait de très-beaux jours vers la fin du mois : les arbres ont poussé leurs feuilles ; les abricotiers, les pêcheurs, les cerisiers & les pruniers, étoient en pleine fleur. Les 29, 30 & 31, il a gelé le matin à glace, cela n'a pas beaucoup gâté, parce qu'il a fait du vent : il n'a pas paru d'hirondelles.

## AVRIL.

Jours du MOIS.	VENTS.	THERMOMÈTRE.			BAROM.	ÉTAT DU CIEL.
		Matin.	Midi.	Soir.		
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces lignes	
1.	N.	1.	7.	4 $\frac{1}{2}$ .	27. 8	couv. nuag. ☉ se montre; gel. à gl.
2.	N.	1.	7 $\frac{1}{2}$ .	3 $\frac{1}{2}$ .	27. 9 $\frac{1}{2}$	beau avec nuag. gel. le mat. à glace.
3.	N.	1 $\frac{1}{2}$ .	8.	5.	27. 10	couvert.
4.	N.	3.	7 $\frac{1}{2}$ .	3.	27. 11 $\frac{1}{2}$	nuageux.
5.	N.	0.	7 $\frac{1}{2}$ .	1 $\frac{1}{2}$ .	28.	beau avec nuages; il a gelé à glace.
6.	N.	— 2.	5 $\frac{1}{2}$ .	1 $\frac{1}{2}$ .	27. 11	beau avec nuag. gel. à gl. épais de 2 <sup>l</sup> .
7.	N.	1 $\frac{1}{2}$ .	5 $\frac{1}{2}$ .	1.	27. 9 $\frac{1}{2}$	beau avec nuages, vent; gelée à glac.
8.	N.	$\frac{1}{2}$ .	9 $\frac{1}{2}$ .	6.	27. 8	beau avec nuages & grand vent.
9.	N. E.	4.	10 $\frac{1}{2}$ .	8.	27. 10	beau avec nuages.
10.	E.	2 $\frac{1}{2}$ .	14.	9.	27. 11	beau.
11.	S.	4.	17.	11 $\frac{1}{2}$ .	27. 11	<i>idem.</i>
12.	S.	7 $\frac{1}{2}$ .	17 $\frac{1}{2}$ .	8 $\frac{1}{2}$ .	27. 10	le matin nuageux; l'après midi pluv.
13.	S.	7 $\frac{1}{2}$ .	12.	9.	27. 8 $\frac{1}{2}$	mat. beau, nuag. l'ap. m. couv. pluv.
14.	N.	6.	8 $\frac{1}{2}$ .	6.	27. 11	couvert & pluie.
15.	N.	4.	9.	6.	28.	couvert.
16.	N.	5 $\frac{1}{2}$ .	12.	8.	27. 10	<i>idem.</i>
17.	N.	6.	15.	10 $\frac{1}{2}$ .	27. 3	beau avec nuag. tonné sur les 6 <sup>h</sup> soir.
18.	N.	5 $\frac{1}{2}$ .	12 $\frac{1}{2}$ .	3.	27. 5	couvert & pluvieux.
19.	N.	3 $\frac{1}{2}$ .	8.	2.	27. 9	beau avec nuag. giboulées & grésil.
20.	N. O.	— 1.	8 $\frac{1}{2}$ .	5.	27. 10	beau avec nuages; il a gelé à glace.
21.	S.	7 $\frac{1}{2}$ .	17.	12.	27. 8	beau avec nuages.
22.	N. O.	10.	15.	11.	27. 9	beau avec des nuages & du vent.
23.	O.	8.	15.	9.	27. 8	pluv. tonn. écl. un peu de grêle.
24.	S.	8.	11.	8.	27. 11	nuageux, vent & pluie par ondées.
25.		4.	11 $\frac{1}{2}$ .	6.	28. 1	beau avec des nuages.
26.	N.	4.	11.	6.	27. 10	beau avec nuages, gelée blanche.
27.	E.	4.	12.	5.	27. 11	beau avec nuages.
28.	S. O.	1 $\frac{1}{2}$ .	11.	8 $\frac{1}{2}$ .	27. 9	beau avec nuages; gelée blanche.
29.	N.	6.	17.	13 $\frac{1}{2}$ .	27. 7	beau avec nuages.
30.		10.	16.	10 $\frac{1}{2}$ .	27. 6	pluvieux.

568 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Ce mois a été au commencement très-froid & sec. Le 6, il a gelé à glace de l'épaisseur de 2 lignes, ce qui a gâté la vigne qui commençoit à pousser, de sorte que les jeunes vignes les plus avancées ont été gelées à moitié; du côté de Rebrechien elles l'ont été entièrement: on a fini vers la moitié de ce mois de semer les avoines, & ensuite on a semé les pois & vesces.

Le milieu & la fin de ce mois ont été fort humides: les avoines, pois & vesces ont très-bien levé; les blés étoient très-beaux; les seigles ont été un peu attaqués de cette dernière gelée; les cerisiers & les pruniers étoient en pleine fleur; mais la gelée de la nuit du 5 au 6 en a bien gâté, ainsi que les abricots, les pêches & les poires.

Le 3, on a vu des hirondelles voler dans la plaine: on a entendu le rossignol dans le parc le 17. Le 19, le blé froment d'élite s'est vendu à Pithiviers vingt-deux livres le setier, pesant 240 livres. Vers le 23, toutes les charmillles ont poussé leurs feuilles, ainsi que les tilleuls: la rivière d'Essonne a été basse.

*MAI.*



## M A I.

Jours du MOIS.	VENTS.	THERMOMÈTRE.			BAROM.	ÉTAT DU CIEL.
		Matin.	Midi.	Soir.		
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces lignes	
1.	S. E.	10.	15.	11 $\frac{1}{2}$ .	27. 4	vent avec pluie; il a tonné l'ap. m.
2.	S. E.	10.	13.	9 $\frac{1}{2}$ .	27. 5	pluie par ondées avec tonn. l'ap. m.
3.	S. E.	9 $\frac{1}{2}$ .	11 $\frac{1}{2}$ .	9 $\frac{1}{2}$ .	27. 6	pluvieux; il a tonné l'ap. m. au loin.
4.	S. E.	9 $\frac{1}{2}$ .	13 $\frac{1}{2}$ .	8.	27. 8	pluvieux.
5.	S. E.	8 $\frac{1}{2}$ .	11.	8.	27. 10	<i>idem.</i>
6.	S. O.	9 $\frac{1}{2}$ .	13.	11.	27. 10	couvert.
7.	N.	10.	14 $\frac{1}{2}$ .	12.	27. 11	couvert & pluvieux.
8.	N. E.	8 $\frac{1}{2}$ .	13.	10 $\frac{1}{2}$ .	27. 11	beau.
9.	S.	10 $\frac{1}{2}$ .	20.	16 $\frac{1}{2}$ .	27. 7	beau avec nuages.
10.	S. O.	10 $\frac{1}{2}$ .	13 $\frac{1}{2}$ .	10.	27. 10	couvert & venteux.
11.	S.	9 $\frac{1}{2}$ .	15.	8 $\frac{1}{2}$ .	27. 9 $\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
12.	N. O.	6.	4.	4.	27. 11	pluvieux avec grêle & tonnerre.
13.	S.	3 $\frac{1}{2}$ .	15 $\frac{1}{2}$ .	9.	27. 8	beau avec nuag. il a gelé bl. le matin.
14.	S.	7 $\frac{1}{2}$ .	14.	7.	27. 4	beau avec nuages; le soir bruine.
15.	S.	6 $\frac{1}{2}$ .	13 $\frac{1}{2}$ .	8.	27. 2	nuageux; le soir il a éclairé.
16.	O.	7.	9 $\frac{1}{2}$ .	6.	27. 4	couvert; le soir pluvieux.
17.	O.	6 $\frac{1}{2}$ .	9 $\frac{1}{2}$ .	6.	27. 7	pluvieux.
18.	S.	5 $\frac{1}{2}$ .	12 $\frac{1}{2}$ .	7.	27. 8	beau avec nuages.
19.	S.	7.	14.	9 $\frac{1}{2}$ .	27. 6	pluvieux.
20.	S.	9 $\frac{1}{2}$ .	14.	9.	27. 7	pluvieux; il a tonné au loin.
21.	S.	9.	14 $\frac{1}{2}$ .	9.	27. 9 $\frac{1}{2}$	pluv. tonn. au loin; tombé un peu gr.
22.	S.	8.	12.	10.	27. 9	couvert.
23.	S.	10.	15.	13.	27. 9	nuageux.
24.	S.	9.	14.	9.	27. 5	pluvieux.
25.	E.	7 $\frac{1}{2}$ .	14.	9.	27. 7	couvert.
26.	S. O.	7 $\frac{1}{2}$ .	15.	9.	27. 9	beau avec nuages.
27.	S. O.	9.	15.	10.	27. 10	<i>idem.</i>
28.	O.	9.	14.	8.	27. 10	pluvieux.
29.	N.	9.	14.	11 $\frac{1}{2}$ .	27. 11	beau avec nuages; il a tonné au loin.
30.	S.	10 $\frac{1}{2}$ .	15.	10 $\frac{1}{2}$ .	27. 10	mat. pluv. l'ap. m. beau avec nuages.
31.	N.	10.	17 $\frac{1}{2}$ .	13 $\frac{1}{2}$ .	27. 10	beau avec nuages.

Mém. 1778.

Cccc

370 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Ce mois a été fort pluvieux & froid; les vignes ont été long-temps à pousser, à cause du froid, elles montraient un peu de raisins dans le fromenté des jeunes vignes, mais dans les vieilles il y en avoit fort peu; ainsi il n'y avoit pas lieu d'espérer une bonne année: le vin de la récolte de 1775 s'est vendu cinquante-cinq livres le poinçon; celui de la récolte de 1776, trente-cinq livres: on a semé les pois & les fèves, & planté les pommes de terre; la saison y a été favorable, elles n'ont point été long-temps à sortir de terre: la rivière d'Essonne a augmenté & même a débordé; les seigles ont fleuri; vers la fin de ce mois ils ont épié fort hauts & étoient très-beaux, ainsi que tous les autres grains.

## J U I N.

Jours du Mois.	VENTS.	THERMOMÈTRE.			BAROM.	ÉTAT DU CIEL.
		Matin.	Midi.	Soir.		
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces lignes	
1.	S. O.	14 $\frac{1}{2}$ .	20.	14.	27. 10 $\frac{1}{2}$ .	beau avec nuages.
2.	N. E.	14.	20.	14.	28.	<i>idem.</i>
3.	N.	14.	22.	15.	28.	beau.
4.	N.	13.	22.	17.	27. 10 $\frac{1}{2}$ .	mat. pluv. l'ap. m. beau, n. & tonn.
5.	N.	14.	21.	13 $\frac{1}{2}$ .	28.	beau avec n. l'ap. m. n. v. tonn. loin.
6.	N.	8 $\frac{1}{2}$ .	17.	11.	28.	beau avec nuages & vent froid.
7.	N.	9.	19.	11 $\frac{1}{2}$ .	27. 9 $\frac{1}{2}$ .	beau avec nuages.
8.	N.	9 $\frac{1}{2}$ .	17 $\frac{1}{2}$ .	11 $\frac{1}{2}$ .	27. 8.	beau avec du vent.
9.	N.	8 $\frac{1}{2}$ .	16.	9 $\frac{1}{2}$ .	27. 8.	beau avec vent & nuages.
10.	N. E.	7 $\frac{1}{2}$ .	15.	9.	27. 9.	beau avec nuages.
11.	S.	9.	15.	12.	27. 7.	beau avec nuages & vent v. de pluie.
12.	S. O.	10 $\frac{1}{2}$ .	16.	10 $\frac{1}{2}$ .	27. 8.	beau avec nuages; pluie par ondées.
13.	S. O.	8.	15 $\frac{1}{2}$ .	11 $\frac{1}{2}$ .	27. 9.	beau avec nuages.
14.	S.	10.	17 $\frac{1}{2}$ .	14.	27. 10.	nuageux.
15.	S.	10 $\frac{1}{2}$ .	17 $\frac{1}{2}$ .	14.	27. 10 $\frac{1}{2}$ .	beau avec nuages.
16.	S.	11 $\frac{1}{2}$ .	20.	16 $\frac{1}{2}$ .	27. 9.	<i>idem.</i>
17.	S.	10 $\frac{1}{2}$ .	17 $\frac{1}{2}$ .	10 $\frac{1}{2}$ .	27. 11.	tonné de gr. mat. couv. tout le jour.
18.	S. O.	9 $\frac{1}{2}$ .	13 $\frac{1}{2}$ .	12 $\frac{1}{2}$ .	28. 1.	beau avec nuages.
19.	S.	9 $\frac{1}{2}$ .	21.	15.	27. 11.	beau.
20.	S.	9 $\frac{1}{2}$ .	15.	12.	27. 8.	pluvieux.
21.	S.	11.	15 $\frac{1}{2}$ .	11 $\frac{1}{2}$ .	27. 9.	beau avec nuages & bruine.
22.	S.	10 $\frac{1}{2}$ .	15.	11.	27. 7 $\frac{1}{2}$ .	pluvieux.
23.	S.	10.	13 $\frac{1}{2}$ .	9.	27. 10.	beau avec nuages & vent.
24.	N.	9.	12.	9.	28. $\frac{1}{2}$ .	pluvieux.
25.	N.	10.	16 $\frac{1}{2}$ .	11 $\frac{1}{2}$ .	28. 2.	beau avec nuages.
26.	S.	12 $\frac{1}{2}$ .	19.	16.	27. 10.	beau.
27.	S. O.	11.	17.	9 $\frac{1}{2}$ .	27. 10.	nuageux & vent.
28.	S.	9.	17.	12.	27. 9 $\frac{1}{2}$ .	beau avec nuages.
29.	S.	9 $\frac{1}{2}$ .	20.	15 $\frac{1}{2}$ .	27. 8 $\frac{1}{2}$ .	<i>idem.</i>
30.	S.	11 $\frac{1}{2}$ .	15 $\frac{1}{2}$ .	12.	27. 9.	pluvieux.

Ce mois a été humide & froid : on craignoit que les avoines, qui étoient fortes dans les bonnes terres, ne boulassent; on craignoit aussi que cela ne fit du tort aux blés qui étoient en pleine fleur. Au tiers de ce mois, on a commencé à faucher les sainfoins; le 9, ils étoient bons & fort hauts; le temps n'a pas été favorable pour les ferrer : il tomboit de l'eau presque tous les jours. Le 24, on n'avoit pas encore mangé de guignes ni de cerises, mais on servoit des fraises : la rivière d'Essonne a baissé : le blé de la récolte de l'année 1775 s'est vendu vingt-deux livres; celui de 1776, dix-neuf livres le sac; il n'approchoit pas de celui de 1775, pour la bonté. La vigne n'a commencé à fleurir que vers la fin de ce mois: les sainfoins étoient beaux & hauts, mais on a eu bien de la peine à les ferrer secs; il pleuvoit presque tous les jours; on n'a achevé de les ferrer qu'à la fin du mois.

## JUILLET.

Jours du Mois.	VENTS.	THERMOMÈTRE.			BAROM.	ÉTAT DU CIEL.
		Matin.	Midi.	Soir.		
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces lignes	
1.	S.	11 $\frac{1}{2}$ .	14.	13 $\frac{1}{2}$ .	27. 7	pluvieux.
2.	S.	11.	16 $\frac{1}{2}$ .	14.	27. 8	beau avec de gros nuages.
3.	S.	13.	21.	15 $\frac{1}{2}$ .	27. 5	mat. beau avec nuag. ap. m. t. & pl.
4.	S.	11.	17.	10 $\frac{1}{2}$ .	27. 9	beau & nuag. le soir, tonn. & pluie
5.	S.	11.	16 $\frac{1}{2}$ .	12.	27. 11	nuageux, pluie par ondées.
6.	S.	12.	16.	12 $\frac{1}{2}$ .	28.	beau avec nuages.
7.	S.	10.	13 $\frac{1}{2}$ .	10.	27. 10	couvert; le soir pluvieux.
8.	S.	11.	10.	9 $\frac{1}{2}$ .	27. 9	pluvieux.
9.	S.	10 $\frac{1}{2}$ .	14.	10 $\frac{1}{2}$ .	28. 0	couvert & bruine.
10.	S. O.	10.	15.	13.	28. 1	nuageux.
11.	N.	10 $\frac{1}{2}$ .	17.	15.	28. 2	beau avec nuages.
12.	N.	15.	21.	16 $\frac{1}{2}$ .	28. 1 $\frac{1}{2}$	idem.
13.	N.	14.	20.	16.	28. 2	idem.
14.	N.	13 $\frac{1}{2}$ .	23.	16.	28. 2	beau.
15.	N.	13 $\frac{1}{2}$ .	23 $\frac{1}{2}$ .	17.	28. 1	idem.
16.	E.	14.	24 $\frac{1}{2}$ .	17 $\frac{1}{2}$ .	27. 11	idem.
17.	E.	15.	26 $\frac{1}{2}$ .	20.	27. 9 $\frac{1}{2}$	idem.
18.	S.	18.	28.	20.	27. 9	idem.
19.	S.	16.	21.	14.	27. 9	beau avec nuages & bruine.
20.	S.	16 $\frac{1}{2}$ .	17.	14 $\frac{1}{2}$ .	27. 8 $\frac{1}{2}$	couvert & bruine.
21.	S.	14 $\frac{1}{2}$ .	17.	14 $\frac{1}{2}$ .	27. 7 $\frac{1}{2}$	pluvieux.
22.	S.	14.	20.	15.	27. 9	couv. le ☉ s'est mont. quelq. temps.
23.	S.	13.	15.	11 $\frac{1}{2}$ .	27. 7	couvert & bruine.
24.	S.	12.	17.	12 $\frac{1}{2}$ .	27. 6	idem.
25.	S.	12.	15.	11.	27. 8	couvert & pluie.
26.	S.	11 $\frac{1}{2}$ .	14.	10 $\frac{1}{2}$ .	27. 9	couvert.
27.	O.	10.	15.	11 $\frac{1}{2}$ .	27. 10	beau avec n. il tombe q. gout. d'eau.
28.	S. O.	11.	16.	13.	27. 9	couv. on a vu quelq. rayons de ☉.
29.	S.	12.	15.	12 $\frac{1}{2}$ .	27. 7	couv. & bruine; il a ton. écl. l'p. m.
30.	S.	11.	14 $\frac{1}{2}$ .	13 $\frac{1}{2}$ .	27. 7	pluvieux.
31.	S. O.	12.	14.	12.	27. 8	couvert & bruine.

574 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Il n'a presque fait que pleuvoir pendant le cours de ce mois, ce qui a fait grand tort aux vignes; les froids qui ont régné ont occasionné la coulure, de sorte que l'on ne s'attendoit qu'à une médiocre récolte; le vin de 1775 s'est vendu soixante livres la pièce, & celui de la récolte de 1776 cinquante livres. Le 24, on a commencé à couper les seigles; on a eu bien de la peine à les serrer, parce que cette moisson a été fort humide, mais le grain étoit de très-bonne qualité, quoique humide, & les épis étoient bien grainés; il n'en falloit que douze gerbes pour faire une mine; les fromens commençoient à jaunir.

## AOUST.

Jours du Mois.	VENTS.	THERMOMÈTRE.			BAROM.	ÉTAT DU CIEL.
		Matin.	Midi.	Soir.		
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces lignes	
1.	S. O.	11.	17.	12.	27. 8	beau avec nuages; le soir éclairs.
2.	N.	11 $\frac{1}{2}$ .	17 $\frac{1}{2}$ .	12 $\frac{1}{2}$ .	27. 11	beau avec nuages & bruine.
3.	N. O.	12 $\frac{1}{2}$ .	18 $\frac{1}{2}$ .	12 $\frac{1}{2}$ .	28. 1	beau avec nuages & pluie le matin.
4.	N. O.	11.	19.	12 $\frac{1}{2}$ .	28.	beau avec nuages.
5.	S. E.	11 $\frac{1}{2}$ .	21.	15.	27. 10 $\frac{1}{2}$	beau & couvert le soir.
6.	N. O.	11 $\frac{1}{2}$ .	19 $\frac{1}{2}$ .	13.	27. 11 $\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
7.	S. E.	11 $\frac{1}{2}$ .	22.	15 $\frac{1}{2}$ .	27. 10	<i>idem.</i>
8.	S. E.	13.	24.	19.	27. 8	nuageux & bruine.
9.	S.	16.	24 $\frac{1}{2}$ .	15 $\frac{1}{2}$ .	27. 10	nuageux.
10.	S.	11 $\frac{1}{2}$ .	19.	14.	27. 11 $\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
11.	S.	11.	24.	17 $\frac{1}{2}$ .	27. 10	<i>idem.</i>
12.	S.	14.	25.	19.	27. 11	beau; le soir il a tonné au loin.
13.	N.	14.	26.	18.	28. 1 $\frac{1}{2}$	beau.
14.	N.	14.	25.	17.	28. 1 $\frac{1}{2}$	<i>idem.</i>
15.	N.	13 $\frac{1}{2}$ .	24 $\frac{1}{2}$ .	18.	28. 1 $\frac{1}{2}$	<i>idem.</i>
16.	N.	13.	23 $\frac{1}{2}$ .	17.	27. 11 $\frac{1}{2}$	<i>idem.</i>
17.	N.	12 $\frac{1}{2}$ .	22.	17.	27. 10	beau avec nuag. le mat. brouillard.
18.	N.	12.	22.	15.	27. 10	beau & venteux.
19.	N. E.	13 $\frac{1}{2}$ .	21.	14.	27. 7	beau.
20.	N.	11 $\frac{1}{2}$ .	24.	16.	27. 10	<i>idem.</i>
21.	S. O.	12.	22.	17.	27. 10	mat. beau; l'ap. midi couv. & bruine.
22.	O.	13.	18.	13.	28. $\frac{1}{2}$	beau avec nuag. pluie toute la nuit.
23.	S.	11.	20.	13 $\frac{1}{2}$ .	28.	beau.
24.	N. E.	11 $\frac{1}{2}$ .	23.	18.	27. 10 $\frac{1}{2}$	beau; soir écl. aurore boréale au N.
25.	S.	13.	25.	17.	28. $\frac{1}{2}$	beau.
26.	N.	13 $\frac{1}{2}$ .	26.	18.	28. 1 $\frac{1}{2}$	<i>idem.</i>
27.	N.	16.	26.	18 $\frac{1}{2}$ .	28. 1	<i>idem.</i>
28.	E.	14 $\frac{1}{2}$ .	26.	18 $\frac{1}{2}$ .	27. 11	beau avec nuages; le soir éclairs.
29.	O.	15.	17.	14.	28.	couv. le matin; l'après-midi pluie.
30.	S.	14.	17.	17.	27. 8	pluvieux.
31.	S.	17.	17.	12.	27. 11	couvert & grand vent.

On a commencé le 1.<sup>er</sup> de ce mois la moisson des fromens; les pluies qui étoient tombées les mois passés, avec l'herbe qui étoit en abondance dans les blés en avoient fait verser beaucoup; ils étoient hauts & fort bons en paille & en grains, excepté ceux qui étoient versés, dont le grain n'avoit pas mûri comme il faut: voyant la pluie qui tomboit tous les jours, durant la moisson des seigles, on craignoit qu'il n'en arrivât de même pour serrer les blés; mais le temps ayant commencé le 4 à se mettre au beau, & ayant duré jusqu'à la fin de ce mois, excepté deux jours où il est tombé quelques ondées de pluie, les blés ont été serrés fort secs; il falloit seize à dix-sept gerbes pour en faire une mine, & de celui qui étoit versé, il en falloit jusqu'à vingt-cinq à vingt-six gerbes à la mine. On a commencé le 6, à faucher les avoines qui étoient belles en paille & en grain; elles n'ont pas été serrées toutes pendant ce mois, parce que l'usage de presque tous les Laboureurs est d'attendre qu'elles soient mouillées, mais d'autres les ont levées tout de suite après qu'elles ont été fauchées; il y a eu aussi beaucoup d'orge: il n'y a pas eu de noix pour faire des cerneaux, elles ont toutes gelé l'hiver: on ne voyoit encore point de verjus de tourné.

Il n'y a pas eu de prunes d'aucunes espèces, toutes ont été gelées l'hiver; il y a eu fort peu d'abricots. Il n'y a pas eu beaucoup de maladies, & peu de fièvres,

SEPTEMBRE.



DES SCIENCES. 577.  
SEPTEMBRE.

Jours du MOIS.	VENTS.	THERMOMÈTRE.			BAROM.	ÉTAT DU CIEL.
		Matin.	Midi.	Soir.		
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces lignes	
1.	N.	11.	17 $\frac{1}{2}$ .	11.	28.	beau nuag. gel. bl. mat. dans les bas.
2.	N.	11.	17.	13 $\frac{1}{2}$ .	27. 10	couvert & venteux.
3.	O.	10 $\frac{1}{2}$ .	14.	8.	27. 9 $\frac{1}{2}$	nuageux & venteux.
4.	O.	10 $\frac{1}{2}$ .	16.	12.	27. 10	couvert & bruine.
5.	O.	11 $\frac{1}{2}$ .	17.	13.	28.	couv. avec quelq. rayons de Soleil.
6.	N.	12.	19.	14.	28. 1	couvert.
7.	N.	12 $\frac{1}{2}$ .	21.	15.	28. 1	beau.
8.	N.	11 $\frac{1}{2}$ .	21.	15.	28. $\frac{1}{2}$	<i>idem.</i>
9.	N. E.	11.	21 $\frac{1}{2}$ .	15.	28. 1	<i>idem.</i>
10.	N.	12.	21 $\frac{1}{2}$ .	15.	28. 1	<i>idem.</i>
11.	N.	12.	19 $\frac{1}{2}$ .	16.	28. 1	<i>idem.</i>
12.	N.	12 $\frac{1}{2}$ .	21 $\frac{1}{2}$ .	16.	28.	beau avec vent.
13.	N.	10 $\frac{1}{2}$ .	18 $\frac{1}{2}$ .	13.	27. 11	beau avec nuages & vent.
14.	N.	10.	15.	12.	27. 11	beau & grand vent.
15.	N.	9. $\frac{1}{2}$	17.	12.	28.	beau avec vent.
16.	N.	10 $\frac{1}{2}$ .	19.	13 $\frac{1}{2}$ .	28.	beau.
17.	N.	10.	22 $\frac{1}{2}$ .	13.	28.	<i>idem.</i>
18.	E.	10.	23.	13.	27. 11 $\frac{1}{2}$	<i>idem.</i>
19.	S.	11.	22.	13.	27. 9 $\frac{1}{2}$	<i>idem.</i>
20.	N.	10 $\frac{1}{2}$ .	20 $\frac{1}{2}$ .	12 $\frac{1}{2}$ .	27. 10	beau avec nuages.
21.	N.	10.	20 $\frac{1}{2}$ .	12.	27. 9	beau.
22.	N.	12.	17.	11 $\frac{1}{2}$ .	27. 9 $\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
23.	N.	10 $\frac{1}{2}$ .	16 $\frac{1}{2}$ .	9.	27. 9 $\frac{1}{2}$	beau.
24.	N.	7 $\frac{1}{2}$ .	17.		27. 9	<i>idem.</i>
25.	S.	10.	20 $\frac{1}{2}$ .	10.	27. 8 $\frac{1}{2}$	<i>idem.</i>
26.	N.	11 $\frac{1}{2}$ .	23.	15.	27. 9	<i>idem.</i>
27.	N.	12.	23.	16 $\frac{1}{2}$ .	27. 9 $\frac{1}{2}$	<i>idem.</i>
28.	N.	13.	22.	16.	27. 10	beau; le soir il a éclairé.
29.	S. O.	13 $\frac{1}{2}$ .	21.	14 $\frac{1}{2}$ .	28.	beau avec nuag. le soir br. il a tonné.
30.	S.	13 $\frac{1}{2}$ .	15 $\frac{1}{2}$ .	13 $\frac{1}{2}$ .	27. 11	couvert & bruine.

Mém. 1778.

Dddd

On a commencé la vendange le 7 ; elle a été si foible qu'en général on n'a recueilli qu'environ la moitié d'une demi-queue par arpent ; cependant le peu qu'il y a eu étoit de bonne qualité ; c'est pourquoi à la fin de ce mois il s'en est vendu soixante-quinze livres le poinçon. Il n'y a pas eu beaucoup de fièvres dans cette saison, qui a été favorable pour labourer & semer les blés, de sorte que la plupart, même dans les terres noires, étoient faits. Durant ce mois, la récolte de safran a été aussi mauvaise que celle des raisins : il y en a eu fort peu ; il s'est vendu quarante francs la livre.

## NOVEMBRE.

Jours du Mois.	VENTS.	THERMOMÈTRE.			BAROM.	ÉTAT DU CIEL.
		Matin.	Midi.	Soir.		
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	poises lignes	
1.	S.	2 $\frac{1}{2}$ .	9 $\frac{1}{2}$ .	7.	27. 6 $\frac{1}{2}$	couvert; l'après-midi pluvieux.
2.	S.	3.	9 $\frac{1}{2}$ .	5.	27. 9	beau avec brouillard.
3.	S.	2 $\frac{1}{2}$ .	11.	5.	27. 10	beau avec nuag. soir aurore bor. au N.
4.	S.	6 $\frac{1}{2}$ .	15.	9.	28.	beau avec nuages.
5.	S. E.	7 $\frac{1}{2}$ .	11 $\frac{1}{2}$ .	9 $\frac{1}{2}$ .	28. $\frac{1}{2}$	couvert.
6.	N.	8 $\frac{1}{2}$ .	10.	10.	28.	pluvieux.
7.	N.	8.	10.	3 $\frac{1}{2}$ .	28. $\frac{1}{2}$	couvert.
8.	O.	— $\frac{1}{2}$ .	7 $\frac{1}{2}$ .	7 $\frac{1}{2}$ .	27. 6	couvert; le soir pluie & vent.
9.	N. O.	2.	7.	1 $\frac{1}{2}$ .	27. 7 $\frac{1}{2}$	beau avec des hargnes de pluie.
10.	N. O.	— 1.	5 $\frac{1}{2}$ .	5.	27. 8	couvert avec quelques rayons de ☉.
11.	S. O.	2.	9 $\frac{1}{2}$ .	3 $\frac{1}{2}$ .	27. 9	beau.
12.	N.	— 1.	11 $\frac{1}{2}$ .	3.	27. 8	idem.
13.	N. O.	0.	12 $\frac{1}{2}$ .	9 $\frac{1}{2}$ .	27. 7	idem.
14.	N.	8 $\frac{1}{2}$ .	8.	7.	27. 9	pluvieux.
15.	N.	7.	9 $\frac{1}{2}$ .	6 $\frac{1}{2}$ .	27. 10	couvert.
16.	N.	1.	6 $\frac{1}{2}$ .	5.	27. 10	nuageux.
17.	N.	1 $\frac{1}{2}$ .	6 $\frac{1}{2}$ .	6 $\frac{1}{2}$ .	28. 2	couvert & brouillard.
18.	S. O.	1 $\frac{1}{2}$ .	6 $\frac{1}{2}$ .	6.	28. 2	brouillard.
19.	S. O.	2.	9.	7.	28. 1	couvert.
20.	O.	5 $\frac{1}{2}$ .	9 $\frac{1}{2}$ .	7.	28. $\frac{1}{2}$	couvert; le soir bruine.
21.	N. O.	5 $\frac{1}{2}$ .	9 $\frac{1}{2}$ .	7 $\frac{1}{2}$ .	28. $\frac{1}{2}$	couvert & bruine.
22.	N. O.	4.	8 $\frac{1}{2}$ .	7 $\frac{1}{2}$ .	28. $\frac{1}{2}$	couvert.
23.	S.	5.	9.	5 $\frac{1}{2}$ .	27. 11	couvert & pluie.
24.	N.	1 $\frac{1}{2}$ .	5 $\frac{1}{2}$ .	1 $\frac{1}{2}$ .	28.	nuageux.
25.	O.	1.	5 $\frac{1}{2}$ .	1 $\frac{1}{2}$ .	28. 2	couvert avec quelques rayons de ☉.
26.	O.	2.	7.	1 $\frac{1}{2}$ .	28. $\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
27.	N.	— 1 $\frac{1}{2}$ .	2 $\frac{1}{2}$ .	2.	27. 10	beau avec n. brouil. soir aurore bor.
28.	S.	— 6 $\frac{1}{2}$ .	7.	1.	27. 10	pluvieux.
29.	E.	— 1 $\frac{1}{2}$ .	2 $\frac{1}{2}$ .	1.	27. 8	brouillard.
30.	S. O.	6 $\frac{1}{2}$ .	9 $\frac{1}{2}$ .	8 $\frac{1}{2}$ .	27. 6	pluvieux & venteux.

582 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

On a commencé dans ce mois à donner les labours d'entre-hiver, à tirer les échalas, & à donner la première façon à la vigne que l'on nomme *parage*: il y a eu beaucoup de rhumes. Le temps de la fin du mois a été favorable pour faire les plantations d'arbres; le blé de la récolte de 1777 s'est vendu vingt-deux livres le setier, & celui de 1776 vingt-trois livres dix sous: la rivière d'Essonne a été d'une moyenne hauteur.

## DÉCEMBRE.

Jours du Mois.	VENTS.	THERMOMÈTRE.			BAROM.	ÉTAT DU CIEL.
		Matin.	Midi.	Soir.		
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces lignes	
1.	S. O.	6 $\frac{1}{2}$ .	8 $\frac{1}{2}$ .	5 $\frac{1}{2}$ .	27. 9	couvert.
2.	S. O.	4 $\frac{1}{2}$ .	8 $\frac{1}{2}$ .	3 $\frac{1}{2}$ .	27. 10	idem.
3.	S. O.	4.	9.	4 $\frac{1}{2}$ .	27. 8 $\frac{1}{2}$	brouillard le mat. ensuite nuageux.
4.	S.	5 $\frac{1}{2}$ .	8 $\frac{1}{2}$ .	5.	27. $\frac{1}{2}$	pluvieux & grand vent.
5.	O.	1 $\frac{1}{2}$ .	3 $\frac{1}{2}$ .	0.	27. 5	couvert avec des hargnes de grêle.
6.	N. O.	1 $\frac{1}{2}$ .	2 $\frac{1}{2}$ .	0.	27. 6	couvert; il a tombé de la neige.
7.	O.	— 1 $\frac{1}{2}$ .	2.	$\frac{1}{2}$ .	27. 7	neige fondue & pluie.
8.	S. O.	$\frac{1}{2}$ .	2.	1.	27. 9	bruine.
9.	N.	0.	1 $\frac{1}{2}$ .	1.	27. 10	nuageux & couvert.
10.	N.	— 2.	1 $\frac{1}{2}$ .	— 2.	28. 3 $\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
11.	S.	3 $\frac{1}{2}$ .	— 1 $\frac{1}{2}$ .	3 $\frac{1}{2}$ .	28. 4	brouillard.
12.	N.	4 $\frac{1}{2}$ .	— 1 $\frac{1}{2}$ .	4 $\frac{1}{2}$ .	28. 3 $\frac{1}{2}$	brouillard mat. l'ap. midi nuageux.
13.	N.	5.	0.	1 $\frac{1}{2}$ .	28. $\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
14.	S. O.	4.	0.	1 $\frac{1}{2}$ .	27. 10	idem.
15.	N.	3 $\frac{1}{2}$ .	0.	1.	27. 9	brouillard.
16.	N.	3.	0.	1 $\frac{1}{2}$ .	27. 8 $\frac{1}{2}$	couvert & bruine.
17.	N.	$\frac{1}{2}$ .	1 $\frac{1}{2}$ .	0 $\frac{1}{2}$ .	27. 9	beau avec nuages.
18.	N.	1 $\frac{1}{2}$ .	1 $\frac{1}{2}$ .	1.	27. 8	beau avec nuages; le soir neige.
19.	N.	0.	1 $\frac{1}{2}$ .	3.	27. 9	couvert.
20.	N.	7.	3.	7.	27. 8	beau avec nuages.
21.	N.	3.	1.	2.	27. 6	neigeux.
22.	N. O.	1.	$\frac{1}{2}$ .	—	27. 6	beau avec nuages.
23.	N. O.	1.	2.	— 3.	27. 5 $\frac{1}{2}$	couvert.
24.	S. O.	$\frac{1}{2}$ .	3 $\frac{1}{2}$ .	2.	27. 2	pluvieux.
25.	O.	4.	5 $\frac{1}{2}$ .	1 $\frac{1}{2}$ .	27. 3	pluvieux & ventoux.
26.	S. O.	1 $\frac{1}{2}$ .	2 $\frac{1}{2}$ .	1.	27. 1	pluvieux & neige fondue.
27.	N. O.	— $\frac{1}{2}$ .	$\frac{1}{2}$ .	$\frac{1}{2}$ .	27. 3	couvert & pluie.
28.	N. O.	— 1.	$\frac{1}{2}$ .	—	27. 5	couvert.
29.	N.	1.	—	2.	27. 3	couvert avec ventvoles de grefil.
30.	N. O.	1 $\frac{1}{2}$ .	—	1 $\frac{1}{2}$ .	27. 2	couvert.
31.	N.	2.	$\frac{1}{2}$ .	2 $\frac{1}{2}$ .	27. 3 $\frac{1}{2}$	neigeux.

# 584 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

On a toujours continué à labourer pour entr'hiverner; le temps y a été favorable, quoique la terre fût un peu molle; mais vers le milieu & la fin de ce mois, il est tombé de la neige & de la pluie, qui ont fait cesser les ouvrages.

Les seigles & les blés ont très-bien levé & étoient très-beaux: le blé de la récolte de 1777 s'est vendu vingt-une livres le setier. Le vin de la récolte de 1776 s'est vendu en ce mois soixante-quinze livres le poinçon, & celui de la récolte de 1777, soixante-cinq livres; c'est environ dix livres de diminution en un mois.

## OBSERVATIONS sur la quantité d'Eau de pluie tombée en l'année 1777.

JANVIER.....	1 <sup>pouc.</sup>	6 <sup>lignes</sup>	19 <sup>4<sup>tes</sup></sup>	}	3 <sup>pouc.</sup>	8 <sup>lignes</sup>	0 <sup>4<sup>tes</sup></sup>
FÉVRIER.....	0.	10.	2				
MARS.....	1.	3.	27				
AVRIL.....	2.	4.	6	}	8.	4.	9.
MAI.....	3.	4.	30				
JUIN.....	2.	7.	21				
JUILLET.....	2.	4.	18	}	4.	4.	13.
AOÛT.....	1.	8.	22				
SEPTEMBRE.....	0.	3.	21				
OCTOBRE.....	0.	11.	19	}	3.	7.	31.
NOVEMBRE.....	1.	2.	9				
DÉCEMBRE.....	1.	6.	3				
TOTAL DE LA PLUIE tombée pendant l'année 1777.....					20 <sup>pouc.</sup>	0 <sup>lignes</sup>	5 <sup>4<sup>tes</sup></sup>

## OBSERVATIONS

DES SCIENCES. 585  
OBSERVATIONS DES BOUSSOLES.  
JANVIER 1777.

J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.
1	10	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 15 0 5 20	9	4 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 10 0 5 20	17	10 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 10 0 5 20	25	2 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 15 0 5 20
2	3 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 15 0 5 20	10	11 $\frac{1}{4}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 10 0 5 20	18	10	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 10 0 5 20	26	9	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 15 0 5 20
3	9	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 15 0 5 20	11	8	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 10 0 5 20	19	4	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 10 0 5 20	27	12 $\frac{1}{4}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 15 0 5 20
4	4 $\frac{3}{4}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 15 0 5 20	12	4 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 10 0 5 20	20	3 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 10 0 5 20	28	2.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 15 0 5 20
5	3	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 15 0 5 20	13	4 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 10 0 5 20	21	midi	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 10 0 5 20	29	10 $\frac{3}{4}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 15 0 5 20
6	8 $\frac{1}{4}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	18 15 0 5 20	14	10	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 10 0 5 20	22	9 $\frac{1}{4}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 10 0 5 20	30	11	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 15 0 5 20
7	4 $\frac{1}{4}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 15 0 5 20	15	9 $\frac{1}{4}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 10 0 5 20	23	8	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 10 0 5 20	31	8 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	18 15 0 5 20
8	2	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 10 0 5 20	16	3 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 10 0 5 20	24	4 $\frac{1}{4}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	19 10 0 5 20					

Mém. 1778.

Eccc

386 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
OBSERVATIONS DES BOUSSOLES.  
FÉVRIER 1777.

J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.
1	9 $\frac{1}{2}$	1	20	18	9	2 $\frac{1}{2}$ f.	1	20	20	17	10 m.	1	20	23	25	2 f.	1	20	23
		2	19	20			2	19	20			2	19	20			2	19	30
		3	20	0			3	20	0			3	20	0			3	20	0
		4	20	5			4	20	5			4	20	5			4	20	5
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	20
2	12 $\frac{1}{4}$	1	20	18	10	3 $\frac{1}{4}$	1	20	20	18	1 f.	1	20	23	26	5	1	20	23
		2	19	20			2	19	20			2	19	20			2	19	30
		3	20	0			3	20	0			3	20	0			3	20	0
		4	20	5			4	20	5			4	20	5			4	20	5
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	20
3	4 $\frac{1}{2}$ f.	1	20	18	11	2	1	20	20	19	7 $\frac{1}{2}$ m.	1	20	23	27	10 $\frac{1}{2}$ m.	1	20	23
		2	19	20			2	19	20			2	19	20			2	19	30
		3	20	0			3	20	0			3	20	0			3	20	0
		4	20	5			4	20	5			4	20	5			4	20	5
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	20
4	9 m.	1	20	18	12	10 $\frac{1}{2}$ m.	1	20	20	20	3 $\frac{1}{2}$ f.	1	20	23	28	2 f.	1	20	23
		2	19	20			2	19	20			2	19	30			2	19	35
		3	20	0			3	20	0			3	20	0			3	20	0
		4	20	5			4	20	5			4	20	5			4	20	5
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	20
5	9 $\frac{1}{2}$	1	20	18	13	4 f.	1	20	20	21	4 $\frac{1}{4}$	1	20	23					
		2	19	20			2	19	20			2	19	30					
		3	20	0			3	20	0			3	20	0					
		4	20	5			4	20	5			4	20	5					
		5	67	20			5	67	20			5	67	20					
6	2 f.	1	20	19	14	1 $\frac{1}{4}$	1	20	23	22	9 m.	1	20	23					
		2	19	20			2	19	20			2	19	30					
		3	20	0			3	20	0			3	20	0					
		4	20	5			4	20	5			4	20	5					
		5	67	20			5	67	20			5	67	20					
7	11 $\frac{1}{2}$ m.	1	20	19	15	9 m.	1	20	23	23	11	1	20	23					
		2	19	20			2	19	20			2	19	30					
		3	20	0			3	20	0			3	20	0					
		4	20	5			4	20	5			4	20	5					
		5	67	20			5	67	20			5	67	20					
8	5 f.	1	20	19	16	3 $\frac{1}{2}$ f.	1	20	23	24	2 $\frac{1}{2}$ f.	1	20	23					
		2	19	20			2	19	20			2	19	30					
		3	20	0			3	20	0			3	20	0					
		4	20	5			4	20	5			4	20	5					
		5	67	20			5	67	20			5	67	20					



DES SCIENCES. 587  
OBSERVATIONS DES BOUSSOLES.  
MARS 1777.

J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.
1	3 f.	1 20 23 2 19 35 3 20 0 4 20 5 5 67 20			9	11 m.	1 20 25 2 19 35 3 20 0 4 20 10 5 67 20			17	11½ m.	1 20 25 2 19 40 3 20 0 4 20 10 5 67 20			25	2 f.	1 20 25 2 19 40 3 20 0 4 20 10 5 67 20		
2	10 m.	1 20 23 2 19 35 3 20 0 4 20 5 5 67 20			10	7½	1 20 25 2 19 35 3 20 0 4 20 10 5 67 20			18	5¾ f.	1 20 25 2 19 40 3 20 0 4 20 10 5 67 20			26	5	1 20 26 2 19 40 3 20 0 4 20 10 5 67 20		
3	8½	1 20 23 2 19 35 3 20 0 4 20 5 5 67 20			11	10¼	1 20 25 2 19 35 3 20 0 4 20 10 5 67 20			19	4	1 20 25 2 19 40 3 20 0 4 20 10 5 67 20			27	2	1 20 26 2 19 40 3 20 0 4 20 10 5 67 20		
4	2 f.	1 20 23 2 19 35 3 20 0 4 20 10 5 67 20			12	4 f.	1 20 25 2 19 35 3 20 0 4 20 10 5 67 20			20	3½	1 20 25 2 19 35 3 20 0 4 20 10 5 67 20			28	9½ m.	1 20 26 2 19 40 3 20 0 4 20 10 5 67 20		
5	12½	1 20 23 2 19 35 3 20 0 4 20 10 5 67 20			13	4	1 20 25 2 19 35 3 20 0 4 20 10 5 67 20			21	6	1 20 25 2 19 40 3 20 0 4 20 10 5 67 20			29	6	1 20 26 2 19 40 3 20 0 4 20 10 5 67 20		
6	4½	1 20 23 2 19 35 3 20 0 4 20 10 5 67 20			14	5½	1 20 25 2 19 35 3 20 0 4 20 10 5 67 20			22	3½	1 20 25 2 19 40 3 20 0 4 20 10 5 67 20			30	4½	1 20 26 2 19 40 3 20 0 4 20 10 5 67 20		
7	2	1 20 25 2 19 35 3 20 0 4 20 10 5 67 20			15	2½	1 20 25 2 19 35 3 20 0 4 20 10 5 67 20			23	10 m.	1 20 25 2 19 40 3 20 0 4 20 10 5 67 20			31	5½	1 20 26 2 19 40 3 20 0 4 20 10 5 67 20		
8	5½	1 20 25 2 19 35 3 20 0 4 20 10 5 67 20			16	8 m.	1 20 25 2 19 35 3 20 0 4 20 10 5 67 20			24	6 f.	1 20 25 2 19 40 3 20 0 4 20 10 5 67 20							

Eeee ij

588 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
OBSERVATIONS DES BOUSSOLES.  
AVRIL 1777.

J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.
1	8	1 20 16 2 19 40 3 20 10 4 20 10 5 67 20			9	2	1 20 25 2 19 40 3 20 10 4 20 10 5 67 20			17	11 $\frac{1}{2}$	1 20 20 2 19 40 3 20 10 4 20 10 5 67 20			25	9	1 20 21 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20		
2	4	1 20 26 2 19 40 3 20 10 4 20 10 5 67 20			10	8 $\frac{1}{2}$	1 20 24 2 19 40 3 20 10 4 20 10 5 67 20			18	7 $\frac{3}{4}$	1 20 20 2 19 40 3 20 10 4 20 10 5 67 20			26	2	1 20 22 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20		
3	10	1 20 26 2 19 40 3 20 10 4 20 10 5 67 20			11	9 $\frac{1}{4}$	1 20 24 2 19 40 3 20 10 4 20 10 5 67 20			19	10	1 20 22 2 19 40 3 20 10 4 20 10 5 67 20			27	5 f.	1 20 21 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20		
4	11 $\frac{1}{2}$	1 20 24 2 19 40 3 20 10 4 20 10 5 67 20			12	2 $\frac{1}{2}$	1 20 20 2 19 40 3 20 10 4 20 10 5 67 20			20	9 $\frac{1}{4}$	1 20 22 2 19 40 3 20 10 4 20 10 5 67 20			28	2	1 20 27 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20		
5	3	1 20 24 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20			13	4	1 20 20 2 19 40 3 20 10 4 20 10 5 67 20			21	8	1 20 22 2 19 40 3 20 10 4 20 10 5 67 20			29	8 m.	1 20 27 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20		
6	11	1 20 24 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20			14	2	1 20 20 2 19 40 3 20 10 4 20 10 5 67 20			22	11	1 20 22 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20			30	1 $\frac{1}{2}$ f.	1 20 27 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20		
7	8	1 20 24 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20			15	11 $\frac{1}{2}$	1 20 20 2 19 40 3 20 10 4 20 10 5 67 20			23	3 $\frac{1}{2}$	1 20 22 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20							
8	5 $\frac{1}{4}$	1 20 25 2 19 40 3 20 10 4 20 10 5 67 20			16	1 $\frac{1}{4}$	1 20 20 2 19 40 3 20 10 4 20 10 5 67 20			24	11 $\frac{1}{2}$	1 20 22 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20							

DES SCIENCES. 589  
OBSERVATIONS DES BOUSSOLES.  
MAI 1777.

J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.
1	3	1 20 21 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20			9	5	1 20 21 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20			17	9	1 20 20 2 19 40 3 20 10 4 20 20 5 67 20			25	2 f.	1 20 20 2 19 50 3 20 10 4 20 20 5 67 50		
2	10	1 20 21 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20			10	3 $\frac{1}{2}$	1 20 21 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20			18	11	1 20 20 2 19 40 3 20 10 4 20 20 5 67 20			26	3 $\frac{1}{2}$	1 20 20 2 19 50 3 20 10 4 20 20 5 67 50		
3	1 $\frac{1}{2}$	1 20 20 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20			11	10 $\frac{1}{2}$	1 20 21 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20			19	1	1 20 20 2 19 40 3 20 10 4 20 20 5 67 20			27	5 f.	1 20 20 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50		
4	2	1 20 20 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20			12	11 $\frac{1}{2}$	1 20 21 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20			20	3	1 20 20 2 19 40 3 20 10 4 20 20 5 67 20			28	2 $\frac{1}{2}$	1 20 20 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50		
5	1	1 20 20 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20			13	3 $\frac{1}{4}$	1 20 21 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20			21	10 $\frac{1}{2}$	1 20 20 2 19 40 3 20 10 4 20 20 5 67 20			29	1 $\frac{1}{2}$	1 20 20 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50		
6	8	1 20 20 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20			14	11 $\frac{1}{2}$	1 20 21 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20			22	3	1 20 20 2 19 40 3 20 10 4 20 20 5 67 20			30	4	1 20 20 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50		
7	9 $\frac{1}{2}$	1 20 21 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20			15	4	1 20 21 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20			23		1 20 20 2 19 50 3 20 10 4 20 20 5 68 0			31	2 $\frac{1}{2}$	1 20 20 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50		
8	11	1 20 21 2 19 40 3 20 10 4 20 15 5 67 20			16	3 $\frac{1}{2}$	1 20 21 2 19 40 3 20 10 4 20 20 5 67 20			24	6 f.	1 20 20 2 19 50 3 20 10 4 20 20 5 68 0							

590 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
OBSERVATIONS DES BOUSSOLES.

JUIN 1777.

J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.
1	12 $\frac{1}{2}$ m.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 15 50	9	8 f.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 20 50	17	Je n'étois point à la mer.	1 2 3 4 5			25	11 $\frac{1}{2}$ m.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	21 50 10 15 50
2	6 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 15 50	10	3 $\frac{1}{4}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 20 50	18	7 $\frac{1}{2}$ m.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 15 50	26	3	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 15 50
3	7 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 15 50	11	2 m.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 20 50	19	2 f.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 15 50	27	6	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 15 50
4	6	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 15 50	12	9 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 20 50	20	6	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 15 50	28	4 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 15 50
5	10 $\frac{1}{4}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 15 50	13	6 $\frac{1}{2}$ f.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 20 50	21	9 $\frac{1}{2}$ m.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 15 50	29	8 m.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 15 50
6	4 $\frac{1}{2}$ f.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 20 50	14	8 $\frac{1}{2}$ m.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 20 50	22	8 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 15 50	30	2 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 15 50
7	9 m.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	22 50 10 20 50	15	3 $\frac{1}{4}$ f.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 20 50	23	2 f.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 15 50					
8	5 $\frac{1}{2}$ f.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	22 50 10 20 50	16	Je n'étois point à la mer.	1 2 3 4 5			24	6 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	21 50 10 15 50					

DES SCIENCES. 591  
OBSERVATIONS DES BOUSSOLES.  
JUILLET 1777.

J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.
1	$3\frac{1}{2}$ f.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 15 50	9	$5\frac{1}{2}$ f.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	22 50 10 10 50	17	10 m.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	21 50 10 10 50	25	$6\frac{1}{2}$ f.	2 3 4 5	19 20 20 67	55 50 10 50
2	4 m.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	20 50 10 15 50	10	$7\frac{1}{2}$ m.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	22 50 10 10 50	18	$2\frac{1}{4}$ f.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	21 50 10 10 50	26	2	1 2 3 4 5	19 20 20 67	55 50 10 50
3	6	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	21 50 10 15 50	11	$6\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	22 50 10 10 50	19	$3\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	21 50 10 10 50	27	$8\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	19 20 20 67	55 50 10 50
4	11	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	21 50 10 15 50	12	6	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	22 50 10 10 50	20	$8\frac{1}{2}$ m.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	21 50 10 10 50	28	$3\frac{1}{4}$	1 2 3 4 5	19 20 20 67	55 50 10 50
5	$2\frac{1}{2}$ f.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	21 50 10 15 50	13	$1\frac{1}{2}$ f.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	22 50 10 10 50	21	$4\frac{1}{2}$ f.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	21 50 10 10 50	29	7 m.	1 2 3 4 5	19 20 20 67	55 50 10 50
6	4	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	21 50 10 15 50	14	$3\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	22 50 10 10 50	22	11 m.	1 2 3 4 5	19 20 20 20 67	50 50 10 10 50	30	$11\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	19 20 20 67	55 50 10 50
7	9 m.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	22 50 10 15 50	15	$8\frac{1}{4}$ m.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	21 50 10 10 50	23	$2\frac{1}{2}$ f.	1 2 3 4 5	19 20 20 20 67	50 50 10 10 50	31	$1\frac{1}{2}$ f.	1 2 3 4 5	19 20 20 67	55 50 10 50
8	$2\frac{1}{2}$ f.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	22 50 10 15 50	16	10	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	21 50 10 10 50	24	$7\frac{1}{4}$ m.	1 2 3 4 5	19 20 20 20 67	50 50 10 10 50					

592 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
OBSERVATIONS DES BOUSSOLES.  
A O U S T 1777.

J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.
1	10m.	1 19 55 2 19 50 3 20 10 4 20 10 5 67 50			9	1 ½ f.	1 20 5 2 19 50 3 20 10 4 20 10 5 67 50			17	4 ½ f.	1 20 10 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50			25	4 ½ f.	1 20 20 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50		
2	6	1 20 5 2 19 50 3 20 10 4 20 10 5 67 50			10	8 ½ m.	1 20 5 2 19 50 3 20 10 4 20 10 5 67 50			18	9 ½	1 20 20 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50			26	10 ½ m.	1 20 20 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50		
3	7 ½	1 20 5 2 19 50 3 20 10 4 20 10 5 67 50			11	6 ¼	1 20 5 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50			19	7 ¼	1 20 20 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50			27	5 ¼ f.	1 20 20 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50		
4	5 ½	1 20 5 2 19 50 3 20 10 4 20 10 5 67 50			12	4 ½ f.	1 20 5 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50			20	7 ½	1 20 20 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50			28	1 ½	1 20 20 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50		
5	7 ¼	1 20 5 2 19 50 3 20 10 4 20 10 5 67 50			13	2 ¼	1 20 10 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50			21	6	1 20 20 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50			29	6 ½ m.	1 20 20 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50		
6	4 f.	1 20 5 2 19 50 3 20 10 4 20 10 5 67 50			14	5 ½	1 20 10 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50			22	6 ¾ f.	1 20 20 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50			30	11 ½	1 20 25 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50		
7	4 ½	1 20 5 2 19 50 3 20 10 4 20 10 5 67 50			15	11 ½ m.	1 20 10 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50			23	2 ½	1 20 20 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50			31	2 ½ f.	1 20 25 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50		
8	2	1 20 5 2 19 50 3 20 10 4 20 10 5 67 50			16	7 ¼	1 20 10 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50			24	11 ½ m.	1 20 20 2 19 50 3 20 10 4 20 15 5 67 50							

OBSERVATIONS

DES SCIENCES. 593  
OBSERVATIONS DES BOUSSOLES.  
SEPTEMBRE 1777.

J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.
1	5 $\frac{1}{4}$ f.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	25 50 10 15 50	9	2 m.	1 2 3 4 5	20 20 20 20 68	25 30 10 15 20	17	4 $\frac{1}{2}$ m.	1 2 3 4 5	20 30 20 20 68	26 30 10 15 20	25	2 $\frac{1}{2}$ f.	1 2 3 4 5	20 20 20 20 68	29 35 10 15 25
2	4	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	25 50 10 15 50	10	8 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 20 20 20 68	25 30 10 15 20	18	5 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 20 20 20 68	26 30 10 15 20	26	12 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 20 20 20 68	30 35 10 15 25
3	2 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	25 50 10 15 50	11	2 $\frac{1}{2}$ f.	1 2 3 4 5	20 20 20 20 68	25 30 10 15 20	19	1 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 20 20 20 68	27 30 10 15 20	27	5 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 20 20 20 67	30 35 10 15 25
4	11 $\frac{1}{2}$ m.	1 2 3 4 5	20 19 20 20 67	25 50 10 15 50	12	4 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 20 20 20 68	25 30 10 15 20	20	4 $\frac{1}{4}$	1 2 3 4 5	20 20 20 20 68	27 30 10 15 20	28	3 $\frac{1}{4}$	1 2 3 4 5	20 20 20 20 67	30 35 10 15 25
5	11 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 20 20 20 68	25 50 10 15 20	13	7 $\frac{1}{2}$ m.	1 2 3 4 5	20 20 20 20 68	26 30 10 15 20	21	3 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 20 20 20 68	27 30 10 15 20	29	2 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 20 20 20 68	30 35 10 15 30
6	5 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 20 20 20 68	25 25 10 15 20	14	11 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 20 20 20 68	26 30 10 15 20	22	5	1 2 3 4 5	20 20 20 20 68	27 30 10 15 20	30	9	1 2 3 4 5	20 20 20 20 68	32 45 10 15 30
7	4	1 2 3 4 5	20 20 20 20 68	25 25 10 15 20	15	4 $\frac{1}{4}$	1 2 3 4 5	20 20 20 20 68	26 30 10 15 20	23	11 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 20 20 20 68	29 35 10 15 20					
8	10 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 20 20 20 68	25 25 10 15 20	16	3 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 20 20 20 68	26 30 10 15 20	24	9	1 2 3 4 5	20 20 20 20 68	29 35 10 15 20					

Mém. 1778.

Ffff

594 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
OBSERVATIONS DES BOUSSES.

OCTOBRE 1777.

J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.
1	4	1	20	35	9	8 $\frac{1}{4}$ m.	1	20	36	17	11 $\frac{1}{2}$ m.	1	20	36	25	9 $\frac{1}{2}$ m.	1	20	35
		2	20	45			2	20	45			2	21	15			2	21	15
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	10			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	68	30			5	68	30			5	68	30			5	68	30
2	6 $\frac{1}{2}$ f.	1	20	35	10	7 $\frac{1}{2}$	1	20	36	18	5 f.	1	20	36	26	8 $\frac{1}{2}$	1	20	35
		2	20	45			2	20	45			2	21	15			2	21	15
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	10			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	68	30			5	68	30			5	68	30			5	68	30
3	9 m.	1	20	35	11	8	1	20	36	19	2 $\frac{1}{4}$	1	20	36	27	11 $\frac{1}{4}$	1	20	35
		2	20	45			2	21	15			2	21	15			2	21	15
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	10			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	68	30			5	68	30			5	68	30			5	68	30
4	7 $\frac{1}{4}$	1	20	35	12	8 $\frac{1}{4}$	1	20	36	20	3	1	20	36	28	1 f.	1	20	36
		2	20	45			2	21	15			2	21	15			2	21	15
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	10			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	68	30			5	68	30			5	68	30			5	68	30
5	11 $\frac{1}{2}$	1	20	36	13	8	1	20	36	21	2	1	20	36	29	11 $\frac{1}{2}$ m.	1	20	36
		2	20	45			2	21	15			2	21	15			2	21	15
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	10			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	68	30			5	68	30			5	68	30			5	68	30
6	5 $\frac{3}{4}$ f.	1	20	36	14	2 f.	1	20	36	22	2 $\frac{1}{2}$	1	20	36	30	2 $\frac{1}{4}$ f.	1	20	36
		2	20	45			2	21	15			2	21	15			2	21	15
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	10			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	68	30			5	68	30			5	68	30			5	68	30
7	10 $\frac{1}{2}$ m.	1	20	36	15	11 $\frac{1}{2}$ m.	1	20	36	23	8 $\frac{1}{4}$ m.	1	20	35	31	4 $\frac{1}{2}$	1	20	36
		2	20	45			2	21	15			2	21	15			2	21	15
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	10			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	68	30			5	68	30			5	68	30			5	68	30
8	9 $\frac{1}{2}$	1	20	36	16	9	1	20	36	24	4 $\frac{1}{2}$ f.	1	20	35					
		2	20	45			2	21	15			2	21	15					
		3	20	10			3	20	10			3	20	10					
		4	20	10			4	20	10			4	20	10					
		5	68	30			5	68	30			5	68	30					



DES SCIENCES, 595

OBSERVATIONS DES BOUSSOLES.

NOVEMBRE 1777.

J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.
1	7 $\frac{1}{2}$	1 20 36 2 21 15 3 20 10 4 20 10 5 68 30			9	4 $\frac{1}{2}$	1 20 33 2 21 15 3 20 10 4 20 10 5 68 30			17	11	1 20 26 2 21 15 3 20 10 4 20 5 5 68 30			25				
2	10	1 20 36 2 21 15 3 20 10 4 20 10 5 68 30			10	2 $\frac{1}{4}$	1 20 33 2 21 15 3 20 10 4 20 10 5 68 30			18	2 $\frac{1}{2}$	1 20 26 2 21 10 3 20 10 4 20 5 5 68 30			26				
3	11 $\frac{1}{2}$	1 20 36 2 21 15 3 20 10 4 20 10 5 68 30			11	10 $\frac{1}{2}$	1 20 33 2 21 15 3 20 10 4 20 10 5 68 30			19	11 $\frac{1}{2}$	1 20 26 2 21 10 3 20 10 4 20 5 5 68 30			27				
4	1 $\frac{1}{4}$	1 20 34 2 21 15 3 20 10 4 20 10 5 68 30			12	7 $\frac{3}{4}$	1 20 31 2 21 15 3 20 10 4 20 10 5 68 30			20	9 $\frac{1}{2}$	1 20 26 2 21 10 3 20 10 4 20 5 5 68 30			28	11 $\frac{1}{4}$	1 20 25 2 21 10 3 20 10 4 20 5 5 68 30		
5	3	1 20 34 2 21 15 3 20 10 4 20 10 5 68 30			13	9 $\frac{1}{2}$	1 20 31 2 21 15 3 20 10 4 20 10 5 68 30			21	2	1 20 26 2 21 10 3 20 10 4 20 5 5 68 30			29	11 $\frac{1}{4}$	1 20 25 2 21 10 3 20 10 4 20 5 5 68 30		
6	8 $\frac{1}{2}$	1 20 34 2 21 15 3 20 10 4 20 10 5 68 30			14	5	1 20 31 2 21 15 3 20 10 4 20 10 5 68 30			22	2 $\frac{1}{2}$	1 20 24 2 21 10 3 20 10 4 20 5 5 68 30			30	4 $\frac{1}{2}$	1 20 25 2 21 10 3 20 10 4 20 5 5 68 30		
7	8 $\frac{1}{2}$	1 20 33 2 21 15 3 20 10 4 20 10 5 68 30			15	2	1 20 31 2 21 15 3 20 10 4 20 5 5 68 30			23	2	1 20 23 2 21 10 3 20 10 4 20 5 5 68 30							
8	2	1 20 33 2 21 15 3 20 10 4 20 10 5 68 30			16	11 $\frac{1}{2}$	1 20 26 2 21 15 3 20 10 4 20 5 5 68 30			24	8 $\frac{1}{2}$	1 20 24 2 21 10 3 20 10 4 20 5 5 68 30							

596 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
OBSERVATIONS DES BOUSSOLES.  
DÉCEMBRE 1777.

J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.	J.	H.	N.	D.	M.
1	3	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	25 10 10 5 30	9	4 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	22 10 10 0 25	17	9 $\frac{1}{4}$	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	20 5 10 0 25	25	2	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	18 5 10 0 20
2	10 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	25 10 10 5 30	10	9 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	22 5 10 0 25	18	3	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	18 5 10 0 25	26	8 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	18 5 10 0 20
3	8	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	25 10 10 5 25	11	1 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	22 5 10 0 25	19	10	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	18 5 10 0 20	27	3 $\frac{1}{4}$	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	19 5 10 0 20
4	10 $\frac{1}{4}$	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	25 10 10 0 25	12	3	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	20 5 10 0 25	20	4	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	18 5 10 0 20	28	11	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	19 5 10 0 20
5	1 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	22 10 10 0 25	13	10	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	20 5 10 0 25	21	11 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	18 5 10 0 20	29	10 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	19 5 10 0 20
6	11	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	22 10 10 0 25	14	3 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	20 5 10 0 25	22	8 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	18 5 10 0 20	30	3 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	19 5 10 0 20
7	9 $\frac{1}{4}$	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	22 10 10 0 25	15	3	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	20 5 10 0 25	23	10 $\frac{1}{4}$	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	18 5 10 0 20	31	10 $\frac{1}{4}$	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	19 5 10 0 20
8	3	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	22 10 10 0 25	16	14 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	20 5 10 0 25	24	9 $\frac{1}{2}$	1 2 3 4 5	20 21 20 20 68	18 5 10 0 20					

## ESSAI D'UNE THÉORIE

*De la Résistance qu'éprouve la Proue d'un Vaisseau dans son mouvement.*

Par M. LÉONARD EULER.

COMME la Théorie ordinaire est uniquement fondée sur l'effet du choc de l'eau contre la proue, quoique son frottement sur la surface du Vaisseau doive produire un effet très-considérable, comme j'ai fait voir dans un Mémoire, inséré au *Volume VI* des *Nouveaux Commentaires*, sous le titre : *Tentamen Theoriæ de frictione fluidorum*, il n'est pas surprenant que cette théorie donne toujours la résistance trop petite, & qu'elle s'écarte d'autant plus de la vérité, que l'obliquité du choc est grande. Je crois donc qu'en tenant compte de l'effet du choc de l'eau, & de celui de son frottement, on s'approchera beaucoup plus de la vraie théorie; car on verra, par l'expression pour la résistance que je vais déduire de ces deux effets réunis, que lorsque le choc de l'eau est à peu-près perpendiculaire, la résistance sera aussi à peu-près comme le carré du sinus d'incidence, & que dans le choc oblique, elle approche de plus en plus de la raison du simple sinus, comme elle a été conclue par les expériences faites par M.<sup>rs</sup> d'Alembert, le Marquis de Condorcet & l'abbé Bossut.

Lu  
le 24 Févr.  
1781.

Pour combiner cette double source de la résistance, je vais considérer une proue angulaire, dont la section faite à fleur d'eau soit le triangle isocèle  $ABB$ , auquel toutes les autres sections horizontales soient égales. Soit  $AC$  l'axe de la proue qui partage la largeur  $BB$  en deux également au point  $C$ ; & en mettant cet axe  $AC = a$ , les côtés  $AB = b$ , l'angle  $BAC = \alpha$ , & la profondeur ou flottaison  $Aa = Bb = Cc = c$ , on aura  $BC = b \sin. \alpha$ .

Fig. 1.

Fig. 1. Que la proue se meuve dans la direction  $CA$  avec une vitesse égale  $v$ , où  $v$  marque l'espace parcouru en une seconde de temps, & en mettant  $g$  pour la hauteur par laquelle un corps tombe dans le même temps, la hauteur qui répond à la vitesse  $v$ , sera exprimée par  $\frac{vv}{4g}$ ; ainsi, si l'eau choquoit perpendiculairement, avec cette vitesse  $v$ , sur la face  $ABba$ , dont l'aire est  $bc$ , la force du choc seroit égale au poids d'un volume d'eau égal à  $\frac{bcvv}{4g}$ . Mais puisque le choc se fait sous un angle  $\alpha$ , la force sera exprimée par  $\frac{bcvv \sin. \alpha^2}{4g}$ , & la direction  $MN$  perpendiculaire à la face  $AB$ ; de-là il naît une force selon la direction  $AC$  égale à  $bc \sin. \alpha \cdot \frac{vv \sin. \alpha^2}{4g}$ , où  $bc \sin. \alpha$  exprime la moitié de la plus grande largeur  $BB$ . Le double de cette force  $2bc \sin. \alpha \cdot \frac{vv \sin. \alpha^2}{4g}$ , donnera la partie de la résistance causée par le seul choc de l'eau sur la proue, & cette expression convient avec la théorie ordinaire.

Pour déterminer l'effet du frottement, je remarque d'abord qu'on ne sauroit douter que le frottement ne soit égal à une partie aliquote de toute la pression que l'eau exerce sur la surface entière de la proue: or cette pression est produite par une double cause, dont l'une est la propre pesanteur de l'eau, & qui sur la face  $ABab$  est égale à  $\frac{1}{2}bcc$ ; l'autre partie est la pression que le choc exerce sur la même face, qui est, comme j'ai fait voir,  $\frac{bcvv \sin. \alpha^2}{4g}$ . En prenant donc la fraction  $\lambda$  pour la partie de la pression égale au frottement, la force qui en résulte sera  $\frac{1}{2}\lambda bcc + \frac{\lambda bcvv \sin. \alpha^2}{4g}$ , dont la direction est la droite  $AB$ , ce qui donne pour la direction  $AC$  la force  $\frac{1}{2}\lambda bcc \cos. \alpha + \frac{\lambda bcvv \sin. \alpha^2 \cos. \alpha}{4g}$ , dont le double donne l'effet du frottement sur l'une & l'autre face,

Enfin la base de la proue, dont l'aire est  $ab \sin. \alpha$  & la Fig. 1.  
profondeur  $C$ , éprouve la pression  $a'bc \sin. \alpha$ ; d'où il naît  
un frottement dans la direction même du mouvement, égal  
à  $\lambda abc \sin. \alpha$ ; la somme de toutes les forces qu'éprouve la  
proue entière, tant du choc que du frottement de l'eau,  
contraires au mouvement du Vaisseau, sera donc

$$\frac{bc \sin. \alpha}{2g} \cdot vv (\sin. \alpha^2 + \lambda \sin. \alpha \cos. \alpha) + \lambda bc (c \cos. \alpha + a \sin. \alpha).$$

Pour faciliter l'application de cette formule aux expériences,  
on pourra mettre  $v = \frac{s}{t}$ , où  $s$  marque l'espace parcouru  
par le Vaisseau, &  $t$  le temps exprimé en secondes; &  
puisque le poids moteur doit être égal à la résistance, pour  
produire ce mouvement, en le désignant par la lettre  $P$ ,  
on aura cette équation,

$$P = \frac{bc \sin. \alpha}{2g} \cdot \frac{ss}{t^2} (\sin. \alpha^2 + \lambda \sin. \alpha \cos. \alpha) + \lambda bc (c \cos. \alpha + a \sin. \alpha),$$

où  $P$  doit être exprimé par un volume d'eau du même  
poids; de sorte qu'en mettant 140 marcs pour le poids d'un  
pied cube d'eau, on aura à peu-près

$$\frac{P}{140} = \frac{bc \sin. \alpha}{2g} \cdot \frac{ss}{t^2} (\sin. \alpha^2 + \lambda \sin. \alpha \cos. \alpha) + \lambda bc (c \cos. \alpha + a \sin. \alpha).$$

En supposant le choc direct, de sorte qu'on puisse regarder  
l'angle  $\alpha$  sensiblement égal à 90 degrés, & son cosinus  
évanouissant, il y aura  $\frac{P}{140} = \frac{bc \sin. \alpha^3}{2g} \cdot \frac{ss}{t^2} + \lambda abc \sin. \alpha$ ;  
& en négligeant le dernier terme, qui sera très-petit par  
rapport à l'autre, toutes les fois que la vitesse  $\frac{s}{t}$  est consi-  
dérable, la résistance, rapportée à la plus grande largeur de  
la proue, sera  $bc \sin. \alpha \cdot \frac{ss}{2g t^2} \cdot \sin. \alpha^3$ , & par conséquent  
proportionnelle au carré du sinus d'incidence, tout comme

dans l'hypothèse commune. Mais en supposant l'angle d'incidence très-petit, &  $\cos. a = 1$ , à peu-près, on aura

$$\frac{P}{149} = \frac{bc \sin. a}{2g} \cdot \frac{ss}{11} (\sin. a^2 + \lambda \sin. a) + \lambda bc (c + a \sin. a);$$

d'où l'on voit, qu'à cause de la petitesse de  $\sin. a$ , cette résistance approche à la raison du simple sinus; au moins s'écartera-t-elle beaucoup plus de la raison du carré, tout comme on a vu par les expériences. L'expression qui vient d'être trouvée pour la résistance, se rapporte donc uniquement à la figure de la proue du Vaisseau, & j'ai même supposé que la pression de l'eau contre la poupe, contre-balance parfaitement celle qui agit sur la proue, tout comme il arrive dans l'état de repos: mais il est clair, que plus le mouvement d'un Vaisseau est rapide, plus l'eau aura de la peine à le suivre, & partant la pression sur la poupe pourra devenir considérablement plus petite que celle que la proue soutient; il en doit résulter une augmentation de la résistance d'autant plus grande, que le mouvement est plus rapide. Outre cela, la poupe éprouvera aussi un frottement de la part de l'eau qui glisse sur sa surface: or il semble trop difficile de déterminer cet effet par aucune théorie; je me contente donc d'avoir assigné la résistance que l'eau exerce sur la seule proue.

Tout reviendrait ici à connoître la juste valeur de la lettre  $\lambda$ , & il me semble qu'on pourroit la déterminer assez exactement, moyennant quelques expériences faites de la manière que je vais indiquer.

Fig. 2. Soit  $AA, BB$ , un grand vase rempli d'eau, & muni en bas d'un petit tuyau ouvert  $bc$ , auquel on puisse ajuster le tuyau  $CE$ , moyennant le col  $BC$ , qui, sans laisser sortir l'eau, doit glisser aussi légèrement qu'il est possible sur le petit tuyau  $bc$  du vase; & il est clair que l'eau, en coulant par le grand tuyau  $BE$ , exercera, pour l'entraîner & pour le détacher du vase, une force qui pourra aisément surpasser le petit frottement du col  $BC$  sur l'orifice  $bc$ . Qu'on attache à ce tuyau un fil qui, en passant sur la poulie  $F$ , porte un poids  $p$ , capable

capable de retenir le tuyau , & de vaincre la force de l'eau , ce poids se trouvera facilement par quelques expériences , & diminué de l'effet du frottement du grand tuyau sur le petit , il donnera la fraction  $\lambda$  , puisque tant la pression de l'eau dans le tuyau , que la surface intérieure , peut être exactement assignée : pour faciliter cette recherche , on tiendra le vase toujours rempli d'eau , afin que le mouvement soit uniforme aussi-bien que la pression.

Après avoir établi ici les vrais principes , d'où il faut tirer la détermination de la résistance qu'éprouve la proue d'un Vaisseau , sans entrer dans la discussion de ce que la poupe y peut contribuer , je vais terminer ce petit Mémoire par l'application de ces principes à une proue de figure quelconque , déterminée par une équation entre trois variables.

Soit la ligne  $AB$  sur la surface de l'eau , l'axe de la proue Fig. 3.

& la direction de son mouvement , dont la vitesse  $= v$  ; soient les trois ordonnées  $AX = x$  ,  $XY = y$  ,  $YZ = z$  , & l'équation pour la figure de la proue  $\partial z = p \partial x + q \partial y$  ; considérons la section verticale de la proue  $EZ$  , faite perpendiculairement à  $YX$  ; soit  $ZE$  perpendiculaire sur  $EZ$  , & on

aura la sous-normale  $YL = \frac{z \partial z}{\partial x} = pz$  ; donc , si  $LN$

est parallèle à  $Yx$  , ou perpendiculaire à la section , chaque droite  $NZ$  sera aussi perpendiculaire à  $EZ$  . Concevons de la même manière une section verticale  $FZ$  , faite selon  $XY$  , & perpendiculaire à  $AX$  , de sorte que  $Zn$  soit perpendicu-

laire sur  $FZ$  , & la sous-normale  $YM$  sera  $= -\frac{z \partial z}{\partial y} = -qz$  ;

& en tirant la droite  $MN$  , perpendiculaire à ce plan , toutes les droites  $ZN$  seront aussi perpendiculaires à la courbe  $FZ$  .

En complétant donc le parallélogramme  $MYLN$  , la droite  $ZN$  , perpendiculaire sur les courbes  $EZ$  &  $FZ$  , sera aussi perpendiculaire à la surface de la proue au point  $Z$  , & partant  $MN = YL = pz$  , &  $LN = YM = -qz$  ; donc  $ZL = \sqrt{YZ^2 + YL^2} = z \sqrt{1 + pp}$  ; il y aura donc dans le triangle rectangle  $ZLN$  , la droite

Mém. 1778.

G g g g

Fig. 3.  $ZN = z(1 + pp + qq)$ , selon laquelle la pression de l'eau agit sur la proue.

Soit l'angle  $MNZ = \varphi$ , & on aura  $\cos. \varphi = \frac{p}{\sqrt{1+pp+qq}}$  & l'angle, sous lequel la direction de la courbe est inclinée sur la proue en  $Z = 90^\circ - \varphi$ . La force de l'eau selon  $ZN$ , sera  $\frac{vv}{4g} \cos. \varphi^2 = \frac{vv}{4g} \cdot \frac{pp}{1+pp+qq}$ , & l'élément de la proue, qui répond à l'élément  $\partial x \partial y$ , sera  $\partial x \partial y \sqrt{1+pp+qq}$ ; d'où l'on tire la résistance qui naît du choc de l'eau  $= \frac{vv}{4g} \iint \frac{p^2 \partial x \partial y}{1+pp+qq}$ .

Soit ensuite la pression en  $Z$ , égale à  $\pi$ , & on aura  $\pi = z + \frac{vv \cos. \varphi^2}{4g}$ ; & puisque la friction  $= \lambda \pi$ , son effet contraire au mouvement sera  $\frac{\lambda \pi q}{\sqrt{pp+qq}}$ , & l'effet total de la friction sera exprimé par

$$\lambda \iint \frac{q \partial x \partial y \sqrt{1+pp+qq}}{\sqrt{pp+qq}} \left( z + \frac{vv}{4g} \cdot \frac{pp}{1+pp+qq} \right),$$

qui, ajoutée à l'effet du choc, donne la résistance totale de la proue en question.

Fig. 4. Si l'on veut appliquer cette expression à une proue pyramidale  $ABCD$ , dont la longueur  $AB = a$ , la demi-largeur  $BD = b$ , & la profondeur  $CD = c$ , on a l'équation  $\frac{z}{c} = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$ , & partant  $p = \frac{c}{a}$ , &  $q = -\frac{c}{b}$ . Donc, puisque  $p$  &  $q$  sont des constantes, l'expression pour la résistance totale sera

$$\frac{vv}{4g} \cdot \frac{b^3 c^3}{aa+bb+aaec+bbcc} + \frac{\lambda ac \sqrt{aabb+aaec+bbcc}}{\sqrt{(aa+bb)}} \left( \frac{x}{b} + \frac{vv}{4g} \cdot \frac{b^2 c}{aa+bb+aaec+bbcc} \right).$$



*EXTRAITS de différentes Lettres de M. EULER  
à M. le Marquis DE CONDORCET.*

L'INTÉGRALE de cette formule,  $\frac{x^m - x^n}{l x} \cdot \frac{\partial x}{x}$ , prise depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = 1$ , est  $= l \frac{m}{n}$ . 14 Nov.  
1775.

L'intégrale de cette formule  $\frac{x^m - 1}{(1 + x^n) l x}$ , prise depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = \infty$  est  $= l \cdot \text{tang.} \frac{m \pi}{n}$ , où  $\pi$  marque l'angle de 180 degrés.

*Démonstration des deux Théorèmes précédens.*

SOIT  $Q$  une fonction quelconque des deux variables  $x$  &  $y$ , 2 Fév.  
1776.  
& qu'on cherche la quantité  $Z$ , telle que  $(\frac{\partial \partial Z}{\partial x \partial y}) = Q$ , où il s'agit d'une double intégration; l'une où la seule  $x$  est prise pour variable, & l'autre où la seule  $y$  varie; la première devra être étendue depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = 1$ , & l'autre depuis  $y = 0$  jusqu'à  $y = n$ : par la nature de telles formules, on aura donc d'une double manière ou  $Z = \int \partial x \int Q \partial y$ , ou  $Z = \int \partial y \int Q \partial x$ . Maintenant, qu'on suppose  $Q = x^y$ , & on aura  $\int Q \partial y = \frac{x^y}{l y} - \frac{1}{l x}$ , afin que cette intégrale évanouisse lorsque  $y = 0$ . Soit donc à présent  $y = n$ , & nous aurons  $\int Q \partial y = \frac{x^n - 1}{l n}$ , & partant  $Z = \int \frac{(x^n - 1) \partial x}{l x}$ , ensuite nous aurons  $\int Q \partial x = \frac{x^{y+1}}{y+1}$ , qui évanouit lorsque  $x = 0$ ; posant donc  $x = 1$ , il en résulte  $\int Q \partial x = \frac{1}{y+1}$ , & de-là,  $Z = \int \frac{\partial y}{y+1} = l(y+1)$ , (expression qui disparoît lorsque  $x = 0$ ). Qu'on fasse donc  $y = n$ , & l'on aura  $Z = l(n+1)$ ; par conséquent, il est

G g g g ij

certain que cette intégrale  $\int \frac{\partial x (x^n - 1)}{x}$ , prise depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = 1$ , est  $l(n + 1)$ .

Pour l'autre formule intégrale plus compliquée que je vous avois communiquée, j'avois supposé  $Q = \frac{x^{m-y} + x^{m+y}}{(1 + x^{2n})x}$ ; de-là, prenant d'abord  $x$  constante à cause de

$$\int x^{m-y} \partial y = - \frac{x^{m-y}}{l x} \text{ \& de } \int x^{m+y} \partial y = \frac{x^{m+y}}{l x},$$

$$\text{on aura} \quad \int Q \partial y = \frac{x^{m+y} - x^{m-y}}{(1 + x^{2n}) x l x},$$

ce qui devient  $= 0$  posant  $y = 0$ . Faisant donc  $y = \pi$ ,

$$\text{on aura} \quad \int Q \partial y = \frac{x^{m+\pi} - x^{m-\pi}}{(1 + x^{2n}) x l x},$$

$$\text{\& partant} \quad Z = \int \frac{(x^{m+\pi} - x^{m-\pi}) \partial x}{(1 + x^{2n}) x l x}.$$

L'autre intégration donne d'abord

$$\int Q \partial x = \int \frac{(x^{m-y} + x^{m+y}) \partial x}{(1 + x^{2n}) x},$$

dont l'intégrale doit être étendue depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = 1$ ; or pour ce cas, j'ai démontré autrefois que cette intégrale se réduit à cette forme,  $\frac{\pi}{2m \text{ cof. } \frac{\pi y}{2m}}$ ; d'où nous

tirons  $Z = \int \frac{\pi \partial y}{2m \text{ cof. } \frac{\pi y}{2m}}$ . Pour cette forme, posons

$$\frac{\pi y}{2m} = \phi \text{ pour avoir } Z = \int \frac{\partial \phi}{\text{cof. } \phi} = \int \frac{\partial \phi}{\text{fin. } (90^\circ + \phi)},$$

dont l'intégrale est  $l. \text{tang. } (45^\circ + \frac{1}{2}\phi)$ , \& partant  $Z = l. \text{tang.}$

$(45^\circ + \frac{\pi y}{4m})$ , qui en effet s'évanouit prenant  $y = 0$ . Faisons

donc  $y = \pi$ , \& nous aurons  $Z = l. \text{tang. } (45^\circ + \frac{\pi \pi}{4m})$ ;

d'où il est clair que sous les conditions présentes, on aura

$$\int \frac{(x^{m+1} - x^{m-1}) dx}{(1+x^m)^{1/2}} \left\{ \begin{array}{l} \text{depuis } x=0 \\ \text{jusqu'à } x=1 \end{array} \right\} = l. \text{tang.} (45^\circ + \frac{\pi x}{4m})$$

Par ces deux exemples, on verra aisément que cette spéculation mérite toute l'attention des Géomètres. La première idée qui m'a conduit à cette recherche, étoit tirée d'un principe entièrement différent, que voici. J'avois considéré cette formule  $\int \frac{(x-1) dx}{lx}$ , où au lieu de  $lx$  j'ai écrit cette

valeur  $\frac{x^i - 1}{i}$ , en supposant  $i$  infiniment petit, ou bien

$lx = i(x^{\frac{1}{i}} - 1)$ , en prenant pour  $i$  un nombre infini-

ment grand. Qu'on pose à présent  $x^{\frac{1}{i}} = z$ , ou bien  $x = z^i$ , où il faut remarquer que les termes de l'intégration  $x=0$  &  $x=1$  se réduisent à  $z=0$  & à  $z=1$ ; cette valeur étant substituée, transforme notre formule en celle-ci,  $\int \frac{(z^i - 1) z^{i-1} dz}{z - 1}$ ; or la fraction  $\frac{z^i - 1}{z - 1}$  ou bien  $\frac{1 - z^i}{1 - z}$ , se réduit à la série  $1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{i-1}$ , qui étant multipliée & intégrée, donne

$$\frac{z^i}{i} + \frac{z^{i+1}}{i+1} + \frac{z^{i+2}}{i+2} + \frac{z^{i+3}}{i+3} + \dots + \frac{z^{2i-1}}{2i-1},$$

& posant  $z=1$ , la valeur cherchée fera

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} + \frac{1}{i+3} + \frac{1}{i+4} + \dots + \frac{1}{2i-1},$$

dont la valeur est  $1/2$ , de sorte que  $\int \frac{(x-1) dx}{lx} \left\{ \begin{array}{l} \text{depuis } x=0 \\ \text{jusqu'à } x=1 \end{array} \right\}$  est  $= 1/2$ .

Pour démontrer la somme de la série trouvée qu'on appellera  $A$ , on n'a qu'à remarquer que

$$\begin{aligned}
 A &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \\
 &\dots + \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} + \frac{1}{i+3} + \dots \\
 &\dots + \frac{1}{2i-1} - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \\
 &\dots + \frac{1}{i-i}),
 \end{aligned}$$

où, parce que la série supérieure contient deux fois plus de termes que l'inférieure, on n'a qu'à soustraire chaque terme de la dernière de la supérieure alternativement, & l'on aura

$$\begin{aligned}
 A &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots \\
 &\dots + \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} \dots + \frac{1}{2i-1} \\
 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \dots &c.
 \end{aligned}$$

ou bien

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2};$$

*Autre Théorème.*

EN prenant les lettres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , &c. pour marquer les coefficients d'un binome élevé à l'exposant  $n$ , de sorte que

$$(1+x)^n = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \dots$$

on aura toujours

$$1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \dots = \frac{2}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{14}{4} \dots \frac{4n-2}{n},$$

par exemple, si  $n=6$ , on aura  $\alpha=6, \beta=15, \gamma=20, \delta=15, \epsilon=6, \zeta=1$ , & les suivans  $=0$ ; & partant on aura

$$1 + 6^2 + 15^2 + 20^2 + 15^2 + 6^2 + 1 = \frac{2}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{14}{4} \cdot \frac{18}{5} \cdot \frac{22}{6},$$

dont la démonstration directe me paroît extrêmement difficile,

*Démonstration de ce Théorème.*

2<sup>a</sup> Sept.  
1776.

EN supposant

$$(1+z)^n = 1 + \left(\frac{n}{1}\right)z + \left(\frac{n}{2}\right)z^2 + \left(\frac{n}{3}\right)z^3 + \dots$$

d'où l'on voit que  $\left(\frac{n}{0}\right) = 1$ , aussi-bien que  $\left(\frac{n}{n}\right)$ , &

de-là il s'enfuit, que  $(\frac{n}{p}) = (\frac{n}{n-p})$ ; outre cela, il est

clair que la valeur de la formule  $(\frac{n}{p})$  est toujours égale à

zéro, tant dans les cas où  $p$  est un nombre négatif, que dans ceux où il est un nombre plus grand que  $n$ , ce qui s'entend des nombres entiers; ensuite, on fait que la valeur développée

de ce caractère  $(\frac{n}{p})$  est  $= \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \dots \frac{n-p+1}{p}$ .

Cela posé, si nous passons aux coefficients de la puissance suivante

$(1+z)^{n+1}$ , on fait qu'on aura  $(\frac{n+1}{p+1}) = (\frac{n}{p}) + (\frac{n}{p+1})$ ;

de sorte que réciproquement  $(\frac{n}{p+1}) + (\frac{n}{p+2}) = (\frac{n+1}{p+2})$ ;

ajoutons ces deux équations ensemble, & nous aurons

$(\frac{n}{p}) + 2(\frac{n}{p+1}) + (\frac{n}{p+2}) = (\frac{n+1}{p+1}) + (\frac{n+1}{p+2}) = (\frac{n+2}{p+2})$ ;

de la même manière, nous aurons

$(\frac{n}{p+1}) + 2(\frac{n}{p+2}) + (\frac{n}{p+3}) = (\frac{n+2}{p+3})$ ;

cette équation ajoutée à la précédente, donne

$(\frac{n}{p}) + 3(\frac{n}{p+1}) + 3(\frac{n}{p+2}) + (\frac{n}{p+3}) = (\frac{n+2}{p+2}) + (\frac{n+2}{p+3}) = (\frac{n+3}{p+3})$ ;

ensuite

$(\frac{n}{p+1}) + 3(\frac{n}{p+2}) + 3(\frac{n}{p+3}) + (\frac{n}{p+4}) = (\frac{n+3}{p+4})$ .

qui, encore ajoutée à la précédente, donne

$(\frac{n}{p}) + 4(\frac{n}{p+1}) + 6(\frac{n}{p+2}) + 4(\frac{n}{p+3})$

$+ (\frac{n}{p+4}) = (\frac{n+3}{p+3}) + (\frac{n+3}{p+4}) = (\frac{n+4}{p+4})$ .

& de-là il est aisé à conclure qu'on aura en général

$(\frac{n}{p}) + (\frac{m}{1}) \cdot (\frac{n}{p+1}) + (\frac{m}{2}) \cdot (\frac{n}{p+2})$

$+ (\frac{m}{3}) \cdot (\frac{n}{p+3}) + \&c. = (\frac{n+m}{p+m})$ .

Voilà donc une progression bien générale, dont chaque terme est le produit de deux coefficients de puissances différentes du binôme, dont le terme général peut être exprimé par la formule  $(\frac{m}{x}) \cdot (\frac{n}{p+x})$ , où mettant pour  $x$  successivement les nombres 0, 1, 2, 3, 4, &c. jusqu'à ce qu'on parvienne à des termes évanouissans, la somme de toute cette progression sera infailliblement  $= (\frac{n+m}{p+m}) = (\frac{n+m}{n-p})$ . C'est de-là que résulte le Théorème que je vous ai communiqué, en faisant  $m = n$ , &  $p = 0$ , de sorte qu'il est un cas infiniment plus particulier, que la série que je viens de sommer ici. Dans ce cas, on aura cette sommation,

$$1^2 + (\frac{n}{1})^2 + (\frac{n}{2})^2 + (\frac{n}{3})^2 + \&c. = (\frac{2n}{n});$$

or cette formule développée donne

$$\frac{2n}{1} \cdot \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-2}{3} \cdot \frac{2n-3}{4} \dots \frac{n+1}{n},$$

ce qui, comme il est aisé à démontrer, est égal à

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{14}{4} \dots \frac{4n-2}{n}.$$

Il est fort remarquable que cette sommation a aussi lieu, lors même que les exposans  $m$  &  $n$  sont des fractions quelconques, pourvu que par la voie d'interpolation, on puisse assigner la juste valeur de  $(\frac{m+n}{m+p})$ ; & si le développement n'a pas lieu dans ce cas, il faut recourir à des formules intégrales: or posant pour abrégé  $\int \frac{1}{x} = u$ , on aura toujours

$$(\frac{m+n}{m+p}) = \frac{\int u^{m+n} dx}{\int u^{m+p} dx \cdot \int u^{n-p} dx} \left\{ \begin{array}{l} \text{de } x = 0 \\ \text{à } x = 1 \end{array} \right\};$$

or, si  $\lambda$  marque un nombre entier positif quelconque, on sait qu'il y aura  $\int u^{\lambda} dx = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots \lambda$ , & de-là on tirera

$$\int u^{\lambda+1} dx = (\lambda + 1) \int u^{\lambda} dx,$$

$$\int u^{\lambda+2} dx = (\lambda + 1) \cdot (\lambda + 2) \int u^{\lambda} dx, \&c.$$

& cette

& cette réduction aura toujours lieu, quelque nombre qu'on prenne pour  $\lambda$ . Prenant donc  $\lambda = -\frac{1}{2}$ , j'ai démontré autrefois qu'on aura  $\int \frac{\partial x}{\sqrt{x}} = \pi$ , &  $\int \partial x \sqrt{x} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$ ,  $\pi$  désignant la circonférence d'un cercle, dont le diamètre  $= 1$ . Maintenant, si l'on met  $m = n \frac{1}{2} \partial p = 0$ , puisque les coefficients de  $(1 + z)^{\frac{1}{2}}$  sont

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \&c,$$

nous en tirons cette série des carrés,

$$1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + \&c,$$

dont la somme sera  $\frac{\int \partial x}{\int \partial x \sqrt{x} \int \partial x \sqrt{x}} = \frac{4}{\pi}$ , à cause de  $\int u \partial x = 1$  &  $\int \partial x \sqrt{x} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$ , ce qui s'accorde parfaitement avec la somme qu'on trouve par la voie de l'approximation.

J'AI cru pouvoir joindre ici une autre Démonstration de deux des Théorèmes précédens, quoique la méthode qui y est employée soit fort inférieure à celle de M. Euler; mais il peut être quelquefois utile de voir comment différentes routes peuvent conduire aux mêmes vérités. D'ailleurs M. Euler ayant daigné honorer ces recherches de son approbation, c'est lui donner une marque de mon respect que de les rendre publiques.

Soit la fonction  $\int \frac{x^m}{l^m} \frac{\partial x}{x}$ , & qu'on l'intègre en série par la méthode des intégrations par parties, on aura

$$\int \frac{x^m}{l^m} \frac{\partial x}{x} = x^m \frac{1}{m l^m} + \frac{1}{m^2 l^{m+1}} + \frac{2}{m^3 l^{m+2}} + \frac{2 \cdot 3}{m^4 l^{m+3}} + \dots$$

Ainsi la valeur de cette intégrale, prise depuis  $x = B$  jusqu'à  $x = A$ , sera

Mém. 1778.

H h h h

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} B^m \cdot \left( \frac{1}{m!B} + \frac{1}{m^2!B^2} + \frac{2}{m^3!B^3} + \frac{2.3}{m^4!B^4} \dots \right) \\ - A^m \cdot \left( \frac{1}{m!A} + \frac{1}{m^2!A^2} + \frac{2}{m^3!A^3} + \frac{2.3}{m^4!A^4} \dots \right) \end{array} \right.$$

Pour avoir maintenant la valeur de cette fonction en  $m$ , je la différencie par rapport à  $m$ , & j'ai pour la valeur

$$\begin{aligned} & B^m \cdot \left( \frac{\partial m}{m} + \frac{\partial m}{m^2!B} + \frac{2 \partial m}{m^3!B^2} + \frac{2.3 \partial m}{m^4!B^3} \dots \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial m}{m^2!B} - \frac{2 \partial m}{m^3!B^2} - \frac{2.3 \partial m}{m^4!B^3} \dots \right) \\ & - A^m \cdot \left( \frac{\partial m}{m} + \frac{\partial m}{m^2!A} + \frac{2 \partial m}{m^3!A^2} + \frac{2.3 \partial m}{m^4!A^3} \dots \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial m}{m^2!A} - \frac{2 \partial m}{m^3!A^2} - \frac{2.3 \partial m}{m^4!A^3} \right), \end{aligned}$$

valeur qui se réduit à

$$(B^m - A^m) \cdot \frac{\partial m}{m}.$$

La valeur de la série (S) sera donc

$$\int (B^m - A^m) \cdot \frac{\partial m}{m} + C;$$

& si on suppose  $A = 0$  &  $B = 1$  à  $\int \frac{\partial m}{m} + C = \ln m + C$ ,  $C$  étant une constante indépendante de  $m$ , par la même raison, on aura pour valeur de  $\int \frac{x^m}{1-x} \cdot \frac{\partial x}{x}$ , prise depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = 1$ , la fonction  $\ln m + C$ ; donc la valeur  $\int \frac{x^m - x^n}{1-x} \cdot \frac{\partial x}{x}$ , prise depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = 1$ , sera  $\ln n - \ln m$  ou  $\ln \frac{n}{m}$ .

On seroit parvenu à la même conclusion, sans employer les séries; en effet, le Problème se réduit ici à trouver

$$\int \left( \frac{B^m}{1-B} \frac{\partial B}{B} - \frac{A^m}{1-A} \frac{\partial A}{A} \right) dx;$$



or, différenciant cette fonction par rapport à  $m$ , elle devient  $f(B^{m-1} \partial B - A^{m-1} \partial A)$ ,  $\partial m = (B^m - A^m) \cdot \frac{\partial m}{m}$ , comme on l'a trouvé ci-dessus.

On auroit aussi trouvé immédiatement en cherchant que la valeur de

$$f\left(\frac{B^n - B^m}{1/B} \frac{\partial B}{B} - \frac{A^n - A^m}{1/A} \frac{\partial A}{A}\right),$$

que cette fonction différenciée par rapport à  $n$  & à  $m$  devient

$$(B^n - A^n) \cdot \frac{\partial n}{n} - (B^m - A^m) \cdot \frac{\partial m}{m},$$

dont l'intégrale est, lorsque  $B = 1$  &  $A = 0$ ,  $1 \frac{n}{m} + C$ , mais pour le cas de  $m = n$ , il est clair que cette intégrale doit être zéro; donc  $C = 0$ ; donc l'intégrale cherchée, est égale à  $1 \frac{n}{m}$ .

Soit en général une fonction  $fX \partial x$ , que  $X$  contienne des constantes indéterminées  $n, m \dots$  & qu'on cherche des valeurs de  $fX \partial x$ , prises depuis  $x = A$  jusqu'à  $x = B$ , la valeur de cette fonction sera égale à l'intégrale de

$$\left[ f\left(\frac{\partial X}{\partial m} \partial B\right) - f\left(\frac{\partial X}{\partial m} \partial A\right) \right] \partial m + \left[ f\left(\frac{\partial X}{\partial n} \partial B\right) - f\left(\frac{\partial X}{\partial n} \partial A\right) \right] \partial n \dots$$

prise par rapport aux  $m, n \dots$  ainsi toutes les fois que les fonctions  $\frac{\partial X}{\partial m} \partial x, \frac{\partial X}{\partial n} \partial x$ , seront intégrales, la formule ci-dessus sera débarrassée de signes d'intégration, & l'on pourra chercher pour quelles valeurs de  $A$  & de  $B$ , elle devient intégrable.

\* Sur quoi nous observerons 1.° que comme il faut ajouter une arbitraire à cette intégrale, dans le cas où l'on n'auroit pas des moyens de la déterminer, ce ne seroit pas la valeur de  $fX \partial x$ , prise depuis  $x = A$  jusqu'à  $x = B$ , qu'on pourroit trouver par cette méthode, mais celle de  $f(X' \partial x - X \partial x)$ ,

Hhhh ij

$X'$  étant ce que devient  $X$ , en y mettant au lieu de  $m, n \dots$ ,  $m', n' \dots$

Par exemple, soit repris l'exemple ci-dessus, où  $X = \frac{x^m}{x!x}$ ; nous avons  $\int \frac{x^m}{x!x} \frac{\partial x}{\partial x} = lm + C$ , il est clair que lorsque  $m = 0$ , la valeur de l'intégrale est  $ll.1 - ll.0$ ; or elle est aussi  $l0 + C$ ; donc à cause de  $l1 = 0$ , on a  $C = -ll.0$ , &  $\int \frac{x^m}{x!x} \frac{\partial x}{\partial x} = lm - ll.0$ ; mais si on n'avoit pas connu la valeur de l'intégrale pour une particulière de  $m$ ,  $C$  seroit resté inconnu, & la méthode n'auroit donné aucun résultat, au lieu que même, lorsqu'on ne peut connoître  $C$ , elle auroit toujours donné

$$\int \left[ \left( \frac{x^{m'}}{x!x} - \frac{x^m}{x!x} \right) \right] \partial x = l \frac{x^m}{m'}$$

2.<sup>o</sup> Que pour trouver, par cette méthode, la valeur de  $\int X \partial x$ , il faut que pour satisfaire à l'équation

$$\int \left[ \left( \int \frac{\partial X}{\partial m} \partial x \right) \right] \partial m = \int X \partial x,$$

on ne soit pas obligé d'ajouter à la première intégrale, prise par rapport à  $m$ , une fonction de  $x$ ; d'où il résulte qu'il y a encore une infinité de cas où la méthode ne pouvant être employée à trouver  $\int X \partial x$ , peut l'être à trouver  $\int (X' - X) \partial x$ .

3.<sup>o</sup> Que pour réduire l'intégration de  $\int X \partial x$  à celle de  $\int \left\{ \left[ \int \left( \frac{\partial X}{\partial m} \right) \partial x \right] \right\} \partial m$ , il suffit de savoir intégrer  $\int \left( \frac{\partial X}{\partial m} \right) \partial x$ ; mais par la même raison, l'intégration de  $\int \left( \frac{\partial X}{\partial m} \right) \partial m$  dépendra de l'intégration de  $\int \left( \frac{\partial^2 X}{\partial m^2} \right) \partial x$ ; en sorte qu'en général, pourvu qu'on puisse trouver  $\int \frac{\partial^2 X}{\partial m^2} \partial x$ , on pourra

faire dépendre l'intégration de  $\int X \partial x$ , d'intégrales prises par rapport à  $m$ .

*Démonstration du second Théorème.*

Soit maintenant la fonction

$$(1 + z)^n = 1 + A'z + A''z^2 + A'''z^3 \dots$$

en sorte que le coefficient de  $z^n$  soit  $A''^n$ , nous avons à prouver que

$$1 + A'^2 + A''^2 + A'''^2 \dots = \frac{2.6.10 \dots 4n-2}{1.2 \dots n};$$

mettons  $n + 1$  à la place de  $n$ , & faisons

$$1 + A'^2 + A''^2 \dots = Z,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} Z + \Delta Z &= 1 + A'^2 + A''^2 \dots \\ &\quad + 2A'\Delta A' + 2A''\Delta A'' \\ &\quad + \Delta A'^2 + \Delta A''^2 \\ &= \frac{2.6.10 \dots 4n+2}{1.2 \dots n+1} = \frac{Z.4n+2}{n+1}; \end{aligned}$$

mais

$$\Delta A' = 1, \Delta A'' = A', \Delta A''' = A'' \dots$$

donc nous aurons

$$\begin{aligned} 1 + A'^2 + A''^2 + A'''^2 \dots &= \frac{Z.4n+2}{n+1} \\ &\quad + 2A' + 2A'A'' + 2A''A''' \\ &\quad + 1 + A'^2 + A''^2, \end{aligned}$$

ou

$$2Z + 2 \cdot (A' + A'A'' + A''A''' \dots) = \frac{Z.4n+2}{n+1},$$

d'où

$$\begin{aligned} (n+1) \cdot (A' + A'A'' + A''A''' \dots) \\ = n \cdot (1 + A'^2 + A''^2 + A'''^2 \dots): \end{aligned}$$

ou nous avons

$$A' = n, \quad A'A'' = A'^2 \cdot \frac{n-1}{2}, \quad A''A''' = A''^2 \cdot \frac{n-2}{3} \dots$$

&

$$A' = \frac{A'^2}{n}, \quad A'A'' = A'' \cdot \frac{2}{n-1}, \quad A''A''' = A'''^2 \cdot \frac{3}{n-2} \dots$$

Substituant ces valeurs dans l'équation ci-dessus, elle devient

$$\frac{n+1}{n} \cdot \left\{ \begin{aligned} &a \cdot n + \frac{1-a}{n} \cdot A'^2 + \frac{2}{n-1} \cdot (1-a') A''^2 \\ &+ \frac{3}{n-2} \cdot (1-a'') A'''^2 \dots \dots \dots \\ &+ \frac{n-1}{2} \cdot a' A'^2 + \frac{n-2}{3} \cdot a'' A''^2 \\ &+ \frac{n-3}{4} \cdot a''' A'''^2 \dots \dots \dots \end{aligned} \right\}$$

$$= 1 + A'^2 + A''^2 + A'''^2 \dots \dots \dots$$

$a, a', a'', a''' \dots$  étant des coefficients indéterminés; d'où comparant terme à terme, & faisant

$$a = \frac{1}{n+1}, \quad a' = \frac{2}{n+1}, \quad a'' = \frac{3}{n+1}, \quad a''' = \frac{4}{n+1} \dots$$

on conclura l'identité des deux formules.

Cette manière d'employer la méthode des coefficients indéterminés peut facilement s'étendre à différents Théorèmes du même genre.









# MESSIEURS DE LA SOCIÉTÉ

*Royale des Sciences établie à Montpellier, ont  
envoyé à l'Académie le Mémoire suivant, pour  
entretenir l'union intime qui doit être entre  
elles, comme ne faisant qu'un seul Corps, aux  
termes des Statuts accordés par le Roi, au mois  
de Février 1706.*

## MÉMOIRE DE MINÉRALOGIE.

Par M. MONTET.

**I**L s'agit principalement dans ce Mémoire de faits minéralogiques, & le canton dont il est fait mention dans ce Mémoire, est en partie calcaire, & en partie brûlé anciennement par un volcan maintenant éteint : la partie calcaire avoisine toujours la partie brûlée, & derrière celle-ci sont des montagnes schisteuses ; c'est ce qui sera démontré par les Observations suivantes.

En allant de Ceyras à Clermont, en côtoyant la rivière de Lergue, on ne voit que rochers, qui, pour la plupart, sont calcaires, & plusieurs autres de la nature du grès, rochers qui se rencontrent dans bien d'autres pays, ainsi mélangés avec les rochers calcaires, mais qui n'y sont, si on peut parler ainsi, qu'accidentellement formés : il en est de même des rochers de poudingues qu'on rencontre en montant par le chemin qui est à côté du château de Clermont, & qui conduit au grand chemin de Lodève ; ce chemin, qui n'a guère qu'une demi-lieue de longueur, n'est qu'une roche

Présenté  
en Mai  
1781.

calcaire remplie de coquilles, & les autres rochers sont des poudingues. Le territoire de Saint-Félix, qui est au-delà, ne renferme que des rochers calcaires, dont le plus grand nombre n'est qu'un amas de coquilles de différentes espèces: un endroit nommé la *Racasse*, & qui est du côté de Clermont, renferme des huîtres fossiles très-bien conservées, qui ont un pied de longueur, & dont les deux battans sont parfaitement unis ensemble; elles sont ensevelies dans du gravier ou dans du sable, & quelquefois dans de la glaise; celles qui sont dans le sable se sont mieux conservées que les autres. Près de Saint-André, dans un terrain graveleux, se voient d'autres huîtres d'environ un demi-pied en longueur; elles sont mélangées dans la mine de gravier à beaucoup de cailloux, auxquels elles adhèrent rarement, & la plupart avoient leurs deux valves; ces valves se détachent cependant aisément par les coups de pics dont se servent les Ouvriers qui tirent du gravier de ces endroits, pour les travaux journaliers: ces grandes huîtres sont assez unies, n'ont ni tubercules ni éminences, au lieu que celles qui se trouvent près du Peyrou, promenade de Montpellier, en sont hérissées, & ressemblent beaucoup aux huîtres qu'on pêche dans la Méditerranée, & qu'on mange à Montpellier. Toutes ces grandes huîtres fossiles sont très-abondantes dans tous les endroits où l'on en rencontre, & principalement à l'une & l'autre rive de l'Érau, pendant cinq à sept lieues de son cours, depuis son entrée dans la plaine de Gignac jusqu'à Pézenas & Agde, où elle forme le port de cette dernière ville; elles se trouvent dans toutes sortes de terrains, & toujours dans la plaine ou dans des vallons peu élevés, qui ne sont pas éloignés de la mer de plus de six lieues, & elles y sont abondantes. On observe tous ces faits dans une étendue de pays de plus de vingt lieues en largeur. Je ferai remarquer que ces huîtres ne sont pas de nos mers, on n'en trouve point du moins d'analogues dans la Méditerranée; il semble cependant qu'on peut rapporter à celle qu'on y pêche, une qui est fossile, & qu'on trouve à Cournonterral, gros village à deux lieues & demie de Montpellier;



de Montpellier; elle se tire d'une mine de sable exploitée près de Beaulieu, maison de campagne de M. Angelin, & qui touche le village de Cournonterral. En remontant la rivière de l'Érau jusqu'aux Sevennes, dans l'étendue de douze à quinze lieues, on rencontre encore des fossiles, mais ils manquent dans les rochers qui dépendent des montagnes véritablement renfermées dans les Sevennes, qui sont vis-à-vis de Montpellier, & dont les eaux viennent se rendre dans la Méditerranée.

Il est donc prouvé, par ces observations, qu'il y a une suite de montagnes qui renferment principalement des matières calcaires & des corps marins fossiles: on va voir par les observations suivantes, que ces montagnes avoisinent un canton qui a été brûlé, & qui est rempli de matières qui ont senti les effets d'un feu sorti d'une montagne, qui n'est plus maintenant qu'un volcan éteint.

Ce volcan est à peu-près dans la même direction de ceux de Pézenas & d'Agde, c'est-à-dire du Levant au Couchant; il n'en est éloigné que d'environ quatre lieues. La montagne qui a été brûlée se nomme maintenant *montagne de la Borio*; elle a environ une pente de vingt degrés: cette montagne fait partie de cette chaîne de montagnes, qui a une bonne lieue d'étendue, & qui s'étend jusqu'au pont de Cartel, où passe la rivière de Lergue, qui fait presque le tour de la montagne, dont le penchant est vers la plaine de Salagons. La lave se trouve dans l'espace d'une demi-lieue, sur le penchant de cette montagne, où elle est en morceaux dispersés çà & là, détachés les uns des autres, d'une grosseur qui n'est pas considérable, d'un noir tirant sur le gris, de différentes figures, ne laissant apercevoir extérieurement ni intérieurement, étant même brisée en petits morceaux, aucune espèce de matière cristalline, conséquemment point de schorl, ni de zeolithe; elle est un corps uniforme, homogène dans toutes ses parties, on peut du moins l'assurer pour tous les morceaux qu'on a examinés: il y a de ces morceaux qu'on prendroit pour du mâchefer, à cause de leur figure & de leur conformation.

Mém. 1778.

lili

La montagne de la Borio penche d'un côté, comme on l'a dit plus haut, sur la plaine de Salagons : cette plaine est immense ; elle renferme plusieurs côteaux, sur lesquels sont les uns ou les autres des villages de Liauſſon, Lous-Bally, Celles, Pradines & autres : cette plaine est arrosée par une petite rivière qui porte le même nom, & qui va se jeter dans la Lergue. Quelques terres de cette plaine, sur-tout à la partie basse, sont propres à la culture, mais en général ces terres ne paroissent pas devoir être d'une grande fertilité, vu la nature de son sol ; ce qui semble le prouver, c'est que ses parties montueuses ne produisent que des genêts, du buis & quelques autres arbrisseaux, encore sont-ils d'une chétive venue.

Ce sol est d'une terre rouge, qui, étant mouillée, prend une couleur plus intense, ce qui donne à cette plaine, lorsqu'il a plu, quelque chose d'agréable ; elle est dans le voisinage & dans le lieu même du volcan, d'une couleur moins vive, & même tirant sur le brun ; en général, elle ressemble beaucoup à la pouzzolane qui nous vient d'Italie, & il y a lieu de croire, qu'en faisant des fouilles dans les parties où le volcan ayant fait ses plus grands efforts, lors de l'éruption, l'a jetée sur les deux penchans de la montagne, l'on en pourroit trouver d'aussi bonne que celle que l'on tire de l'étranger.

Il ne faudroit pas confondre cette terre rouge, qui a tant de rapport à la pouzzolane, avec une qui se trouve auprès du pont de la Marguerite, autre petite rivière qui se jette dans la Lergue ; cette terre rouge est éloignée du volcan d'une grande lieue de Languedoc, & ne tient point à la chaîne de la montagne volcanique, mais elle est dans la même direction, & en est séparée par la rivière de Lergue, dont elle est éloignée d'une demi-lieue. Quand on est donc arrivé au pont de la Marguerite, qui fait la démarcation entre deux terrains bien différens, on trouve sur la partie droite, en venant de Lodève, un petit monticule qui s'étend assez loin, composé d'une terre rouge en masse qui se délite & s'émie aisément, n'ayant que trois ou quatre lignes d'épaisseur dans ses lits ; elle

n'est dûe qu'à un schitte décomposé ; on entend par schitte décomposé, celui qui a perdu sa couleur primitive, & qui, en tombant en efflorescence à la manière des pyrites exposées à l'air, si on peut s'exprimer ainsi, devient rouge par une cause quelconque, ou par l'action du feu, ou par l'acide dont il est imprégné, ou concurremment avec celui de l'air, que les Chimistes ont appelé *phosphorique*.

Cette terre étant mouillée devient d'un rouge plus vif que celui qu'elle a lorsqu'elle est sèche ; elle est dans ce dernier état d'un rouge obscur, très-analogue à celui du bol d'Arménie, elle apte légèrement à la langue : employée à la décomposition du nitre, elle a les mêmes propriétés que celles des terres bolaires, dont les Distillateurs se servent pour faire l'eau-forte ; on retire autant d'acide nitreux qu'avec celle dont ils sont en usage de se servir ; donc il est probable qu'on peut conclure que le grand nombre de ces terres rouges qu'on voit dans ce canton, ne sont qu'un schitte décomposé par l'acide vitriolique ; & ce qui paroît le prouver, c'est que cet endroit, & toute la chaîne de montagnes où il se trouve placé, n'ont aucun indice de volcan, & que les rochers de schitte qui sont les plus élevés sur ces montagnes, ont leur forme primitive : ces terres traitées avec le flux noir & l'huile donnent quelques grains de fer, ce qu'il est contraire à ce que M. de Genissane rapporte dans son Histoire minéralogique du Languedoc, où il dit à l'article du diocèse de Lodève, que ces terres qu'il appelle *terres roussâtres*, n'en donnent aucun indice.

Une terre semblable & les schittes, dont elle est une décomposition, ne peuvent qu'être facilement pénétrés par l'eau des fortes pluies ; aussi cette terre s'éboule en partie dès qu'elle a été profondément humectée par l'eau de la pluie qui la divise en parties très-fines : les chemins qui en sont couverts, dès que l'eau les a pénétrés, deviennent peu praticables ; les roues des voitures s'y enfoncent, & on a peine à les en retirer ; elle se détache aussi difficilement des roues, elle s'y attache fortement. L'eau de la Lergue, dans les temps d'inon-

dations , en est rouge , elle y est apportée par les eaux des torrens & des petites rivières qui s'y jettent , & au moyen de la Lergue , elle colore l'Érau qui la reçoit au-dessous de Brignac & au-dessus de Canet ; c'est ce qui n'arrive point lorsque l'Érau déborde , gonflé par les eaux qui viennent des Sevennes , où l'Érau prend sa source , à la montagne de l'Algonal , n'y ayant point de terre semblable dans ce canton des Sevennes : cette différence dans la couleur de cette rivière ne laisse aucun doute aux habitans de Pézenas , voisins de l'Érau , d'où l'inondation de cette rivière peut venir lorsqu'elle se déborde.

Non-seulement , cette terre rouge est emportée par la rivière de Lergue , mais elle roule encore des pierres de volcan qui y sont également portées dans le temps des grandes pluies ; ce sont ces pierres que l'on trouve dans les environs de Ceyras , que cette rivière laisse sur ses bords , & dont les habitans de cet endroit bâtissent les murs qui bordent le chemin , ou qui font la clôture des terres : on voit parmi ces laves des morceaux de basalte prismatique , dont les angles se font encore apercevoir , quoiqu'ils aient été roulés par les eaux de cette rivière , qui en a seulement émoussé quelques angles. Ce basalte ressemble assez par sa figure à celui qui est à Montferrier , où l'on trouve même au milieu du village un groupe de plusieurs colonnes de basalte à plusieurs faces : dans le grand nombre de laves de ce pays , qu'on peut avoir examinées , celle de Montferrier seulement est attirable à l'aimant : le fer s'y trouve avec tous ses principes constituans ; celle de la plaine de Salagons étant pulvérisée , n'est point attirée par l'aimant ; elle ne fait aucune effervescence avec les trois acides primitifs , & ne se vitrifie que difficilement sans addition.

Les endroits , dont on a parlé jusqu'à présent , qui donnent des indices de volcan , ne sont pas les seuls de ce canton qui font voir de ces indices : on en voit qui ne sont pas équivoques dans les environs du village de la Coste , situé au-delà de la rivière de Lergue , en allant à Clermont , & qui est presque à

l'extrémité d'une petite montagne située à un quart de lieue de Clermont. Les murailles des maisons & celles des terres qui sont en amphithéâtre, sont bâties en laves : il y a de ces laves qui sont poreuses, persillées sur toutes leurs surfaces, & fort légères : la terre des environs est brune, elle est rouge & semblable à celle dont on a parlé plus haut, avant d'arriver au pont du Cartel, où l'on passe la rivière de Lergue ; & cette terre se voit dans une lieue d'étendue. On trouve encore depuis ce pont jusqu'à Lodève de ce schitte décomposé & semblable à celui qui touche le pont de la Marguerite ; il est seulement en moindre quantité ; il paroît seulement moins rouge que celui de la plaine de Salagons : on ne remarque dans tout ce trajet aucun vestige de volcan.

Ces cantons brûlés ou qui donnent des indices de volcans éteints, sont, comme on l'a dit au commencement de ce Mémoire, placés entre des montagnes calcaires & d'autres montagnes qui ne sont composées que de schitte. Il nous reste à faire voir quelles sont ces dernières sortes de montagnes. Le sol où coule la rivière de Lergue n'est ordinairement que de schitte très-dur ; & ce qui est à remarquer dans ce terrain schitteux du diocèse de Lodève, c'est qu'il est uniforme & entièrement homogène. Les chaînes des montagnes ne sont point mélangées par d'autre espèce de rochers, comme dans les Sevennes, où les schittes sont souvent interrompues ou précédées par des granites, & où l'on peut dire que le terrain schitteux & graniteux marchent ensemble : c'est tout le contraire à Lodève & aux environs, où l'on ne voit que du schitte sans aucune espèce de granites. Aux approches de Lodève, on trouve à droite & à gauche du chemin des montagnes dont les rochers sont presque perpendiculaires à l'horizon, sur-tout ceux de la partie droite & qui est tournée vers Montpellier : toutes ces montagnes sont en amphithéâtre & très-bien cultivées ; les terres y sont soutenues par de grands circuits de murailles ; les terrasses en amphithéâtre ne sont pas d'une grande largeur ; elles n'ont pas souvent deux toises dans cette dimension ; elles sont plantées de vignes & d'oliviers jusqu'au

sommet des montagnes ; quelques - unes de celles qui sont exposées au nord ont des châtaigniers ; toutes ces montagnes ne sont composées que d'ardoises , qui est une espèce de schiste ; on en exploite plusieurs carrières ; on en tire de grandes tables : cette ardoise se délite par couches minces ; & en général elle est d'un grain plus fin & plus uni que celle des Sevennes , mais plus gris ; la plupart des maisons de Lodève en sont couvertes. Lodève est situé entre ces montagnes , qui y forment une gorge ; la rivière de Lergue la traverse ; cette rivière prend sa source à quatre lieues plus haut que Lodève ; les montagnes sont si resserrées les unes contre les autres & si élevées , qu'il y a presque toujours des nuages à leur sommet , qui se résolvent si souvent en pluie , qu'on dit proverbialement qu'il y pleut toujours.

Un des avantages que la connoissance de la Minéralogie peut procurer & qu'elle procure en effet , est la connoissance de la bonté des terrains : c'est ce qui a engagé à rapporter dans le cours de ce Mémoire quelques remarques qu'on avoit faites à ce sujet ; je le finirai par deux autres qui peuvent être d'une utilité prochaine à plusieurs cantons de la France. On dira donc qu'au village de Saint-Jean de la Blaquière , qui n'est éloigné de Lodève que de deux lieues , & près de la petite rivière de la Marguerite , on cultive une sorte de rosier communément appelé *rosier de Provins* ; & ce qui peut être encore plus utile de savoir , l'espèce de genêt appelé par Linné , *sparte* à branches flexibles comme le jonc , *spartum junceum*. Le terrain où l'on cultive cette dernière plante est des plus mauvais & des plus arides des environs de ce village : on prépare la terre par quelques labours ; on y sème ensuite la graine de ce genêt comme l'on sème le blé ; on le laisse ensuite trois années sans le couper. A cette époque , on le coupe au mois d'Août , & on en fait des fagots de cinq à dix livres , qu'on laisse sécher : quand ils sont secs , on les bat avec une masse ou un billot de bois sur le pavé , & on les porte tout de suite à la rivière pour les y faire tremper , en les assujettissant au moyen de pierres qu'on met

dessus ; on les y laisse pendant neuf jours ; on les en retire ensuite , ce temps suffisant pour les rouir au degré nécessaire ; on les met sécher à l'air : sont-ils secs , on les peigne avec des peignes de fer pour en séparer le tissu filamenteux de la partie parenchymateuse ; on repeigne ensuite les filamens pour dégager la partie la plus fine de ces filamens de celle qui est grossière ; on en fait des paquets qu'on donne à filer : ce fil sert à faire des toiles propres à être employées en draps , serviettes & autres ustensiles de cette nature ; la plus grosse toile est employée en draps pour les usages de la campagne ; celle qui est la plus fine sert à faire des serviettes & des jupes , qui sont d'un bon user & très-belles : lorsqu'elles sont blanchies seulement par les lessives , il y en a qui paroissent égaler en blancheur & en finesse celles qui sont faites avec le beau chanvre.

Une autre utilité de ce genêt , c'est que la repousse qui vient après la coupe que l'on en fait au mois d'Août , est donnée à manger aux troupeaux pendant l'hiver , autre avantage , qui n'est pas sans mériter quelque attention dans l'économie rurale ; & en général la culture de cet arbrisseau en mérite d'autant plus une , qu'il dure long-temps , & qu'il n'a besoin que de quelques légers labours ; ce qui devrait faire étendre cette culture plus qu'elle ne l'est même en Languedoc. Il paroît qu'elle n'y est suivie que dans le voisinage de la Blaquièrre & dans quelques hameaux des environs. On devrait d'autant plus s'y adonner dans le diocèse de Lodève , que les mauvais terrains y sont très-communs , celui sur-tout de la terre rouge de la plaine de Salagons , dont on a parlé. Puissent ces réflexions ouvrir les yeux des habitans du diocèse de Lodève & des autres endroits de la France , qui demeurent dans des pays dont le sol est semblable à celui où le genêt est cultivé , & les engager à se donner à cette culture , qui ne peut que leur être très-avantageuse & très-utile !

F I N.

